頂点作用素代数における, 符号・格子との類似について

島倉 裕樹 (Hiroki SHIMAKURA)

愛知教育大学 数学教育講座
Department of Mathematics,
Aichi University of Education
e-mail: shima@auecc.aichi-edu.ac.jp

序

頂点作用素代数とは代数的な対象物であるが, 組合せ論的な対象物との関連も深い. 本稿では, 頂点作用素代数における, 符号・格子との対応や類似の性質を紹介する. 特に, 最小重みに関する類似の定理を紹介し, 格子と頂点作用素代数の構成法における対応と類似の性質について述べる. また, 頂点作用素代数の自己同型群の研究においても格子と深い繋がりがあることを述べ, ある種の符号・格子・頂点作用素代数の系列における自己同型群の対応について述べる.

1 符号, 格子と頂点作用素代数

本章では符号, 格子, 頂点作用素代数に関する定義や基本的な事実について述べ, 概念, 性質や具体例における類似を見る.

本稿で述べた符号や格子に関する結果や例は [CS99] で見つけることが出来る. また, 頂点作用素代数の基本的な定義等については [FLM88, FHL93, MN99] を参照せよ.

1.1 (二元線形) 符号

$\mathbb{F}_2$ 上の n 次元ベクトル空間 $\mathbb{F}_2^n$ の基底を一つ固定し, それによる座標表示を考える. $\mathbb{F}_2^n$ 上には内積 $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \mod 2$ がある. $\mathbb{F}_2^n$ の元 $x = (x_i)$ の**重さ (weight)** とは $\mathrm{wt}(x) = |\{i \mid x_i \neq 0\}|$ である. $\mathbb{F}_2^n$ の部分空間を**長さ (length)** n の (二元線形) **符号 (code)** という. 符号 $\mathcal{C}$ の**最小重み (minimum weight)** とは $\mu(\mathcal{C}) = \min\{\mathrm{wt}(x) \mid x \in \mathcal{C} \setminus \{0\}\}$ である. 符号 $\mathcal{C}$ の **双対符号 (dual code)** $\mathcal{C}^\perp$ とは直交補空間 $\mathcal{C}^\perp = \{x \in \mathbb{F}_2^n \mid \langle x, y\rangle = 0,\ \forall y \in \mathcal{C}\}$ のことをいう. $\mathcal{C}$ が**重偶 (doubly even)** であるとは $\mathcal{C}$ の任意の元 x が $\mathrm{wt}(x) \in 4\mathbb{Z}$ を満たすことをいい, **自己双対 (self-dual)** とは $\mathcal{C} = \mathcal{C}^\perp$ を満たすことをいう. 符号 $\mathcal{C}$ の自己同型とは基底の置換として作用する n 次対称群の元で $\mathcal{C}$ を保つものであり, これらが成す自己同型群を $\mathrm{Aut}(\mathcal{C})$ と書く. 長さ n の符号 $\mathcal{C}$ の**重み多項式 (weight enumerator)** とは $W_{\mathcal{C}}(X, Y) = \sum_{c \in \mathcal{C}} X^{\mathrm{wt}(c)} Y^{n-\mathrm{wt}(c)}$ である.

これ以降, 主に doubly even self-dual 符号を考える. 例えば, 次の符号が doubly even self-dual と知られている.

例 1.1. (1) (拡張) ハミング符号 H_8 は長さ 8 の *doubly even self-dual* 符号である.

(2) (拡張) ゴレイ符号 G_{24} は長さ 24 の *doubly even self-dual* 符号で最小重み 8 である.

また, 次の定理が知られている.

定理 1.2. $\mathcal{C}$ を長さ n の *doubly even self-dual* 符号とする.

(1) (cf. [Gl71]) $W_{\mathcal{C}}(X,Y)$ は

$$G = \langle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{pmatrix} \rangle$$

による作用で不変であり, $W_{\mathcal{C}}(X,Y) \in \mathbb{C}[W_{H_8}(X,Y), W_{G_{24}}(X,Y)]$.

(2) [MS73] $\mathcal{C}$ の最小重みについて次が成り立つ.

$$\mu(\mathcal{C}) \leq 4\lfloor \frac{n}{24} \rfloor + 4.$$

(3) 長さ n の *doubly even self-dual* 符号が存在するための必要十分条件は $n \in 8\mathbb{Z}$.

(2) において等号が成立する場合を**極値的 (extremal)** という. 長さが 24, 48 の extremal doubly even self-dual 符号に関して, 次のような結果がある.

事実 1.3. (i) 長さ 24 の *extremal doubly even self-dual* 符号はゴレイ符号と同値である.

(ii) ゴレイ符号の自己同型群は散在型有限単純群の一つ *Mathieu* 群 M_{24} と同型である.

(iii) [HLTP03] 長さ 48 の *extremal doubly even self-dual* 符号は長さ 48 の *extended quadratic residue code* と同値である.

注意 1.4. (1) 長さ 72 の extremal doubly even self-dual 符号の存在・非存在は未解決.

(2) 長さ 32 以下の doubly even self-dual 符号は分類されている.

1.2 格子

$\mathbb{R}$ 上の n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ を考え, $\langle , \rangle$ で内積を表す. $v \in \mathbb{R}$ に対して, $\langle v, v \rangle$ を v の**ノルム (norm)** と言う. $L \subset \mathbb{R}^n$ が**階数 (rank)** n の**格子 (lattice)** であるとは, ある $\mathbb{R}^n$ の基底 $\{e_i\}$ があって $L = \oplus_{i=1}^n \mathbb{Z}e_i$ と書けることである. 格子 L の**最小ノルム (minimum norm)** とは $\mu(L) = \min\{\langle v, v \rangle \mid v \in L \setminus \{0\}\}$ である. 格子 L の**双対格子 (dual lattice)** L^* とは $L^* = \{w \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, w \rangle \in \mathbb{Z}\ \forall v \in L\}$ である. 格子 L が**偶 (even)** とは L の任意の元のノルムが偶数であることをいい, **ユニモジュラ (unimodular)** とは $L = L^*$ を満たすことをいう. 格子 L の自己同型とは $\mathbb{R}^n$ の直交変換で L を保つものであり, これらが成す自己同型群を $\mathrm{Aut}(L)$ と書く. L の**テータ級数 (theta series)** とは $\Theta_L(q) = \sum_{v \in L} q^{\langle v, v \rangle/2}$ であり, $q = e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$, $\tau \in \mathbb{H}$ とみて, 上半平面 $\mathbb{H}$ 上の関数と見ることもある.

これ以降, 主に even unimodular 格子を考える. 例えば, 次の格子が even unimodular と知られている.

例 1.5. (1) ルート格子である E_8 格子は階数 8 の *even unimodular* 格子である.

(2) リーチ格子 Λ は階数 24 の *even unimodular* 格子で最小ノルムは 4 である.

これら格子が符号から構成されることを次章で見る. また, 次の定理が知られている.

定理 1.6. L を階数 n の *even unimodular* 格子とする.

(1) $\Theta_L(q)$ は *weight* $n/2$ の $SL(2, \mathbb{Z})$ に関する保型形式であり, $\Theta_L(q) \in \mathbb{C}[\Theta_{E_8}(q), \Theta_\Lambda(q)]$.

(2) [MOS75] L の最小ノルムについて次が成り立つ.

$$\mu(L) \leq 2\lfloor \frac{n}{24} \rfloor + 2.$$

(3) 階数 n の *even unimodular* 格子が存在するための必要十分条件は $n \in 8\mathbb{Z}$.

(2) において等号が成り立つ場合を**極値的 (extremal)** という. 階数 24 の extremal even unimodular 格子に関して次の結果がある.

定理 1.7. (i) [Co69a] 階数 24 の *extremal even unimodular* 格子はリーチ格子 Λ と同型である.

(ii) [Co69b] $\mathrm{Aut}(\Lambda)/\langle -1 \rangle$ は散在型有限単純群の一つである *Conway* 群 Co_1 と同型である.

注意 1.8. (1) 階数 48 の extremal even unimodular 格子は非同型なものが 3 個知られているが, 分類は未解決である.

(2) 階数 72 の extremal even unimodular 格子の存在・非存在は未解決である.

(3) 階数が 24 以下の even unimodular 格子は分類されている.

1.3 頂点作用素代数

定義 1.9. [Bo86, FLM88] **頂点作用素代数 (vertex operator algebra)**[1] とは $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-次数付き $\mathbb{C}$ 上の線形空間 $V = \oplus_{i=0}^{\infty} V_i$, 線形写像

$$\begin{array}{rccl} Y: & V & \to & (\mathrm{End} V)[[z, z^{-1}]], \\ & v & \mapsto & Y(v,z) = \displaystyle\sum_{i \in \mathbb{Z}} v_i z^{-i-1}, \end{array}$$

真空元 (vacuum vector) と呼ばれる $\mathbf{1}_V \in V_0$ と **ヴィラソロ元 (Virasoro element)** と呼ばれる $\omega \in V_2$ の四つ組 $(V, Y, \mathbf{1}_V, \omega)$ で次の公理を満たすものである.

(V1) $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $\dim V_p < \infty$.

(V2) $a, b \in V$ に対して, ある $p_0 \in \mathbb{Z}$ が存在して $a_p b = 0$ $(p > p_0)$ を満たす.

(V3) $v \in V$ に対して $Y(v,z)\mathbf{1}_V \in v + Vz[[z]]$.

(V4) **(Borcherds identity)** $a, b, v \in V$, $p, q, r \in \mathbb{Z}$ に対して次が成り立つ.

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{p}{i} (a_{r+i} b)_{p+q-i} v = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{r}{i} \Big(a_{p+r-i}(b_{q+i} v) - (-1)^r b_{q+r-i}(a_{p+i} v) \Big).$$

(V5) $L(p) = \omega_{p+1}$ と置くと, 次を満たす**中心電荷 (central charge)** $n \in \mathbb{C}$ が存在する.

$$[L(p), L(q)] = (p-q)L(p+q) + \frac{p^3 - p}{12} \delta_{p+q,0} n.$$

(V6) $v \in V_p$ に対して $L(0)v = pv$.

[1]略して VOA と書く.

(V7) $v \in V$ に対して

$$\frac{d}{dz}Y(v,z) = Y(L(-1)v, z).$$

本稿では次の性質を満たす VOA のみを扱う.

- $V_0 = \mathbb{C}\mathbf{1}$ を満たす (**CFT 型**).
- V は**単純 (simple)**, すなわち V のイデアルは $\{0\}$ と V.
- V が **C_2-余有限 (C_2-cofinite)**[2], すなわち $\dim(V/\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{a_{-2}b \mid a, b \in V\}) < \infty$.

また, VOA の加群を定義することが出来る ([FHL93]). ここでは, 既約 V-加群の同型類全体の集合を S_V と表すことにする. 任意の V-加群が完全可約になるときに V が**有理的 (rational)** という. 有理的な VOA V が**正則 (holomorphic)** であるとは V の既約加群が同型を除いて V 自身のみ, すなわち S_V が V の同型類のみ, のことを言う. また, 加群の三つ組 $W^1, W^2, W \in S_V$ に対して, intertwining operator と呼ばれるある種の性質を満たす写像 $W^1 \to \mathrm{Hom}(W^2, W)\{\{z\}\}$ の張る線形空間の次元を**分岐則 (fusion rules)** といい, N_{W^1,W^2}^{W} と表す (詳細は [FHL93] 参照).

V_ω でヴィラソロ元 ω が生成する部分 VOA を表すことにする. V の**最小重み (minimum weight)** を $\mu(V) = \min\{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid V_m/(V_\omega)_m \neq 0\}$ で定義[3]する ([Hö95]). $g \in \mathrm{GL}(V)$ が $gY(v,z)g^{-1} = Y(gv, z)$ $\forall v \in V$ と $g\omega = \omega$ を満たすとき V の自己同型といい, これらが成す自己同型群を $\mathrm{Aut}(V)$ で表す. V の**指標 (character)** とは $\mathrm{ch}(V) = q^{-n/24}\sum_{m=0}^{\infty}\dim(V_m)q^m$ であり, $q = e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$, $\tau \in \mathbb{H}$ とみて, 上半平面 $\mathbb{H}$ 上の関数と見ることもある.

これ以後, 主に holomorphic VOA を考える. 例えば, 次の VOA が holomorphic と知られている.

例 1.10. (1) E_8-格子に付随する *VOA* V_{E_8} は中心電荷 8 の *holomorphic VOA* である.

(2) [FLM88] ムーンシャイン *VOA* $V^\natural$ は中心電荷 24 の *holomorphic VOA* である.

これら VOA が格子から構成されることを次章で見る. また次の定理が知られている.

定理 1.11. [Hö95] V を中心電荷 n の (C_2-余有限な) *holomorphic VOA* とする.

(1) (cf.[Zh96]) $\mathrm{ch}(V)$ は上半平面上の関数とみて, $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ の部分群 $\langle T^3, S\rangle$ の作用で不変であり, $\mathrm{ch}(V) \in \mathbb{C}[\mathrm{ch}(V_{E_8}), \mathrm{ch}(V^\natural)]$ である[4]. ただし

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) V の最小重みについて次が成り立つ.

$$\mu(V) \leq \lfloor \frac{n}{24} \rfloor + 1.$$

(3) 中心電荷 n の C_2-余有限な正則 *VOA* が存在するための必要十分条件は $n \in 8\mathbb{Z}$.

(2) において等号が成り立つ時に **極値的 (extremal)** といい, 中心電荷 24 の extremal holomorphic VOA に対して, 次の結果がある.

定理 1.12. (i) $V^\natural$ は中心電荷 24 の *extremal holomorphic VOA* である.

[2]技巧的な条件に見えるが, VOA の理論において非常に重要な役割を果たす (cf. [Zh96]).
[3]$\omega \in V_2 \neq 0$ であるため, 単に $V_m \neq 0$ となる最小 $m(> 0)$ では具合が悪い.
[4]対比のための表記である. 実際は $\mathrm{ch}(V_{E_8})^3 - 744 = \mathrm{ch}(V^\natural)$ より, $\mathbb{C}[\mathrm{ch}(V_{E_8}), \mathrm{ch}(V^\natural)] = \mathbb{C}[\mathrm{ch}(V_{E_8})]$.

表 1: 符号, 格子, VOA における対応

符号	格子	VOA
長さ	階数	中心電荷
doubly even code	even lattice	VOA
self-dual	unimodular	holomorphic
重み多項式	テータ級数	指標
$\mathcal{C}^{\perp}/\mathcal{C}$	L^*/L	S_V
$\mu(\mathcal{C}) \le 4\lfloor \frac{n}{24} \rfloor + 4$	$\mu(L) \le 2\lfloor \frac{n}{24} \rfloor + 2$	$\mu(V) \le \lfloor \frac{n}{24} \rfloor + 1$
Hamming 符号 H_8	E_8-格子	E_8 に付随する VOA V_{E_8}
ゴレイ符号 G_{24}	リーチ格子 Λ	ムーンシャイン VOA $V^{\natural}$
Mathieu 群 M_{24}	Conway 群 Co_1	Monster $\mathbb{M}$

(ii) [FLM88] $V^{\natural}$ の自己同型群は散在型有限単純群の一つである *Monster* $\mathbb{M}$ と同型.

注意 1.13. (1) 中心電荷 24 の extremal holomorphic VOA は $V^{\natural}$ と同型と予想されている ([FLM88]).

(2) 中心電荷が 48 の extremal holomorphic VOA の存在・非存在は未解決.

(3) [DM04] 中心電荷 16 以下の holomorphic VOA は分類されている.

1 章で述べた符号, 格子, VOA における対応を表 1 にまとめた. 特に, S_V は holomorphic の時に $|S_V| = 1$ となることから, L^*/L や $C^{\perp}/C$ に対応する.

2 構成法における対応と類似の性質

本章では, 符号から格子, 格子から VOA を作る構成法について述べる. そして, これら構成法における対応と最小重みや最小ノルムに関する類似の性質を見る.

2.1 符号を用いた格子の構成法

本節では, 符号から格子を構成する方法を紹介する. 詳しい内容は [CS99] を参照せよ.
長さ n の符号 $\mathcal{C}$ から得られる次の三つの格子を考える.

$$
\begin{aligned}
A_2(C) &:= \frac{1}{\sqrt{2}}\{(v_i) \in \mathbb{Z}^n \mid (v_i) \mod 2 \in C\} \subset \mathbb{R}^n, \\
B_2(C) &:= \frac{1}{\sqrt{2}}\{(v_i) \in \mathbb{Z}^n \mid (v_i) \mod 2 \in C, \ \sum v_i \in 4\mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}^n, \\
L_2(C) &:= \begin{cases} B_2(C) + \mathbb{Z}\frac{1}{2\sqrt{2}}(1,1,\ldots,1) & n \in 16\mathbb{Z}, \\ B_2(C) + \mathbb{Z}\frac{1}{2\sqrt{2}}(-3,1,1,\ldots,1) & n \in 16\mathbb{Z}+8. \end{cases}
\end{aligned}
$$

ただし, $L_2(C)$ は $n \in 8\mathbb{Z}$ の場合のみ考える.
これらの格子に対して, 次が成り立つ.

命題 2.1. $\mathcal{C}$ を長さ n の *doubly even* 符号とする.

(1) $A_2(C)$, $B_2(C)$ と $L_2(C)$ は階数 n の *even lattice.*

(2) C が *self-dual* ならば $A_2(C)$ と $L_2(C)$ は *unimodular*.

(3) $\mu(A_2(C)) = 2$.

(4) $n \geq 2$ かつ $\mu(C) \geq 8$ ならば $\mu(B_2(C)) = 4$.

(5) $n \geq 24$ かつ $\mu(C) \geq 8$ ならば $\mu(L_2(C)) = 4$.

注意 2.2. $A_2(H_8) \cong E_8$ であり, $L_2(G_{24}) \cong \Lambda$ である.

2.2 格子を用いた頂点作用素代数の構成法

本節では格子から得られる頂点作用素代数を三つ述べる. その上で, 最小重みに関して前節と類似の性質が成り立つことを述べる. 構成法の詳細については [FLM88] を参照せよ.

L を階数 n の偶格子とする. 線形空間 $\mathfrak{h} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} L$ を可換リー代数と見て, 付随するアフィンリー環 $\hat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K$ を考える. そして $\hat{\mathfrak{h}}$ の部分環 $\hat{\mathfrak{h}}^- = \mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{C}} t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$ の対称代数を $S(\hat{\mathfrak{h}}^-)$ とする. また $\mathbb{C}[L]$ で L の群環を表すとする.

命題 2.3. [Bo86, FLM88] $V_L = S(\hat{\mathfrak{h}}^-) \otimes \mathbb{C}[L]$ は *VOA* 構造を持つ.

この VOA V_L は偶格子 L に付随する**格子頂点作用素代数 (lattice VOA)** と呼ばれる. この VOA が前節で述べた格子 $A_2(\mathcal{C})$ に対応することを後の命題で見る.

前節で述べた格子 $B_2(\mathcal{C})$ に対応する VOA を得るために, V_L の部分 VOA を考えよう. $-1 \in \mathrm{Aut}(L)$ の持ち上げ $\theta \in \mathrm{Aut}(V_L)$ を取る[5]. すると, その固定部分空間 $V_L^+ = \{v \in V_L^+ \mid \theta(v) = v\}$ は部分 VOA となる.[6] このような位数 2 の自己同型群の固定点として得られた部分 VOA は **$\mathbb{Z}_2$-軌道体模型 ($\mathbb{Z}_2$-orbifold model)** と呼ばれる. この V_L^+ が $B_2(\mathcal{C})$ に対応する VOA であることを後の命題で見る.

さて, ここから L は unimodular と仮定する. そして, 整数の重さを持つ twisted 型の V_L^+-既約加群 $V_L^{T,+}$ を考える.[7]

命題 2.4. [FLM88, DGM90, Hu96] L を *even unimodular* 格子とする. V_L^+ が有理的かつ $V_L^{T,+}$ 上の不変内積が対称的と仮定する. このとき $\tilde{V}_L = V_L^+ \oplus V_L^{T,+}$ は *VOA* 構造を持つ.

このような VOA の位数 2 の自己同型での固定点の拡大として別の VOA を得る構成法は **$\mathbb{Z}_2$-軌道体構成法 ($\mathbb{Z}_2$-orbifold construction)** と呼ばれる. そして, 前節で述べた格子 $L_2(\mathcal{C})$ に対応する VOA である.

ここまでで見た格子から得られる三つの VOA に対して, 次の性質が成り立つ.

命題 2.5. L を階数 n の *even* 格子とする. ($\tilde{V}_L$ を考える際には命題 2.4 の設定を考える.)

(1) V_L, V_L^+, $\tilde{V}_L$ は中心電荷 n の *VOA*.

(2) L が *unimodular* ならば V_L と $\tilde{V}_L$ は *holomorphic*.

(3) $\mu(V_L) = 1$.

(4) $n \geq 2$ かつ $\mu(L) \geq 4$ ならば $\mu(V_L^+) = 2$.

---

[5] $1 \to \mathrm{Hom}(L, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H \to \mathrm{Aut}(L) \to 1$ という完全系列を持つ $\mathrm{Aut}(V_L)$ の部分群 H がある. そして $-1 \in \mathrm{Aut}(L)$ の逆像の中から θ を選ぶのである.

[6] θ の取り方は一意ではないが, V_L^+ は同型を除いて一意に決まる ([DGH98]).

[7] twisted 型とは, 既約 θ-twisted V_L-加群から得られる既約 V_L^+-加群のことである. L が unimodular であることから, twisted 型の既約 V_L^+-加群の同型類は二つあり, 一つが整数の重さを持ち, もう一つは半整数の重さをもつ.

表 2: 符号から格子, 格子から VOA の構成法における対応

符号から格子	格子から VOA
$A_2(\mathcal{C})$	V_L
$E_8 \cong A_2(H_8)$	V_{E_8}
$B_2(\mathcal{C})$	V_L^+
$L_2(\mathcal{C})$	$\tilde{V}_L = V_L^+ \oplus V_L^{T,+}$
$\Lambda \cong L_2(G_{24})$	$V^\natural = \tilde{V}_\Lambda$

(5) $n \geq 24$ かつ $\mu(L) \geq 4$ ならば $\mu(\tilde{V}_L) = 2$.

この命題は命題 2.1 の類似であることは明らかであろう.

注意 2.6. リーチ格子 Λ に対して, $V^\natural = \tilde{V}_\Lambda$ である.

この注意は注意 2.2 と対応していることは明らかであろう. 以上の命題・注意での対応から, 表 2 のような構成法における対応を得る.

3 V_L^+ の自己同型群

前節までで, 符号・格子と VOA の性質の類似や, 符号から格子, 格子から VOA の構成法における対応を見た. そして, これら類似からアイデアを得て, VOA の研究に応用することが出来る. 本章では, 特に VOA V_L^+ の自己同型群の研究への応用 ([Sh04, Sh06]) について述べる.

3.1 VOA の自己同型群の計算におけるアイデア

本節では [Sh04, Sh06] で得た VOA の自己同型群の計算におけるアイデアを述べる.

格子 L の自己同型群 $\mathrm{Aut}(L)$ は双対格子 L^* を保つ. よって $\mathrm{Aut}(L) \to \mathrm{Aut}(L^*/L)$ という群準同型を得ることが出来, この核と像を見ることで $\mathrm{Aut}(L)$ についての情報を得ることが出来る.

この手法に対応する VOA V の自己同型群 $\mathrm{Aut}(V)$ の研究方法は次の通りである. まず, L^*/L に対応する対象物は既約加群の同型類全体の集合 S_V であった. そして V の S_V への (左) 作用は次の様に与えられる (cf. [DM97]). $g \in \mathrm{Aut}(V)$ と既約 V-加群 (M, Y_M) に対して, $Y_{g\circ M}(v,z) = Y_M(g^{-1}v, z)$ と定義すると, $g \circ M = (M, Y_{g\circ M})$ は既約 V-加群である. この作用によって, $\mathrm{Aut}(V)$ から S_V 上の置換群への群準同型が得られる. この作用は指標と fusion rule を保つことに注意しておく. 特に, V が C_2-余有限な有理的 VOA の時には, fusion rule が有限になるため, 積を $W_1 \times W_2 = \sum_{W\in S_V} N_{W_1,W_2}^W W$ とすることで $\oplus_{W\in S_V}\mathbb{Z}W$ 上に可換環構造が入る. ゆえに $\mathrm{Aut}(V) \to \mathrm{Aut}(\oplus_{W\in S_V}\mathbb{Z}W; S_V)$ という群準同型を得ることが出来る. ただし, $\mathrm{Aut}(\oplus_{W\in S_V}\mathbb{Z}W; S_V)$ は S_V を保つような $\mathrm{Aut}(\oplus_{W\in S_V}\mathbb{Z}W)$ の部分群である. この核と像を見ることで $\mathrm{Aut}(V)$ についての情報を得ることが出来る.

3.2 V_L^+ の自己同型群の研究における格子との関係

本節では [Sh04, Sh06] で得られた, 自己同型群の視点から見た V_L^+ と格子に関する結果を述べる.

L を偶格子として, V_L^+ を V_L から $\mathbb{Z}_2$-軌道体模型として得られる VOA とする. V_L^+ は $\theta \in \mathrm{Aut}(V_L)$ の固定点として得られるため, $C_{\mathrm{Aut}(V_L)}(\theta)$ が V_L^+ へ作用し, $C_{\mathrm{Aut}(V_L)}(\theta)/\langle\theta\rangle$ が忠実に V_L^+ へ作用することがわかる. そこで得られる自然な問題は次の通りである.

問題 3.1. $C_{\mathrm{Aut}(V_L)}(\theta)/\langle\theta\rangle \subsetneq \mathrm{Aut}(V_L^+)$ となる偶格子 L は何か？

これに対して, 得られた答えは次の通りである.

定理 3.2. [Sh04, Sh06] $C_{\mathrm{Aut}(V_L)}(\theta)/\langle\theta\rangle \subsetneq \mathrm{Aut}(V_L^+)$ となるための必要十分条件は $L \cong B_2(\mathcal{C})$ または E_8 格子と同型である.

$L \cong B_2(\mathcal{C})$ となることと V_L^+ が $\mathrm{Aut}(V_L)$ から誘導されない自己同型を持つことがほぼ対応しあっている事実は, 表 2 の対応と合致しており興味深い.

この定理を証明する際に次の様な格子の特徴づけを得ている.

定理 3.3. [Sh06] L を階数 n の偶格子とする. $L \cong B_2(\mathcal{C})$ となるための必要十分条件は $\exists\lambda \in L^* \cap L/2$ $s.t.$ $|\{v \in \lambda + L \mid \langle v, v\rangle = 2\}| = 2n + |\{w \in L \mid \langle w, w\rangle = 2\}|$.

この特徴づけは VOA の研究から得られたものであり, 格子に対する結果を VOA の視点から得られた点が面白い.

[Sh04, Sh06] では, 前節で述べた方法を用いて, $\mathrm{Aut}(V_L^+)$ の構造を決定する方法についても述べてある. そこでは, V_L^- の同型類を含みかつ fusion rule によって基本可換 2-群の構造が入る $S_{V_L^+}$ の部分集合 S を考え[8], 群準同型 $\mathrm{Aut}(V_L^+) \to \mathrm{GL}(S)$ を用いることで, より詳細な $\mathrm{Aut}(V_L^+)$ に関する情報を得ている. 前節で述べた可換環 $\oplus_{W\in S_V}\mathbb{Z}W$ の言葉で言い換えると, 部分環として, $\mathrm{Aut}(V_L^+)$ で保たれる群環 $\mathbb{Z}[S]$ を見つけ, $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}[S]; S)$ への群準同型を考えている. この手法の適用のために必要な情報のうち, $S_{V_L^+}$ は [DN99, AD04] において決定され, V_L^+ の fusion rule は [Ab01, ADL05] において完全に決定されたことを注意しておく. 次の節で, 一つだけ具体例を見る.

3.3 $\sqrt{2}E_8$ と $V_{\sqrt{2}E_8}^+$ の自己同型群

本節では, 格子 $\sqrt{2}E_8$ の自己同型群の計算方法と V_L^+ の自己同型群[9]の計算方法 ([Sh04]) を比較し, 類似点を見る.

まず, $L = \sqrt{2}E_8$ について考える. このとき $L^* = L/2$ であり, L^*/L は位数 2^8 の基本可換 2-群である. L^*/L 上には

$$q_L : L^*/L \to \mathbb{F}_2,\ v + L \mapsto \langle v, v\rangle \mod 2$$

というプラス型の二次形式があり, $\mathrm{Aut}(L)$ の作用で保たれる. ゆえに,

$$\mathrm{Aut}(L) \to O(L^*/L, q_L) \cong O^+(8, 2)$$

という群準同型写像が得られ, その核と像を計算することで $\mathrm{Aut}(L) \cong 2.O^+(8, 2)$ を得る.

次に $V = V_L^+$ を考える. このとき, $|S_V| = 2^{10}$ であり, fusion rule を用いて S_V 上に基本可換 2-群の構造を入れることができる. さらに S_V 上には

$$q_V(M) = \begin{cases} 0 & \text{if } M = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n, \\ 1 & \text{if } M = \oplus_{n\in\mathbb{Z}+1/2} M_n \end{cases}$$

というプラス型の二次形式を定義することが出来る.[10] $\mathrm{Aut}(V)$ の作用は指標を保つので, q_V を保つ. ゆえに

$$\mathrm{Aut}(V) \to O(S_V, q_V) \cong O^+(10, 2)$$

[8]任意の $W^1, W^2 \in S$ に対して, $N_{W^1,W^2}^{W^3} = 1$ となる $W^3 \in S$ が一意に定まるような部分集合 S を考える. すると $(W^1, W^2) \mapsto W^3$ によって S 上に群構造が入ることが確かめられる.

[9]$\mathrm{Aut}(V_{\sqrt{2}E_8}^+)$ は最初に [Gr98] で決定され, その後に [KM01] でも計算された. その両方の証明において, 3-transposition group の理論が用いられているため, [Sh04] の手法は本質的に異なる.

[10]L^*/L の元に対してノルムが $\mod 2\mathbb{Z}$ で一意に定まるが, 同様に S_V の元に対して同様に重さを考えると $\mod \mathbb{Z}$ で一意に定まる. すると q_V は q_L の類似と思える.

表 3: V^i, L^i と $\mathcal{C}^i$ の自己同型群

i	2	3	4	5
$\mathcal{C}^i$	$\{\mathbf{0}_4\}$	$\mathrm{RM}(0,3)$	$\mathrm{RM}(1,4)$	$\mathrm{RM}(2,5)$
$\mathrm{Aut}(\mathcal{C}^i)$	$2^2 : L_2(2)$	$O^+(6,2)$	$2^4 : L_4(2)$	$2^5 : L_5(2)$
L^i	$\sqrt{2}D_4$	$\sqrt{2}E_8$	BW_{16}	BW_{32}
$\mathrm{Aut}(L^i)$	$2_+^{1+4}.(L_2(2)\times L_2(2))$	$2.O^+(8,2)$	$2_+^{1+8}.\Omega^+(8,2)$	$2_+^{1+10}.\Omega^+(10,2)$
V^i	$V^+_{\sqrt{2}D_4}$	$V^+_{\sqrt{2}E_8}$	$V^+_{\mathrm{BW}_{16}}$	$\tilde{V}_{\mathrm{BW}_{32}}$
$\mathrm{Aut}(V^i)$	$2^6 : (L_3(2)\times L_2(2))$	$O^+(10,2)$	$2^{16}\cdot\Omega^+(10,2)$	$2^{27}.E_6(2)$

という群準同型が得られ, 核と像を計算することで $\mathrm{Aut}(V)\cong O^+(10,2)$ が得られる.

この $\mathrm{Aut}(V_L^+)$ の計算方法は $\mathrm{Aut}(L)$ の計算方法の類似であることは明らかであろう. このように, VOA の自己同型群の構造の研究においても, 格子との類似を考えることは非常に有効な手段の一つである.

3.4 モンスターへの応用

本節では, V_L^+ の自己同型群を用いたモンスターのいくつかの部分群の記述について述べる.

ムーンシャイン VOA $V^\natural$ は V_Λ^+ というリーチ格子 Λ から得られる VOA を含んでいる. ゆえに, Λ の部分格子 L に対して, $V^\natural$ は V_L^+ を含むことになる. このことを利用して, モンスターのいくつかの部分群が V_L^+ を用いて記述される.

定理 3.4. [Sh07] *E をモンスター $\mathbb{M}$ の基本可換 2-部分群で, 正規化群 $N_{\mathbb{M}}(E)$ が $\mathbb{M}$ の極大 2-局所部分群になるとする. さらに E がモンスターにおける共役類 $2B$ の元を含むとする. このとき, あるリーチ格子の階数 24 の部分格子 L または $L_1\perp L_2$ が存在して,*

$$N_{\mathbb{M}}(E)/E\cong\{g\in H\mid g\circ S=S\}$$

となる. ただし $H=\mathrm{Aut}(V_L^+)$ または $\mathrm{Aut}(V_{L_1}^+\otimes V_{L_2}^+)$ であり, S は $V^\natural$ の V_L^+ または $V_{L_1}^+\otimes V_{L_2}^+$ の既約加群としての分解として現れる同型類の集合である.

この定理の仮定に当てはまる極大 2-局所部分群は 7 個のうちの 5 個であり, [Sh07] ではそれぞれに対して具体的に L を記述している.

4 符号, 格子, VOA の自己同型群の対応

筆者の最近の研究 [Sh] において表 3 にあるような符号の列 $\mathcal{C}^i$, 格子の列 L^i と VOA の列 V^i を考えた.[11] 本章では, これらの系列が類似の性質を持ち, 対応があることを述べる. その上で, 自己同型群[12]には ADE 型のシュバレイ群がそれぞれ符号, 格子, VOA の自己同型群に現れる[13]ことを見る. ただし $\mathrm{RM}(r,n)$ は長さ 2^n の r-order Reed-Muller 符号, BW_{2^n} は階数 2^n の Barnes-Wall 格子[14]である. これら符号と格子の詳細は [CS99] を参照せよ.

[11] [Sh] では $i=0,1$ も含めて研究しているが, "良い" 自己同型群が現れないため, 本稿では省略する. また, [Sh] での主結果は V^5 の自己同型群を決定したことであり, 本章で述べる内容はそこから得られる観察である.

[12] V^i の自己同型群は $i=2,3,4,5$ それぞれに対して [MM00], [Gr98], [Sh04], [Sh] で決定されている.

[13] 極大正規基本可換 2-群による剰余群として現れる

[14] $\mathrm{BW}_4\cong D_4$, $\mathrm{BW}_8\cong E_8$ であるため, L^2 と L^3 はノルムを調節した Barnes-Wall 格子である.

表 4: $\mathcal{C}^i$ から L^i, L^i から V^i の構成法

i	2	3	4	5
$\mathcal{C}^i$ から L^i	$B_2(\mathcal{C}^2)$	$B_2(\mathcal{C}^3)$	$B_2(\mathcal{C}^4)$	$L_2(\mathcal{C}^5)$
L^i から V^i	$V_{L^2}^+$	$V_{L^3}^+$	$V_{L^4}^+$	$\tilde{V}_{L^5}$

4.1 $\mathcal{C}^i$ から L^i の構成法と L^i から V^i の構成法

表 4 の構成法で得られることがわかる. 確かに 2 章で見た対応がある.

4.2 $\mathcal{C}^i$ から $\mathcal{C}^{i+1}$ の構成法

$i \in \{2, 3, 4\}$ とする. まず $\mathcal{D}^i$ として, $\mathcal{C}^i$ を含み, 最小重みが 4 以上となる極大の $(\mathcal{C}^i)^\perp$ の偶部分符号を取るすると, 次が成り立つ.

命題 4.1. (1) $\mathcal{D}^2$ と $\mathcal{D}^4$ は一意に決まり, $\mathcal{D}^3$ は $\mathrm{Aut}(\mathcal{C}^3)$ の作用を除いて一意に決まる.

(2) $\mathcal{C}^{i+1} \cong \mathcal{C}^i \oplus \mathcal{C}^i + \{(d, d) \mid d \in \mathcal{D}^i\}$.

ここで K^i を $\mathrm{Aut}(\mathcal{C}^i)$ における $\mathcal{D}^i$ の固定部分群とする. すると $i = 3$ の場合にだけ K^i は $\mathrm{Aut}(\mathcal{C}^i)$ より真に小さくなり, $2^3 : L_3(2)$ という構造を持つ. $i = 5$ の場合は, $\mathcal{C}^5$ が自己双対なため $K^5 = \mathrm{Aut}(\mathcal{C}^5)$ と置く.

4.3 L^i から L^{i+1} の構成法

$i \in \{2, 3, 4\}$ とする. まず N^i として, L^i を含み, 全ての元が整数ノルムかつ最小ノルムが 2 以上となる極大の $(L^i)^*$ の部分格子をとる. すると, 次が成り立つ.[15]

命題 4.2. (1) N^2 と N^4 は一意に決まり, N^3 は $\mathrm{Aut}(L^3)$ の作用を除いて一意に決まる.

(2) (cf. [Gr05]) $L^{i+1} \cong L^i \perp L^i + \{(v, v) \mid v \in N^i\}$.

ここで G^i を $\mathrm{Aut}(L^i)$ における N^i の固定部分群とする. すると $i = 3$ の場合にだけ G^i は $\mathrm{Aut}(L^i)$ より真に小さくなり, $2_+^{1+6}.L_4(2)$ という構造を持つ. $i = 5$ の場合は L がユニモジュラであるため $G^5 = \mathrm{Aut}(L^5)$ とする.

4.4 V^i から V^{i+1} の構成法

$i \in \{2, 3, 4\}$ とする. まず S^i として, 次を満たす極大の S_{V^i} の部分集合をとる.

- S^i は fusion rule によって基本可換 2-群の構造を持つ.[16]
- $\forall M = \oplus_{m=0}^{\infty} M_{h+m} \in S^i \setminus \{V^i\}$, $M_h \neq 0$ に対して, $h \in \mathbb{Z}/2$, $h \geq 1$ を満たす[17].

[15] (2) は [Gr05] で与えられた Barnes-Wall 格子の再帰的な構成法から従う.

[16] 対応する符号, 格子の条件は $\mathcal{D}^i/\mathcal{C}^i$, N^i/L^i に可換群構造が入ることであり, 自動的に満たされている.

[17] S_V の元 $M = \oplus_{m=0}^{\infty} M_{h+m}$, $M_h \neq 0$ に対して, 重みを h と定義してやれば, S_V の元の最小重みが 1 以上の半整数と読み替えられる. これは, 命題 4.1 と 4.2 において対応する符号 (格子) の条件が重さ (ノルム) が偶数 (整数) で, 最小重み (最小ノルム) が 4 以上 (2 以上) であったことに丁度対応している.

表 5: K^i, G^i and H^i

i	2	3	4	5
$\mathcal{C}^i$	$\{\mathbf{0}_4\}$	$\mathrm{RM}(0,3)$	$\mathrm{RM}(1,4)$	$\mathrm{RM}(2,5)$
K^i	$2^2:L_2(2)$	$2^3:L_3(2)$	$2^4:L_4(2)$	$2^5:L_5(2)$
L^i	$\sqrt{2}D_4$	$\sqrt{2}E_8$	BW_{16}	BW_{32}
G^i	$2_+^{1+4}.(L_2(2)\times L_2(2))$	$2_+^{1+6}L_4(2)$	$2_+^{1+8}.\Omega^+(8,2)$	$2_+^{1+10}.\Omega^+(10,2)$
V^i	$V_{\sqrt{2}D_4}^+$	$V_{\sqrt{2}E_8}^+$	$V_{\mathrm{BW}_{16}}^+$	$\tilde{V}_{\mathrm{BW}_{32}}^+$
H^i	$2^6:(L_3(2)\times L_2(2))$	$2^{10}:L_5(2)$	$2^{16}\cdot\Omega^+(10,2)$	$2^{27}.E_6(2)$

表 6: $K^i/O_2(K^i)$, $G^i/O_2(G^i)$ と $H^i/O_2(H^i)$ のシュバレイ群の型

i	2	3	4	5
K^i	A_1	A_2	A_3	A_4
G^i	$A_1\times A_1$	A_3	D_4	D_5
H^i	$A_2\times A_1$	A_4	D_5	E_6

すると, 次が成り立つ.

命題 4.3. (1) S^2 と S^4 は一意に決まり, S^3 は $\mathrm{Aut}(V^3)$ の作用を除いて一意に決まる.

(2) $V^{i+1}\cong V^i\otimes V^i+\oplus_{M\in S^i}M\otimes M$.

ここで H^i を $\mathrm{Aut}(V^i)$ における S^i の固定部分群とする. すると $i=3$ の場合にだけ H^i は $\mathrm{Aut}(V^i)$ より真に小さくなり, $2^{10}:L_5(2)$ という構造を持つ. $i=5$ の場合は V^5 が正則であるため, $H^5=\mathrm{Aut}(V^5)$ とする.

4.5 $\mathcal{C}^i$, L^i, V^i における類似

ここまで得た命題 4.1, 4.2, 4.3 において, それぞれ (1), (2) が対応しあうことが見て取れる. また, $\mathcal{D}^i$, N^i, S^i の取り方についても対応しあうことがわかる. そして, 得た自己同型群 K^i, G^i, H^i をまとめて表 5 を得る.

さて, ここでこれら表から得られる自己同型群の対応を見てみよう. $K^i/O_2(K^i)$, $G^i/O_2(G^i)$, $H^i/O_2(H^i)$ のシュバレイ群の型をまとめた表 6 から これら符号・格子・VOA の系列において, 自己同型群が ADE 対応を与えていることが読み取れる. ゆえに, これらの系列の自己同型群の視点からも VOA が符号・格子の次の対象物であることがわかる.

注意 4.4. 表 5 では $i=5$ まで考えたが, 符号と格子については $\mathrm{RM}(i-3,i)$, $\frac{1}{\sqrt{2}^{\lfloor (i-4)/2\rfloor}}\mathrm{BW}_{2^i}$ を考えることで $i>5$ においても AD 型のシュバレイ群が無限系列として現れる. さらに,

$$\begin{aligned}\mathrm{RM}(\mathrm{i}-4,\mathrm{i}-1)\oplus\mathrm{RM}(\mathrm{i}-4,\mathrm{i}-1) &\subset \mathrm{RM}(i-3,i),\\ \frac{1}{\sqrt{2}^{\lfloor (i-5)/2\rfloor}}\mathrm{BW}_{2^{i-1}}\oplus\frac{1}{\sqrt{2}^{\lfloor (i-5)/2\rfloor}}\mathrm{BW}_{2^{i-1}} &\subset \frac{1}{\sqrt{2}^{\lfloor (i-4)/2\rfloor}}\mathrm{BW}_{2^i}\end{aligned}$$

を満たすことから, 命題 4.1 (2), 4.2 (2) と類似の性質が成り立つことがわかる. しかし $i>5$ では, これらは doubly even 符号や even 格子ではない. そして VOA において $i>5$ に対して対応するものを考えると, もはや VOA でなく, VOA とその加群の直和の上に代数構造[18]を持つもの, であると筆者は考えている. さらに $i=6$, $i=7$ の場合に, $E_7(2)$, $E_8(2)$ (の 2-群による拡大) が代数的構造を保つ自己同型群として現れることが期待される. しかし, まだまだ研究が必要である. これらに対応する符号と格子は具体的にわかっているため, そこを出発点として研究を進めていくつもりである.

5 今後の課題

本章では符号や格子の類似の視点から VOA における今後の課題について述べる.
まずは, 1 章で述べたように holomorphic VOA に関して次のような大きな問題がある.

(1) 中心電荷 24 の extremal holomorphic VOA の一意性 ($V^\natural$ の一意性).

(2) 中心電荷 24 の holomorphic VOA の分類.

(3) 中心電荷 48 の extremal holomorphic VOA の存在・非存在.

例えば, framed VOA [19]という仮定の下で (1) は [LY07] で解決されている. しかし, 現在知られている中心電荷 24 の holomorphic VOA は framed VOA だけなので, その条件を外して証明するにはまだまだ研究が必要と思われる. (2) は [Sc93] で 71 個存在することが予想されているが, 現在のところ lattice VOA とその $\mathbb{Z}_2$-軌道体構成法で得られる計 39 個しか実現されていない. (3) は符号や格子で考えられている問題に対応する自然な問題である.

階数 48 の extremal even unimodular 格子は 2.1 章の構成法を $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ ($k>2$) 上の符号へ拡張した構成法により実現されている[20]. また階数 24 の全ての even unimodular 格子も $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ ($k>2$) 上の符号から実現されている. ゆえに (2), (3) の解決のための一つの方針として次が思い浮かぶ.

(4) $k>2$ に対して, $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ 上の符号から格子を作る構成法に対応する "格子"[21] から VOA の構成法はあるか？

しかし, (4) に対する手がかりも全くないのが現状である.

1 章では最小重み (最小ノルム) の上限に関する類似の定理が成り立つことを述べた. また, ある種の符号, 格子に対して, それぞれブロックデザイン, 球面上のデザインが得られることが良く知られているが, これに対応する VOA を基にした conformal design が [Hö08] で提案されている. さらに, extremal な符号や格子からデザインが得られるという Assms-Mattson の定理の類似が VOA でも成り立つことが示されている. ゆえに, 他にも同様な事が起きてないか期待される.

(5) 符号・格子の性質や付随する対象物を VOA へ導入できないか？

4 章では $\mathbb{F}_2$ 上のシュバレイ群が現れる符号, 格子, VOA の系列について述べた. これらに関連する問題としては次がある.

(6) $\mathbb{F}_2$ 上のシュバレイ群 $E_7(2)$, $E_8(2)$ が自己同型群に現れる "VOA" を構成せよ. また, VOA の系列だけが $E_8(2)$ で止まる (べきである) 理由を見つけよ.

[18]例えば fusion rule を用いれば各既約加群の間に代数構造が入るが, 全体として積構造をどう決めればよいかがわからない.
[19]framed VOA については, 例えば [山内 06] を参照せよ.
[20]例えば $k=4,6$ では具体的に構成されている.
[21]整数環以外の環上の格子も考える必要かあるかもしれない.

(7) $\mathbb{F}_3$ 上のシュバレイ群が自己同型群として現れる VOA の系列を見つけよ.

(6) は注意 4.4 で述べた内容である. 特に, 4 章で述べたような方法をそのまま $i > 5$ に適用できないため, 拡張した理論が必要であると思われる.

本稿の内容は $\mathbb{F}_2$ 上の話であった. それを他の体上の話へ拡張できるかどうか考えるのは自然な発想である. 例えば $\mathbb{F}_3$ 上の話に現れる VOA は, 位数 3 の自己同型 τ で固定された VOA V_L^τ であると思われる. しかしながら, この VOA の既約加群の分類や fusion rule の決定等の表現論の研究が完全には完成されていない状況であるため, 3.1 節の手法を用いることができない. よって, 新しい自己同型群の決定方法の発見, または表現論の進展が待たれる状況である.

今まで見てきたように, 符号, 格子, VOA には類似の概念や対応があり, その視点から見てもまだまだ多くの問題が残されている. これら問題を解決するための一つの手法が, 他の対象物で有効な手法の類似を考えることであり, 今後の発展が期待される. 特に, 自己同型群においても実際にいくつもの対応があり, 興味深い有限群が多数現れている. これは有限群を研究する上ので新たな視点であり, 符号・格子・VOA と有限群との間のさらなる面白い対応の発見が期待される.

参考文献

[Ab01] T. Abe, Fusion rules for the charge conjugation orbifold, *J. Algebra*, **242** (2001), 624–655.

[AD04] T. Abe and C. Dong, Classification of irreducible modules for the vertex operator algebra V_L^+: General case, *J. Algebra*, **273** (2004), 657–685.

[ADL05] T. Abe, C. Dong and H. Li, Fusion rules for the vertex operator algebras $M(1)^+$ and V_L^+, *Comm. Math. Phys.* **253** (2005), 171–219.

[Bo86] R.E. Borcherds, Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster, *Proc. Nat'l. Acad. Sci. U.S.A,* **83** (1986), 3068–3071.

[Co69a] J.H. Conway, A characterisation of Leech's lattice, *Invent. Math.* **7** (1969) 137–142.

[Co69b] J.H. Conway, A group of order $8,315,553,613,086,720,000$, *Bull. London Math. Soc.* **1**, (1969) 79–88.

[CS99] J.H. Conway and N.J.A. Sloane, Sphere packings, lattices and groups, 3rd Edition, Springer, New York, 1999.

[DGM90] L. Dolan, P. Goddard and P. Montague, Conformal field theory, triality and the Monster group, *Phys. Lett. B* **236** (1990), 165–172.

[DGH98] C. Dong, R.L. Griess and G. Höhn, Framed vertex operator algebras, codes and the Moonshine module, *Comm. Math. Phys.* **193** (1998), 407–448.

[DM97] C. Dong and G. Mason, On quantum Galois theory, *Duke Math. J.* **86** (1997), 305–321.

[DM04] C. Dong and G. Mason, Holomorphic vertex operator algebras of small central charge, *Pacific J. Math.* **213** (2004), 253–266.

[DN99] C. Dong and K. Nagatomo, Representations of vertex operator algebra V_L^+ for rank one lattice L, *Comm. Math. Phys.* **202** (1999), 169–195.

[FHL93] I. Frenkel, Y. Huang, J. Lepowsky, On axiomatic approaches to vertex operator algebras and modules, Mem. Amer. Math. Soc. **104** 1993.

[FLM88] I. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, Vertex operator algebras and the Monster, Pure and Appl. Math., Vol.134, Academic Press, Boston, 1988.

[Gl71] A.M. Gleason, Weight polynomials of self-dual codes and the MacWilliams identities. Actes du Congres International des Mathematiciens (Nice, 1970), Tome 3, pp. 211–215. Gauthier-Villars, Paris, 1971.

[Gr98] R.L. Griess, A vertex operator algebra related to E_8 with automorphism group $\mathrm{O}^+(10,2)$, *Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ.* **7** (1998), 43–58.

[Gr05] R.L. Griess, Pieces of 2^d: existence and uniqueness for Barnes-Wall and Ypsilanti lattices, *Adv. Math.* **196** (2005), 147–192.

[Hö95] G. Höhn, Selbstduale Vertexoperatorsuperalgebren und das Babymonster, Dissertation, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universitat Bonn, Bonn, 1995.

[Hö08] G. Höhn, Conformal designs based on vertex operator algebras, *Adv. Math.* **217** (2008), 2301–2335.

[HLTP03] S.K. Houghten, C.W.H. Lam, L.H. Thiel and J.A. Parker, The extended quadratic residue code is the only $(48, 24, 12)$ self-dual doubly-even code. *IEEE Trans. Inform. Theory* **49** (2003), 53–59.

[Hu96] Y. Huang, A nonmeromorphic extension of the moonshine module vertex operator algebra, *Contemp. Math.* **193** (1996), 123–148.

[KM01] M. Kitazume, and M. Miyamoto, 3-transposition automorphism groups of VOA, *Adv. Stud. Pure Math.* **32**, (2001), 315–324.

[LY07] C.H Lam and H. Yamauchi, A characterization of the moonshine vertex operator algebra by means of Virasoro frames, *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2007), Art. ID rnm003, 10 pp.

[MOS75] C.L. Mallows, A.M. Odlyzko and N.J.A. Sloane, Upper bounds for modular forms, lattices, and codes, *J. Algebra* **36** (1975), 68–76.

[MS73] C.L. Mallows and N.J.A. Sloane, An upper bound for self-dual codes, *Information and Control* **22** (1973), 188–200.

[MN99] A. Matsuo and K. Nagatomo, Axioms for a vertex algebra and the locality of quantum fields, MSJ Memoirs **4**, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 1999.

[MM00] A. Matsuo and M. Matsuo, The automorphism group of the Hamming code vertex operator algebra, *J. Algebra* **228** (2000), 204–226.

[Sc93] A.N. Schellekens, Meromorphic $c = 24$ conformal field theories, *Comm. Math. Phys.* **153** (1993), 159–185.

[Sh04] H. Shimakura, The automorphism group of the vertex operator algebra V_L^+ for an even lattice L without roots, *J. Algebra* **280** (2004), 29–57.

[Sh06] H. Shimakura, The automorphism groups of the vertex operator algebras V_L^+: general case, *Math. Z.* **252** (2006), 849–862.

[Sh07] H. Shimakura, Lifts of automorphisms of vertex operator algebras in simple current extensions, *Math. Z.* **256** (2007), 491–508.

[Sh] H. Shimakura, Graphs based on the Griess algebras of vertex operator algebras, preprint.

[山内 06] 山内博, 枠付き頂点作用素代数の対称性と分類問題, 第 51 回代数学シンポジウム報告集 (2006) 49–63.

[Zh96] Y. Zhu, Modular invariance of characters of vertex operator algebras, *J. Amer. Math. Soc.* **9** (1996), 237–302.