旗多様体上のカイラル微分作用素とアフィンリー環の表現論

荒川 知幸

1. はじめに

1.1. 2009 年代数学シンポジウムでは Fyodor Malikov との共同研究 [AM09a] の結果をお話した. その講演に基づいて報告する.

1.2. G を複素連結単純代数群, $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$, $\widehat{\mathfrak{g}}$ を $\mathfrak{g}$ に付随する (non-twisted) アフィン Kac-Moody 代数 [Kac90]

$$\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[t,t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}D$$

とする. $\widehat{\mathfrak{g}}$ の交換関係は次で与えられる.

(i) $[x_{(m)}, y_{(n)}] = [x,y]_{(m+n)} + m\delta_{m+n,0}(x|y)K$. ここで $x_{(m)} = x\otimes t^m$.
(ii) $[K, \widehat{\mathfrak{g}}] = 0$,
(iii) $[D, x_{(m)}] = mx_{(m)}$.

1.3. $M(\lambda)$ を $\widehat{\mathfrak{g}}$ の最高ウエイト λ の Verma 加群とし, $L(\lambda)$ を $M(\lambda)$ の唯一の既約商加群とする. K は $L(\lambda)$ に定数で作用するが, その値

$$k := \lambda(K)$$

はレベルと呼ばれる.

$L(\lambda)^{\mu}$ を $L(\lambda)$ のウエイト μ のウエイト空間としたとき $L(\lambda)$ の (形式) 指標 $\mathrm{ch}\, L(\lambda)$ が

$$\mathrm{ch}\, L(\lambda) = \sum_{\mu\in\widehat{\mathfrak{h}}^*} e^{\mu} \dim L(\lambda)^{\mu}$$

で定義される. 指標 $\mathrm{ch}\, L(\lambda)$ の導出は $\widehat{\mathfrak{g}}$ の表現論において言うまでもなく基本問題である.

1.4. Kac-Moody 代数の指標については $L(\lambda)$ が可積分表現の時の Weyl-Kac の指標公式とその Macdonald 恒等式への応用 [Kac74] が有名である. 一般の既約表現についても柏原・谷崎の一連の結果 [KT95, KT96, KT98, KT00] がほぼ全ての $L(\lambda)$ の指標を求めるアルゴリズムを与える. 「ほぼ全て」との書いたのは臨界レベル, すなわち, $h^{\vee}$ を $\mathfrak{g}$ の双対 Coxeter 数としたとき $k = \lambda(K) = -h^{\vee}$ の場合[1], が例外であるからである. 臨界レベルの $L(\lambda)$ の指標公式の導出は一般には未解決問題である.

1.5. 臨界レベルにおいて $\widehat{\mathfrak{g}}$ の表現論は劇的に変わる. 臨界レベルでは $\widehat{\mathfrak{g}}$ の表現論は基礎体が $\mathbb{C}$ であるにも関わらずモヂュラー表現論の様相を帯びる. その主たる要因は巨大な中心 (Feigin-Frenkel center [FF92]) の存在である.

本研究は文部科学省科学研究費基盤研究 (B)20340007 の助成を受けたものである.

[1] これは $(\lambda + \widehat{\rho})(K) = 0$ と等価.

1.6. Feigin-Frenkel center は臨界レベルの $\widehat{\mathfrak{g}}$ の表現論において Lie 環のモヂュラー表現論における p-center の役割を果たす．このときの標準加群[2] は $M(\lambda)$ ではなく $M(\lambda)$ を Feigin-Frenkel center の作用で割った制限 Verma 加群 $M^{\mathrm{res}}(\lambda)$ となる[3].

$M^{\mathrm{res}}(\lambda)$ の組成列の中での $L(\lambda)$ の現れ方はアフィン Weyl 群で記述され (Arakawa-Feibig [AF09]), さらにその重複度は Lusztig の periodic 多項式 [Lus80] で記述されると予想されている (Feign-Frenkel 予想, [AF08] 参照).

臨界レベルの Kac-Moody Lie 代数の表現論の研究は最近幾何学的 Langlands 対応の視点から Frenkel-Gaitsgory によって精力的な研究が行われれ ([FG04, FG05, FG07b, FG07a]) 著しい進展を遂げた．しかし指標公式に関する Feigin-Frenkel 予想は今だ未解決なようである．

1.7. このように臨界レベルにおける一般の既約表現 $L(\lambda)$ の指標は極めて複雑である．しかし一方で $G[[t]]$ 可積分な $L(\lambda)$ については例外的に[4]次の指標公式が知られている ([Ara07a], E. Frenkel).

$$\operatorname{ch} L(\lambda) = \frac{\sum_{w\in W}(-1)^{\ell(w)}e^{w\circ\lambda}}{\prod_{\alpha\in\Delta_+}(1-q^{\langle\lambda+\rho,\alpha^\vee\rangle})\prod_{\alpha\in\Delta_+^{re}}(1-e^{-\alpha})} \tag{1}$$

ここで W は $\mathfrak{g}$ のワイル群, $\ell(w)$ は $w\in W$ の長さ, Δ_+ は $\mathfrak{g}$ の正ルートの集合, Δ_+^{re} は $\widehat{\mathfrak{g}}$ の正の実ルートの集合, $\rho=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta_+}\alpha$, $\alpha^\vee=\frac{2}{(\alpha,\alpha)}\alpha$, $q=e^{-\delta}$ である．

1.8. 指標公式 (1) の当初の導出はある種フォーマルな計算に基づいており intrinsic なものではなかった．そこで本稿では (1) の intrinsic な証明を与えることを目的とする．

1.9. 主たる道具は旗多様体 G/B 上のカイラル微分作用素の層 (cdo) $\mathcal{D}^{ch}_{G/B}$ である．Cdo は Malikov-Schechtman-Vaintrob[MSV99] と Beilinson-Drinfeld[BD04] によって独立に導入された頂点作用素の層[5]である．局所的には cdo は Weyl 代数のカイラリゼーションである $\beta\gamma$ システム [FMS86] に同型であり, 従って cdo は通常の微分作用素の層のカイラリゼーションである (命題 3.4).

Beilinson-Benstein 対応 [BB81] により G/B 上の微分作用素の層 $\mathcal{D}_{G/B}$ は $\mathfrak{g}$ の表現論に強力な応用を持つ．我々はこれをモデルとして $\mathcal{D}^{\mathrm{ch}}_{G/B}$ を $\mathfrak{g}$ のアフィン化である $\widehat{\mathfrak{g}}$ の表現論への応用を試みた[6].

ただし Beilinson-Benstein 対応の場合と異なり我々の場合高次コホモロジーの消滅が成立しない．しかし我々はこれを逆手に取ることにより指標公式 (1) への応用に成功した．

1.10. 講演ではあまり説明できなかったが, $\mathcal{D}^{\mathrm{ch}}_{G/B}$ のオイラー指標 $\chi_q(G/B,\mathcal{D}^{\mathrm{ch}}_{G/B})$ は旗多様体 G/B の楕円指標 (の一つのバージョン) でもある ([BL00, GM04]). Witten [Wit07] によれば頂点代数 $H^*(X,\mathcal{D}^{\mathrm{ch}}_{G/B})$ は G/B 上の適当な $(0,2)$ シグマ模型のカイラル代数と同一視され, $\chi_q(G/B,\mathcal{D}^{\mathrm{ch}}_{G/B})$ は G/B 上のループ空間上の対応する Dirac

[2]standard module

[3]制限 Verma 加群が generic に既約になることは $\mathfrak{g}$ が古典型のときは林 [Hay88], 一般の $\mathfrak{g}$ については [FF88, Ku89] によって証明された ([Ara06] も参照のこと).

[4]臨界レベルの表現は可積分ではなく, 従ってアフィンワイル群不変性を持たない．従って Weyl-Kac の指標公式と同様の議論ができないにも関わらず.

[5]頂点代数は代数系であるためその層は当然意味がある．

[6]柏原・谷崎の理論は多様体を無限次元化しその上の微分作用素の層を使うが, 我々は多様体は有限次元のままで層を無限次元化したものを扱う．

作用素の指数と一致する．表現論は $\chi_q(G/B, \mathcal{D}^{\mathrm{ch}}_{G/B})$ の簡易な計算方法を与え, 結果は定理 6.5 で与えられる．

1.11. この場をお借りして講演の機会を与えてくださった世話人の皆さんに深く感謝致します.

2. 頂点代数とその Zhu 代数

2.1. 頂点代数 V とはベクトル空間 V であって次の公理を満たすものを言う (詳しくは [Kac98, FBZ04, DSK06] を参照のこと). state-field correspondence と呼ばれる線形写像

$$\begin{array}{cccc} Y: & V & \to & (\operatorname{End} V)[[z, z^{-1}]] \\ & a & \mapsto & Y(a,z) = a(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{(n)} z^{-n-1}, \end{array}$$

真空ベクトルと呼ばれる $\mathbf{1} \in V$, translation operator と呼ばれる $T \in \operatorname{End}(V)$ が存在し以下を満たす $(a, b \in V)$.

(i) $Y(a,z)b \in V((z))$,
(ii) $Y(\mathbf{1}, z) = \mathrm{id}_V$,
(iii) $Y(a,z)\mathbf{1} \in V[[z]]$ かつ $a = \lim_{z\to 0} Y(a,z)\mathbf{1}$,
(iv) $Y(Ta, z) = \frac{\partial}{\partial z} Y(a,z)$,
(v) $(z-w)^N [Y(a,z), Y(b,w)] = 0$ $(N \gg 0)$.

2.2. 以下この報告では頂点代数は全て $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ で次数付けされたものとする．つまり, ベクトル空間として $V = \bigoplus_{\Delta\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} V_\Delta$ かつ

$$a_{(n)} b \in V_{\Delta_a + \Delta_b - n - 1} \quad (a \in V_{\Delta_a},\ b \in V_{\Delta_b})$$

を満たすものとする.

2.3. 次の **Borcherds 関係式**は公理からの帰結である ([Li96]).

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{\infty} (a_{(r+i)} b)_{(m+n-i)} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{r}{i} \left(a_{(m+r-i)} b_{(n+i)} - (-1)^r b_{(n+r-i)} a_{(m+i)} \right) \quad (m, n, r \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Borcherds 関係式を頂点代数の基本関係式とみなすことにより V 加群が定義される. ただし本稿では V 加群と言った場合 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-graded のものを指すことにする.

2.4. 例 (普遍アフィン頂点代数). 複素数 k に対して

$$V^k(\mathfrak{g}) = U(\widehat{\mathfrak{g}}) \otimes_{U(\mathfrak{g}[t] \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}D)} \mathbb{C}_k$$

とおく．ただし $\mathbb{C}_k$ は K が k で作用し $\mathfrak{g}[t] \oplus \mathbb{C}D$ が零で作用する $\mathfrak{g}[t] \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}D$ の一次元表現である．$V^k(\mathfrak{g})$ には

$$\begin{aligned} &\mathbf{1} = 1 \otimes 1, \\ &Y(x_{(-1)}\mathbf{1}, z) = x(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_{(n)} z^{-n-1} \quad (x \in \mathfrak{g}) \end{aligned}$$

を満たす頂点代数の構造が唯一存在する (例えば [Kac98] を参照).

$V^k(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ に付随するレベル k の**普遍アフィン頂点代数と呼ぶ**. $V^k(\mathfrak{g})$ 加群の圏はレベル k の滑らかな $\widehat{\mathfrak{g}}$ 加群[7]のなす $\widehat{\mathfrak{g}}$ 加群の圏の充満部分圏に他ならない. また V は $-D$ で次数付けされる.

2.5. 頂点代数 V に対してその **Zhu 代数**$\mathrm{Zhu}(V)$ が次で定義される.

$$\mathrm{Zhu}(V) = V/V \circ V.$$

ただし $V \circ V = \mathrm{span}\{a \circ b; a, b \in V\}_{\mathbb{C}}$,

$$a \circ b = \sum_{i \geq 0} \binom{\Delta_a}{i} a_{(i-2)} b \quad (a \in V_{\Delta_a}, b \in V_{\Delta_b})$$

Zhu 代数は次の $*$ 積で通常の結合的多元環になる.

$$a * b = \sum_{i \geq 0} \binom{\Delta_a}{i} a_{(i-1)} b \quad (a \in V_{\Delta_a},\ b \in V_{\Delta_b}).$$

2.6. $M = \bigoplus_{d \in \mathbb{C}} M_d$ を次数付けされた V 加群とするとき, その最高次数部分

$$M_{\mathrm{top}} := \bigoplus_{\substack{d \in \mathbb{N} \\ M_{d-r}=0\ (r>0)}} M_d$$

は自然に $\mathrm{Zhu}(V)$ 加群となる. さらに, $M \mapsto M_{\mathrm{top}}$ は次数付けされた単純 V 加群と単純 $\mathrm{Zhu}(V)$ 加群との間に一対一対応を与えることが知られている ([Zhu96]).

2.7. 定義 (Kac). 多元環 A に対し $\mathrm{Zhu}(V) \cong A$ となる頂点代数 V を A の**カイラリゼーション**と言う.

2.8. 例. 任意の $k \in \mathbb{C}$ に体して次の同型が知られている

$$\mathrm{Zhu}(V^k(\mathfrak{g})) \cong U(\mathfrak{g}).$$

したがって $V^k(\mathfrak{g})$ は $U(\mathfrak{g})$ のカイラリゼーションである.

2.9. 例 2.8 から分かるようにカイラリゼーションはユニークとは限らない.

2.10. 例 (W 代数). $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ (と $\mathfrak{g}$ の主巾零軌道) に付随したレベル k の W 代数[8]とする. このとき

$$\mathrm{Zhu}(\mathcal{W}^k(\mathfrak{g})) \cong \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$$

([Ara07b, Theorem 4.14.2(2)]). ただし $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ は $U(\mathfrak{g})$ の中心.

2.11. 例 (Feigin-Frenkel center). $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ を臨界レベルにおけるアフィン頂点代数 $V^{-h^\vee}(\mathfrak{g})$ の中心とする:

$$\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}}) = \{a \in V^{-h^\vee}(\mathfrak{g}); [a_m, b_{(n)}] = 0, \forall m, n \in \mathbb{Z},\ \forall b \in V^{-h^\vee}(\mathfrak{g})\}.$$

このとき [FF92]

$$\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}}) \cong \mathcal{W}^{-h^\vee}(\mathfrak{g})$$

したがって例 2.10 より $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ は $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ のカイラリゼーションである. $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ を **Feigin-Frenkel center** と言う.

---

[7] $\widehat{\mathfrak{g}}$ 加群 M は K が k で作用するときレベル k であると言う. また任意の $m \in M$ に対して $x_{(n)} m = 0$ $(n \gg 0)$ が成立するとき滑らかであると言う.

[8] [FBZ04] を参照

2.12. $V^k(\mathfrak{g})$ は一般には単純ではなく $\widehat{\mathfrak{g}}$ 加群としての単純商 $L(k\Lambda_0)$ がその頂点代数としての単純商となる. $L(k\Lambda_0)$ をレベル k の **(単純) アフィン頂点代数**と呼ぶ. 例 2.8 より $\mathrm{Zhu}(L(k\Lambda_0))$ は $U(\mathfrak{g})$ の商となる.

次は [FG04] の結果からの帰結である.

2.13. 命題. 次の同型が成立する.

$$\mathrm{Zhu}(L(-h^\vee\Lambda_0)) \cong U_{[0]}(\mathfrak{g}) := U(\mathfrak{g})/\mathcal{Z}(\mathfrak{g})_+U(\mathfrak{g}).$$

ただし $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})_+$ は $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ の正の斉次部分.

3. 旗多様体上の CDO

3.1. X を滑らかな複素代数多様体とする. X 上の頂点代数の層[9]$\mathcal{D}_X^{\mathrm{ch}}$ は以下の性質を満たすとき**カイラル微分作用素の層 (cdo)** であると言う.

(i) $\mathcal{D}_X$ は $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-graded: $\mathcal{D}_X = \bigoplus_{\Delta\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} (\mathcal{D}_X^{\mathrm{ch}})_\Delta$,

(ii) 環の層として[10], $(\mathcal{D}_X)_0 \cong \mathcal{O}_X$,

(iii) 次の層の完全列が存在する:

$$0 \to \Omega_X^1 \to (\mathcal{D}_X^{\mathrm{ch}})_1 \to \mathcal{T}_X \to 0.$$

ここで Ω_X^1, $\mathcal{T}_X$ はそれぞれ Kähler 微分作用素の層と接層.

(iv) $T(\mathcal{O}_X) \subset \Omega_X^1(\subset (\mathcal{D}_X^{\mathrm{ch}})_1)$ かつ

$$T : \mathcal{O}_X \to \Omega_X^1$$

は de Rham differential に一致. また Ω_X^1 は積 $(a, b) \mapsto a_{(-1)}b$ により[11] $\mathcal{O}_X$ 加群になり, その作用は通常の $\mathcal{O}_X$ 加群としてのものと一致する.

(v) 積 $(a, b) \mapsto a_{(-1)}b$ は $(\mathcal{D}_X^{\mathrm{ch}})_1/\Omega_X^1$ に $\mathcal{O}_X$ 加群の構造を与える. また積 $(a, b) \mapsto a_{(0)}b$ は $(\mathcal{D}_X^{\mathrm{ch}})_1/\Omega_X^1$ にリー環の構造を与え, リー環の層及び $\mathcal{O}_X$ 加群の層としての同型 $(\mathcal{D}_X^{\mathrm{ch}})_1/\Omega_X^1 \cong \mathcal{T}_X$ が成立する.

(vi) $\mathcal{D}_X^{\mathrm{ch}}$ は頂点代数として $(\mathcal{D}_X^{\mathrm{ch}})_0$ と $(\mathcal{D}_X^{\mathrm{ch}})_1$ で生成される.

3.2. 注意. $f, g \in \mathcal{O}_X = (\mathcal{D}_X^{\mathrm{ch}})_0$ について

$$(fg)_{(-1)} \neq f_{(-1)}g_{(-1)}$$

であるので $\mathcal{D}_X^{\mathrm{ch}}$ は $\mathcal{O}_X$ 加群ではない. ただし $\mathcal{D}_X^{\mathrm{ch}}$ には自然なフィルトレーションが入り associated graded vertex algebra の層 $\mathrm{gr}\,\mathcal{D}_X^{\mathrm{ch}}$ は $p_*\mathcal{O}_{TX_\infty}$ に同型となる. ここで TX_∞ は余接束の infinite jet scheme であり $p : TX_\infty \to X$ は自然な射影. 特に $\mathrm{gr}\,\mathcal{D}_X^{\mathrm{ch}}$ は次数付けされた $\mathcal{O}_X$ 加群になり, 各斉次成分は有限階数の局所自由 $\mathcal{O}_X$ 加群となる.

3.3. $\mathcal{D}_X$ を X 上の (通常の) 微分作用素の層とする.

---

[9] 各開集合 U に対し $\mathcal{D}_X^{\mathrm{ch}}(U)$ は頂点代数, 制限写像は頂点代数の準同型.

[10] 一般に $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ で次数付けされた頂点代数 $V = \bigoplus_{\Delta\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ に対し V_0 には自然に環の構造が入る.

[11] 頂点代数 V の元に対応する field を $a(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{(n)}z^{-n-1}$ と書いている.

3.4. 命題.
(i) ([ACM08, Corollary 3.18]) $\mathcal{D}_X^{\mathrm{ch}}$ の Zhu 代数の層 $\mathrm{Zhu}(\mathcal{D}_X^{\mathrm{ch}})$ は $\mathcal{D}_X$ に同型である.
(ii) ([ACM08, Theorem 5.2 (2)]) $\mathcal{D}_X^{\mathrm{ch}}$ の加群 $\mathcal{F}$ に対しそのトップの次数部分 $\mathcal{F}_{\mathrm{top}}$ を対応させる対応は圏同値
$$\mathcal{D}_X^{\mathrm{ch}}\text{-Mod} \quad \cong \quad \mathcal{D}_X\text{-Mod}$$
を与える

3.5. 上の命題から $\mathcal{D}_X^{\mathrm{ch}}$ は $\mathcal{D}_X$ のカイラリゼーションであると言える. 図式的に書くと次の様になる (数学的な主張ではない).

$$\begin{array}{ccc} p_*\mathcal{O}_{(T^*X)_\infty} & \xrightarrow{\text{量子化}} & \mathcal{D}_X^{\mathrm{ch}} \\ {\scriptstyle\text{カイラリゼーション}}\big\uparrow & & \big\uparrow{\scriptstyle\text{カイラリゼーション}} \\ p_*\mathcal{O}_{T^*X} & \xrightarrow{\text{量子化}} & \mathcal{D}_X \end{array}$$

3.6. ところで $\mathcal{D}_X$ と異なり $\mathcal{D}_X^{\mathrm{ch}}$ は必ずしも存在するとは限らない. また存在したとしてもユニークとは限らない (cdo は X 上の gerb をなす [GMS04]). しかし次が知られている.

3.7. 定理. [([AG02, GMS01, GMS04]) 旗多様体 G/B には cdo が唯一存在する. ここで B は G の Borel 部分群.

4. 臨界レベルのアフィン頂点代数の局所化

4.1. 以下 $X = G/B$ とする. X は滑らかな射影代数多様体である.

4.2. 自然な準同型
$$U(\mathfrak{g}) \to \Gamma(X, \mathcal{D}_X) \tag{2}$$
が存在するが, これは頂点代数の準同型
$$V^{-h^\vee}(\mathfrak{g}) \to \Gamma(X, \mathcal{D}_X^{\mathrm{ch}}) \tag{3}$$
に持ち上がる[12]ことが知られている ([GMS01, AG02] [13]).
Beilinson-Bernstein[BB81] により (2) は同型
$$U_{[0]}(\mathfrak{g}) \cong \Gamma(X, \mathcal{D}_X) \tag{4}$$
を誘導することが知られているが, 次の結果はそのカイラリゼーションと見ることができる.

4.3. 定理. (Arakawa-Chebotarov-Malikov[ACM08]) 準同型 (3) は頂点代数の同型
$$L(-h^\vee\Lambda_0) \xrightarrow{\sim} \Gamma(X, \mathcal{D}_X^{\mathrm{ch}})$$
を誘導する. 特に大域切断 $\Gamma(X, \mathcal{D}_X^{\mathrm{ch}})$ は単純な頂点代数である.

4.4. 注意. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ のときは定理 4.3 は Malikov-Schechtman-Vaintrob[MSV99] の結果である.

---

[12] $\mathcal{D}_X^{\mathrm{ch}}$ は頂点代数の層なので大域切断も頂点代数. また高次の (層の) コホモロジー $H^i(X, \mathcal{D}_X^{\mathrm{ch}})$ は $\Gamma(X, \mathcal{D}_X^{\mathrm{ch}})$ 加群である.

[13] U を X の big cell とすると切断 $\mathcal{D}_X^{\mathrm{ch}}(U)$ は最高ウエイト $k\Lambda_0$ の制限脇本加群 [Wak86, FF90, Fre05] に同型である

5. 旗多様体上の TCDO

5.1. P_+ を $\mathfrak{g}$ の支配的整ウエイトの集合とする. $\lambda \in P_+$ について E_λ を $\mathfrak{g}$ の最高ウエイト λ の有限次元既約表現とし,

$$\chi_\lambda : \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}$$

を E_λ での evaluation とする. Borel-Weil の定理により X 上の可逆層 $\mathcal{L}_\lambda$ が存在し

$$E_\lambda \cong \Gamma(X, \mathcal{L}_\lambda)$$

と実現される. このとき tdo $\mathcal{D}_\lambda = \mathcal{L}_\lambda \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \otimes \mathcal{L}_\lambda^{-1}$ を用いて (4) は

$$U_{[\lambda]} := U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g}) \ker \chi_\lambda \cong \Gamma(X, \mathcal{D}_\lambda) \tag{5}$$

と一般化される.

5.2. 我々は $\mathcal{D}_\lambda$ のカイラリゼーションを考えたいのだが $\mathrm{Zhu}\, \mathcal{D}_\lambda^{\mathrm{ch}}) \cong \mathcal{D}_\lambda$ なる X 上の頂点代数の層 $\mathcal{D}_X^{\mathrm{ch}}$ は存在しない. そこで $\mathcal{D}_\lambda$ の代わりに λ をパラメーターとみなすことによって得られる普遍 tdo $\widetilde{\mathcal{D}}_X$ を考える. $\widetilde{\mathcal{D}}_X$ については以下が成立する.

(i) $\mathcal{Z}(\widetilde{\mathcal{D}}_X) \supset \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]$,
(ii) $\mathcal{D}_\lambda = \widetilde{\mathcal{D}}_X \otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]} \mathbb{C}_\lambda$.

$\widetilde{\mathcal{D}}_X$ のカイラリゼーションは可能であり以下の性質を持つ普遍 tcdo $\widetilde{\mathcal{D}}_X^{\mathrm{ch}}$ が存在する ([ACM08]):

- $\mathcal{Z}(\widetilde{\mathcal{D}}_X^{\mathrm{ch}}) \supset \mathbb{C}[\mathfrak{h}_\infty^*]$,
- $\mathrm{Zhu}(\widetilde{\mathcal{D}}_X^{\mathrm{ch}}) \cong \widetilde{\mathcal{D}}_X$,
- $\mathbb{C}[\mathfrak{h}_\infty^*]$ の作用を指定することによって定まる $\widetilde{\mathcal{D}}_X^{\mathrm{ch}}$-Mod の部分圏 $\mathcal{D}_\lambda^{\mathrm{ch}}$-Mod が存在し, 次の圏同値が成立する[14]. .

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_\lambda^{\mathrm{ch}}\text{-Mod} & \cong & \mathcal{D}_\lambda\text{-Mod}, \\ \mathcal{F} & \mapsto & \mathcal{F}_{\mathrm{top}}, \\ \widehat{\mathcal{F}} & \leftarrow\!\shortmid & \mathcal{F}. \end{array}$$

5.3. 圏同値によって $\mathcal{L}_\lambda$ に対応する $\mathcal{D}_\lambda^{\mathrm{ch}}$-Mod の対象を $\widehat{\mathcal{L}}_\lambda$ と書くこのとき $\Gamma(X, \widehat{\mathcal{L}}_\lambda)$ は自然に臨界レベルの $\widehat{\mathfrak{g}}$ 加群の構造が入る.

5.4. 定理. (Arakawa-Chebotarov-Malikov [ACM08]) $P_+ \ni \lambda$ に対し, 次が成立する[15].

$$\Gamma(X, \widehat{\mathcal{L}}_\lambda) \cong L(\widehat{\lambda}).$$

ここで $\widehat{\lambda} = \lambda - h^\vee \Lambda_0$.

5.5. 定理 5.4 の証明には中心指標を持つ Harish-Chandra $(\widehat{\mathfrak{g}}, G[[t]])$ 加群の圏が完全可約だと言う事実 ([FG07a]) を本質的に使う.

---

[14] [ACM08, AM09a] の記号では $\widehat{\mathcal{F}}$ は $Zhu_{\chi_\lambda/z}\mathcal{F}$.
[15] 正確には $[\widehat{\mathfrak{g}}, \widehat{\mathfrak{g}}]$ 加群としての同型

6. 旗多様体の楕円種数

6.1. 次の関手の合成を考えよう.

$$\begin{array}{ccccccc} U_{[\lambda]}(\mathfrak{g})\text{-Mod} & \cong & \mathcal{D}_\lambda\text{-Mod} & \cong & \mathcal{D}_\lambda^{\mathrm{ch}}\text{-Mod} & \to & \widehat{\mathfrak{g}}\text{-Mod} \\ M & \mapsto & \Delta(M) & \mapsto & \widehat{\Delta}(M) & \mapsto & \Gamma(X, \widehat{\Delta}(M)). \end{array}$$

ここで, $\Delta(M) = \mathcal{D}_\lambda \otimes_{U(\mathfrak{g})} M$. また $\widehat{\Delta}(M)$ は圏同値によって $\Delta(M)$ に対応する $\mathcal{D}_\lambda^{\mathrm{ch}}$-Mod の対象である. 最初の関手は Beilinson-Bernstein 対応であり, 従って最後の関手を除いては全て圏同値である. 故に最後の関手は圏同値にはなり得ない. 特に高次コホモロジーの消滅は期待できない.

6.2. そこでまず Euler 指標を考える.

$$\chi(X, \widehat{\mathcal{F}}) = \sum_i (-1)^i \operatorname{ch} H^i(X, \widehat{\mathcal{F}}).$$

ここで $\operatorname{ch} H^i(X, \widehat{\mathcal{F}})$ は $H^i(X, \widehat{\mathcal{F}})$ の $\widehat{\mathfrak{g}}$ 加群としての形式指標である. 上の 3 つの圏同値から Euler 指標は写像

$$\begin{array}{ccc} K_0(U_{[0]}\text{-Mod}) & \to & \{\text{formal characters}\} \\ [M] & \mapsto & \chi(X, \widehat{\Delta}(M)) \end{array}$$

を与えることが分かる. 従って Euler 指標を知りたければ例えば $\mathfrak{g}$ の Verma 加群 $\bar{M}_\lambda$, あるいはその双対 $\bar{M}_\lambda^*$ の像を調べれば良い.

6.3. 命題. ([AM09a]) $\lambda \in P_+$ と $w \in W$ について,

$$H^i(X, \widehat{\Delta}(\bar{M}^*_{w\circ\lambda})) = \begin{cases} M^{\mathrm{res}}(w \circ \widehat{\lambda})^* & (i = 0), \\ 0 & (i \neq 0). \end{cases}$$

特に,

$$\chi(X, \widehat{\Delta}(\bar{M}^*_{w\circ\lambda})) = \operatorname{ch} M^{\mathrm{res}}(w \circ \widehat{\lambda})^* = \frac{e^{w\circ\widehat{\lambda}}}{\prod_{\alpha \in \widehat{\Delta}_+^{re}} (1 - e^{-\alpha})}.$$

6.4. 命題 6.3 より次が直ちに従う.

6.5. 定理. (Arakawa-Malikov [AM09a]) $\lambda \in P_+$ について,

$$\chi(X, \widehat{\mathcal{L}}_\lambda) = \sum_{w \in W} \frac{(-1)^{\ell(w)} e^{w\circ\widehat{\lambda}}}{\prod_{\alpha \in \Delta_+^{re}} (1 - e^{-\alpha})}.$$

特に $\chi(X, \widehat{\mathcal{L}}_\lambda)$ の homogeneous specialization $\chi_q(X, \widehat{\mathcal{L}}_\lambda)$ は以下で与えられる.

$$\chi_q(X, \widehat{\mathcal{L}}_\lambda) = \frac{\dim E_\lambda}{\prod_{j=1}^{\infty} (1 - q^j)^{\dim X}}.$$

7. 高次コホモロジーと指標公式

7.1. 高次コホモロジー $H^i(X, \widehat{\mathcal{L}}_\lambda)$ の導出は一般には極めて難しい問題である．しかし我々の場合 Harish-Chandra $(\widehat{\mathfrak{g}}, G[[t]])$ 加群の圏の完全可約性より各コホモロジー $H^i(X, \widehat{\mathcal{L}}_\lambda)$ は $L(\widehat{\lambda} - d\delta)$ $(d \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ の形の既約表現の直和になることが分かっている[16]．従って各既約表現の重複度を計算すれば良い．結果は次で与えられる．

7.2. 定理. (Arakawa-Malikov [AM09a]) 各 $\lambda \in P_+$ について同型

$$H^i(X, \widehat{\mathcal{L}}_\lambda) \cong \bigoplus_{\substack{w \in W \\ \ell(w)=i}} L(\lambda - \langle \lambda - w \circ \lambda, \rho^\vee \rangle \delta)$$

が成立する．特に,

$$\operatorname{ch} H^i(X, \widehat{\mathcal{L}}_\lambda) = \operatorname{ch} L(\widehat{\lambda}) \times \sum_{\substack{w \in W \\ \ell(w)=i}} q^{\lambda - \langle \lambda - w \circ \lambda, \rho^\vee \rangle}.$$

7.3. 以上二つの定理から Euler 指標の 2 つの異なる表示を得た．これと良く知られた公式 (例えば [FH91] 参照)

$$\sum_{w \in W} (-1)^{\ell(w)} q^{\langle \lambda - w \circ \lambda, \rho^\vee \rangle} = \prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 - q^{\langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle}).$$

を使うとの指標公式 (1) が従う．

7.4. 注意. $\lambda = 0$ の時次の同型が存在する ([AM09b]).

$$H^*(X, \mathcal{D}_X^{\mathrm{ch}}) \cong \mathcal{Z}(H^*(X, \mathcal{D}_X^{\mathrm{ch}})) \otimes \Gamma(X, \mathcal{D}_X^{\mathrm{ch}}),$$
$$\mathcal{Z}(H^*(X, \mathcal{D}_X^{\mathrm{ch}})) \cong H^*_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{n}, \mathbb{C}).$$

ここで $\mathcal{Z}(H^*(X, \mathcal{D}_X^{\mathrm{ch}}))$ は $H^*(X, \mathcal{D}_X^{\mathrm{ch}})$ の (頂点代数としての) 中心, $\mathfrak{n}$ は $\mathfrak{g}$ の極大冪零部分環, $H^*_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{n}, \mathbb{C})$ は $\mathfrak{n}$ の自明表現を係数とする Lie 環のコホモロジーである．

References

[ACM08] T. Arakawa, D. Chebotarov, and F. Malikov. Algebras of twisted chira differentail operators and affine lolalization of $\mathfrak{g}$-modules. *preprint*, 2008. arXiv:0810.4964[math.AG].

[AF08] Tomoyuki Arakawa and Peter Fiebig. On the restricted verma modules at the critical level. *preprint*, 2008. arXiv:0812.3334v1[math.RT].

[AF09] Tomoyuki Arakawa and Peter Fiebig. The linkage principle for restricted critical level representations of affine kac-moody algebras. *preprint*, 2009. arXiv:0909.4214[math.RT].

[AG02] S. Arkhipov and D. Gaitsgory. Differential operators on the loop group via chiral algebras. *Int. Math. Res. Not.*, No. 4, pp. 165–210, 2002.

[AM09a] Tomoyuki Arakawa and Fyodor Malikov. A chiral Borel-Weil-Bott theorem. *preprint*, 2009. arXiv:0903.1281[math.AG].

[AM09b] Tomoyuki Arakawa and Fyodor Malikov. A vertex algebra attached to the flag manifold and Lie algebra cohomology. *preprint*, 2009. arXiv:0911.0922[math.AG].

[Ara06] Tomoyuki Arakawa. A new proof of the Kac-Kazhdan conjecture. *Int. Math. Res. Not.*, pp. Art. ID 27091, 5, 2006.

[Ara07a] Tomoyuki Arakawa. Characters of representations of affine Kac-Moody Lie algebras at the critical level. *preprint*, 2007. arXiv:0706.1817v2[math.QA].

[Ara07b] Tomoyuki Arakawa. Representation theory of W-algebras. *Invent. Math.*, Vol. 169, No. 2, pp. 219–320, 2007.

[BB81] Alexandre Beĭlinson and Joseph Bernstein. Localisation de g-modules. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, Vol. 292, No. 1, pp. 15–18, 1981.

[16]定理 5.4 の同型が $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ 加群としての同型なのでウエイトの δ の係数の差だけが意味がある．

[BD04] Alexander Beilinson and Vladimir Drinfeld. *Chiral algebras*, Vol. 51 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[BL00] Lev A. Borisov and Anatoly Libgober. Elliptic genera of toric varieties and applications to mirror symmetry. *Invent. Math.*, Vol. 140, No. 2, pp. 453–485, 2000.

[DSK06] Alberto De Sole and Victor G. Kac. Finite vs affine W-algebras. *Japan. J. Math.*, Vol. 1, No. 1, pp. 137–261, 2006.

[FBZ04] Edward Frenkel and David Ben-Zvi. *Vertex algebras and algebraic curves*, Vol. 88 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2004.

[FF88] B. L. Feĭgin and È. V. Frenkel′. A family of representations of affine Lie algebras. *Uspekhi Mat. Nauk*, Vol. 43, No. 5(263), pp. 227–228, 1988.

[FF90] Boris L. Feĭgin and Edward V. Frenkel. Affine Kac-Moody algebras and semi-infinite flag manifolds. *Comm. Math. Phys.*, Vol. 128, No. 1, pp. 161–189, 1990.

[FF92] Boris Feigin and Edward Frenkel. Affine Kac-Moody algebras at the critical level and Gel′fand-Dikiĭ algebras. In *Infinite analysis, Part A, B (Kyoto, 1991)*, Vol. 16 of *Adv. Ser. Math. Phys.*, pp. 197–215. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1992.

[FG04] Edward Frenkel and Dennis Gaitsgory. D-modules on the affine Grassmannian and representations of affine Kac-Moody algebras. *Duke Math. J.*, Vol. 125, No. 2, pp. 279–327, 2004.

[FG05] Edward Frenkel and Dennis Gaitsgory. Localization of $\widehat{\mathfrak{g}}$-modules on the affine grassmannian. *preprint*, 2005. math.RT/0512562.

[FG07a] Edward Frenkel and Dennis Gaitsgory. Local geometric langlands correspondence: the spherical case. *preprint*, 2007. arXiv:0711.1132v1 [math.QA].

[FG07b] Edward Frenkel and Dennis Gaitsgory. Weyl modules and opers without monodromy. *preprint*, 2007. arXiv:0706.3725v2[math.QA].

[FH91] William Fulton and Joe Harris. *Representation theory*, Vol. 129 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991. A first course, Readings in Mathematics.

[FMS86] Daniel Friedan, Emil Martinec, and Stephen Shenker. Conformal invariance, supersymmetry and string theory. *Nuclear Phys. B*, Vol. 271, No. 1, pp. 93–165, 1986.

[Fre05] Edward Frenkel. Wakimoto modules, opers and the center at the critical level. *Adv. Math.*, Vol. 195, No. 2, pp. 297–404, 2005.

[GM04] V. Gorbounov and F. Malikov. The chiral de Rham complex and positivity of the equivariant signatures of some loop spaces. *Manuscripta Math.*, Vol. 113, No. 3, pp. 359–370, 2004.

[GMS01] Vassily Gorbounov, Fyodor Malikov, and Vadim Schechtman. On chiral differential operators over homogeneous spaces. *Int. J. Math. Math. Sci.*, Vol. 26, No. 2, pp. 83–106, 2001.

[GMS04] Vassily Gorbounov, Fyodor Malikov, and Vadim Schechtman. Gerbes of chiral differential operators. II. Vertex algebroids. *Invent. Math.*, Vol. 155, No. 3, pp. 605–680, 2004.

[Hay88] Takahiro Hayashi. Sugawara operators and Kac-Kazhdan conjecture. *Invent. Math.*, Vol. 94, No. 1, pp. 13–52, 1988.

[Kac74] V. G. Kac. Infinite-dimensional Lie algebras, and the Dedekind η-function. *Funkcional. Anal. i Priložen.*, Vol. 8, No. 1, pp. 77–78, 1974.

[Kac90] Victor G. Kac. *Infinite-dimensional Lie algebras*. Cambridge University Press, Cambridge, third edition, 1990.

[Kac98] Victor Kac. *Vertex algebras for beginners*, Vol. 10 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 1998.

[KT95] Masaki Kashiwara and Toshiyuki Tanisaki. Kazhdan-Lusztig conjecture for affine Lie algebras with negative level. *Duke Math. J.*, Vol. 77, No. 1, pp. 21–62, 1995.

[KT96] Masaki Kashiwara and Toshiyuki Tanisaki. Kazhdan-Lusztig conjecture for affine Lie algebras with negative level. II. Nonintegral case. *Duke Math. J.*, Vol. 84, No. 3, pp. 771–813, 1996.

[KT98] Masaki Kashiwara and Toshiyuki Tanisaki. Kazhdan-Lusztig conjecture for symmetrizable Kac-Moody Lie algebras. III. Positive rational case. *Asian J. Math.*, Vol. 2, No. 4, pp. 779–832, 1998. Mikio Sato: a great Japanese mathematician of the twentieth century.

[KT00] Masaki Kashiwara and Toshiyuki Tanisaki. Characters of irreducible modules with non-critical highest weights over affine Lie algebras. In *Representations and quantizations (Shanghai, 1998)*, pp. 275–296. China High. Educ. Press, Beijing, 2000.

[Ku89] Jong Min Ku. Structure of the Verma module $M(-\rho)$ over Euclidean Lie algebras. *J. Algebra*, Vol. 124, No. 2, pp. 367–387, 1989.

[Li96] Hai-Sheng Li. Local systems of vertex operators, vertex superalgebras and modules. *J. Pure Appl. Algebra*, Vol. 109, No. 2, pp. 143–195, 1996.

[Lus80] George Lusztig. Hecke algebras and Jantzen's generic decomposition patterns. *Adv. in Math.*, Vol. 37, No. 2, pp. 121–164, 1980.

[MSV99] Fyodor Malikov, Vadim Schechtman, and Arkady Vaintrob. Chiral de Rham complex. *Comm. Math. Phys.*, Vol. 204, No. 2, pp. 439–473, 1999.

[Wak86] Minoru Wakimoto. Fock representations of the affine Lie algebra $A_1^{(1)}$. *Comm. Math. Phys.*, Vol. 104, No. 4, pp. 605–609, 1986.

[Wit07] Edward Witten. Two-dimensional models with $(0,2)$ supersymmetry: perturbative aspects. *Adv. Theor. Math. Phys.*, Vol. 11, No. 1, pp. 1–63, 2007.

[Zhu96] Yongchang Zhu. Modular invariance of characters of vertex operator algebras. *J. Amer. Math. Soc.*, Vol. 9, No. 1, pp. 237–302, 1996.

〒 630-8506 奈良県奈良市北魚屋西町奈良女子大学理学部数学科
E-mail address: arakawa@cc.nara-wu.ac.jp