超 Kähler 多様体の代数次元と代数還元写像 (Frédéric Campana, Thomas Peternell 両教授との共同研究)

小木曾啓示 (慶應義塾大学経済学部)

1 序

代数学シンポジウムでは、超 Kähler 多様体の代数次元及び代数還元写像に関する Frédéric Campana, Thomas Peternell 両教授との共同研究 [COP] について、証明を中心に話した。本稿においては、技術的な細部 (それは論文 [COP] にも書いてある) だけではなく、論文には書かなかった背景的なこと (例や予想に至った経緯等) も含めて解説したい。

また、この場をお借りして、講演の機会を与えてくださった川又雄二郎先生と栗原将人先生に深く感謝致します。

2 多様体の代数次元と代数還元写像

本章では、コンパクト複素多様体の代数次元と代数還元写像について簡単に復習する。詳しくは [Ue], [Fu2] 等を参照されたい。

M を連結コンパクト複素多様体 (以下単にコンパクト多様体という) とする。 M の大域的有理型関数全体のなす体を M の有理型関数体といい、 $\mathbf{C}(M)$ で表す。 $\mathbf{C}(M)$ は M に付随するもっとも基本的な双有理型不変量である。 $\mathbf{C}(M)$ は $\mathbf{C}$ の有限生成拡大体である (Siegel)。 M が射影代数多様体であれば、 $\mathbf{C}(M)$ は M の有理関数体と一致し (Chow)、 M の双有理同値類を一意に特徴付ける。 $\mathbf{C}(M)$ の $\mathbf{C}$ 上の超越次数のことを M の代数次元と呼び $a(M)$ と書く。 正規射影代数多様体¹ B への支配的有理型写像 $f: M \cdots \rightarrow B$ が、 $f^*(\mathbf{C}(B)) = \mathbf{C}(M)$ をみたすとき、この写像 f のことを M の代数還元写像という。 代数還元写像 $f: M \cdots \rightarrow B$ は底空間の双有理同値の違いを除いて一意に定まる。 また、ファイバー²は、 $f^*(\mathbf{C}(B)) = \mathbf{C}(M)$ により、連結である。

$x_1, \dots, x_a$ ($a = a(M)$) を $\mathbf{C}(M)$ の超越基底とする。 $\mathbf{C}(x_1, x_2, \dots, x_a)$ 上代数的な元 $y \in \mathbf{C}(M)$ をうまく選べば、

$$\mathbf{C}(M) = \mathbf{C}(x_1, x_2, \dots, x_a, y)$$

となる (E. Artin)。 $F(x_1, \dots, x_a, Y) \in \mathbf{C}[x_1, x_2, \dots, x_a][Y]$ を y の $\mathbf{C}(x_1, x_2, \dots, x_a)$ 上の最小多項式とする。 このとき、支配的有理型写像

$$f: M \cdots \rightarrow (F=0) \subset \mathbf{C}^{a+1}; P \mapsto (x_1(P), x_2(P), \dots, x_a(P), y(P))$$

¹本稿では、代数還元写像の底空間には正規かつ射影的なもののみを採用することにする。

² f の不確定点除去写像 $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$ が誘導する正則写像 $\tilde{f}: \tilde{M} \rightarrow B$ のファイバーの π のよる像として定義する。

ができる. 像 $(F = 0)$ を $\mathbf{P}^{a+1}$ 内でコンパクト化した後正規化 (あるいは特異点解消) して得られる正規 (あるいは非特異) 射影代数多様体を B とする. f は自然に M から B への支配的有理型写像 (同じ f で表す) を誘導する. この写像 $f: M \cdots \rightarrow B$ は M の代数還元写像である. このように, 代数還元写像は確かに存在して,

$$0 \leq a(M) = (\text{代数還元写像の底空間の次元}) \leq \dim M$$

がなりたつ.

こうして, 最初は純代数的に定義された代数次元も, より幾何学的な対象である代数還元写像を通して調べられることになる. また, 多重標準写像あるいは標準環を調べるのが双有理射影代数幾何学の出発点であり 1 つのゴールでもあるとすれば, 代数還元写像あるいは有理型関数体を調べることは非射影的多様体の双有理型幾何学の出発点であり 1 つのゴールでもあるといえるであろう.

1 次元コンパクト多様体, すなわち, コンパクト Riemann 面はすべて射影代数的である (Riemann). 従って, 代数次元と代数還元写像が問題となるのは 2 次元以上の多様体についてである. 2 次元の場合には Kodaira により次が知られている ([BHPV] 参照):

定理 1 S をコンパクト曲面とする. このとき, $a(S) = 0, 1, 2$ であることは, それぞれ Néron-Severi 格子 $NS(S)$ の符号が $(0, 0, \rho(S))$ (楕円型), $(0, 1, \rho(S) - 1)$ (放物型), $(1, 0, \rho(S) - 1)$ (双曲型) であることと同値である. また, $a(S) = 1$ のとき, 代数還元写像は一般ファイバーが楕円曲線である全射正則写像 $f: S \rightarrow C$ の形になる.

$a(M) = \dim M$ であるとき, すなわち, M が射影代数多様体と双有理型同値であるとき, M のことを Moishezon 多様体という. M が Kähler であるとき, M が Moishezon であることと射影代数的であることは同値である (Moishezon)³. また, $h^{2,0}(M) = \dim H^0(M, \Omega_M^2) = 0$ であるコンパクト Kähler 多様体は射影代数多様体である (Kodaira). 言いかえると, 非射影的なコンパクト Kähler 多様体は必ず 0 でない大域的正則 2 形式をもつことになる. 本稿の主題であるコンパクト超 Kähler 多様体は 0 でない大域的正則 2 形式を, ある意味最も単純な形で, 備えた多様体である (3 章参照).

3 超 Kähler 多様体

超 Kähler 多様体をその位置づけとともに述べるために, 次の有名な定理から始める:

定義-定理 1 (Bogomolov 分解定理 [Be]) X を $H^2(X, \mathbf{R})$ において $c_1(X) = 0$ であるコンパクト Kähler 多様体とする. このとき, X の不分岐有限 Galois 被覆 $\tilde{X}$ があり $\tilde{X}$ は次の 3 つのタイプの多様体いくつかの直積と同型になる:

- (i) 複素トーラス;
- (ii) (狭義) Calabi-Yau 多様体, すなわち, $H^0(V, \Omega_V^k) = 0$ ($0 < k < m = \dim V$) かつ至るところ 0 でない大域的正則 m -形式をもつ $m (\geq 3)$ 次元コンパクト単連結 Kähler 多様体 V ;
- (iii) 超 Kähler 多様体⁴, すなわち, $H^0(M, \Omega_M^2) = \mathbf{C}\sigma_M$ であり, σ_M がすべての点で非退化であるコンパクト単連結 Kähler 多様体 M .

³ M が 2 次元ならば Kähler であることの仮定は不要である (Kodaira).

⁴正則既約 symplectic 多様体ともいう.

M を超 Kähler 多様体とする. M の点 x における接ベクトル空間 $T_x M$ には非退化な交代形式 $\sigma_{M,x}$ があるから, M は偶数次元である. $K3$ 曲面は 2 次元超 Kähler 多様体に他ならない. また, $H^0(M, \Omega_M^2) \neq 0$ だから, (前節で見たように) M は非射影的になる可能性をもっている. 実際, 次が成り立つ:

定理 2 ([Fu1]) 超 Kähler 多様体の倉西族には射影代数的な超 Kähler 多様体と射影代数的ではない超 Kähler 多様体がそれぞれ稠密に存在する⁵.

従って, 超 Kähler 多様体の研究において, 次は自然かつ意味のある問題である:

問題 1 超 Kähler 多様体の代数次元と代数還元写像について調べよ.

もちろん, 類似の問題を他のクラスの多様体についても考えることができる. 例えば, 定理 (3.1) に現れた Calabi-Yau 多様体や複素トーラスに対する答は次である:

命題 1 (1) $m(\geq 3)$ 次元 Calabi-Yau 多様体はすべて射影代数多様体である. 特に代数次元は m である.

(2) $m(\geq 2)$ 次元複素トーラス T の代数次元は (m 次元トーラスをすべてにわたって動かすとき), 0 以上 m 以下の整数 $0, 1, 2, \dots, m$ すべての値をとる⁶. また, 代数還元写像として, $a(T)$ 次元アーベル多様体を底空間とし, 複素トーラスをファイバーとする写像 $f: T \rightarrow A$ がとれる. 特に, 代数還元写像として, T からの正則写像がとれる.

証明 (1) $H^0(V, \Omega_V^2) = 0$ だからである.

(2) よく知られているはずであるが, 文献が見当たらないので, 証明を与えることにする.

まず, 前半を示す. 4 以上の整数は 2 と 3 いくつかの和の形に書ける⁷から, $m = 2, m = 3$ の場合に示せば十分である. 代数次元には, 加法性 ([Ue, Theorem 3.8] の特別な場合)

$$a(X \times Y) = a(X) + a(Y)$$

があるからである. $m = 2$ の場合は, 定理 (2.1) と, 複素トーラスの重さ 2 の Hodge 構造に対する周期写像の全射性 ([Sh]) から従う.

$m = 3$ の場合を考える. 加法性により, 3 次元複素トーラス

$$E \times T_0, E \times T_1, E \times T_2$$

(E は楕円曲線, T_i は代数次元 i の 2 次元複素トーラス) の代数次元は, 順に $1, 2, 3$ である. 以下, $a(T) = 0$ である 3 次元複素トーラス T を, [Vo] に従い構成する. 次の行列で表される $\Lambda = \mathbf{Z}^6$ の自

⁵より強く, 超 Kähler 多様体の任意の非自明な変形は射影的超 Kähler 多様体を至るところ稠密に含む (Fujiki の稠密性定理). この事実は後に用いられる.

⁶コンパクトリーマン面はすべて射影代数的 (Riemann) だから, $m = 1$ のときは代数次元は 1 である.

⁷偶数については明らか. 5 以上の奇数については, 2 をどんどん引いていくと, 最後に 1 が残るが, この 1 と最後に引いた 2 をその和 3 に置き換えればよい.

己準同型写像 g を考える:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

その形から, g の固有多項式は $\Phi(t) = t^6 - t + 1$ である. 特に, $\det g = 1$ であり, g は $\Lambda = \mathbf{Z}^6$ の自己同型である. また, $\Phi(t) = 0$ の複素数解は互いに異なる虚数で

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \overline{\alpha_3}\}$$

の形, $\Phi(t)$ は $\mathbf{Q}$ 上既約で $\mathbf{Q}$ 上の Galois 群は 6 次対称群 S_6 である⁸. $V(\overline{\alpha_i})$ を $\overline{\alpha_i}$ に対応する固有ベクトル空間とする. このとき,

$$T = \bigoplus_{i=1}^3 V(\overline{\alpha_i}) / \Lambda$$

は 3 次元複素トーラスであり, g は T の自己同型 (同じ g で表す) を誘導する. また,

$$H^2(T, \mathbf{C}) = \bigoplus_{1 \leq i \neq j \leq 3} V(\alpha_i) \otimes V(\alpha_j) \oplus \bigoplus_{i,j=1}^3 V(\alpha_i) \otimes V(\overline{\alpha_j}) \oplus \bigoplus_{1 \leq i \neq j \leq 3} V(\overline{\alpha_i}) \otimes V(\overline{\alpha_j})$$

$$H^{1,1}(T) = \bigoplus_{i,j=1}^3 V(\alpha_i) \otimes V(\overline{\alpha_j})$$

であり, 右辺はそれぞれ g の作用に関する 1 次元固有空間への固有空間分解である. 実際, Galois 群が S_6 であることから, 6 つの解の異なる 2 つの積 (15 通りある) も等しくならないからである. 特に, $g^*|H^{1,1}(T)$ の固有値は $\alpha_i \overline{\alpha_j} (1 \leq i, j \leq 3)$ 全体である. Néron-Severi 群 $NS(T) \subset H^{1,1}(T)$ は g -不変であり, $g^*|NS(T)$ の固有値 (複素数の範囲で考える) は $\alpha_i \overline{\alpha_j} (1 \leq i, j \leq 3)$ いくつかからなることになる. 他方, $g^*|NS(T)$ の固有多項式は有理数係数多項式だから, $\alpha_{i_0} \overline{\alpha_{j_0}}$ が $g^*|NS(T)$ の固有値であれば, その Galois 共役である

$$\alpha_i \alpha_j, \overline{\alpha_i \alpha_j} (1 \leq i \neq j \leq 3), \alpha_i \overline{\alpha_j}, (1 \leq i, j \leq 3)$$

もすべて $g^*|NS(T)$ の固有値でなければならず, 矛盾である. 従って, $g^*|NS(T)$ は固有値をまったく持たないことになる. すなわち, $NS(T) = \{0\}$ である. 従って, $a(T) = 0$ である. 実際, $a(T) > 0$ であれば, 代数還元写像による底空間の超平面切断因子の引き戻しは T の効果的因子 $D (\neq 0)$ を定めるが, T は Kähler だから, $NS(T)$ において $D \neq 0$ だからである.

後半を示す. 代数還元写像 $f: T \cdots \rightarrow B$ の一般ファイバー F (の特異点解消) の Kodaira 次元は, (f の不確定点除去を行い B 上の相対多重標準写像を考えることで) 0 以下である. しかも, T 自身複素トーラスであることから 0 でなければならない ([Ue Lemma 10.1]). 従って, T の原点を F 上に選ぶことで, F は T の閉部分トーラスになる ([Ue, Theorem 10.3]). このとき, 商写像 $f: T \rightarrow T/F$ は代数還元写像を与える. 底空間である複素トーラス T/F は (代数還元写像の定義から) 代数的だから, アーベル多様体である. (Q.E.D.)

超 Kähler 多様体に戻ろう.

⁸[Fs, 3.13 節 例 3.53] に従う. 解がすべて虚数であることは, $\Phi(t)$ は, 極値が正で, 次数が偶数の monic 多項式であることからわかる. mod 2 reduction が既約であることから, $\mathbf{Q}$ 上の既約性が従う. 特に Galois 群は S_6 の可移部分群である. また, mod 3 reduction, mod 7 reduction での既約因子の次数は, それぞれ (1, 2, 3), (1, 5) となる. このことから, Galois 群は互換と長さ 5 の巡回置換を含むことがわかる. 以上から, $\Phi(t)$ の Galois 群は S_6 であることが従う.

例 1 (1) ([Fu1], [Be]) S を $K3$ 曲面とする. S の長さ $r \geq 2$ の 0 次元解析的部分空間 $(Z, \mathcal{O}_Z)$ 全体のなす Douady 空間 (Hilbert スキーム) $S^{[r]}$ は $2r$ 次元超 Kähler 多様体である. $S^{[r]} (r \geq 2)$ の 2 次 Betti 数は 23 で, 変形の次元は 21 である⁹. $K3$ 曲面の変形の次元は 20 だから, $S^{[r]}$ を少し変形することで, $K3$ 曲面の Hilbert スキームの形ではない超 Kähler 多様体も得られることになる.

(2) ([Be]) r を正の整数, T を 2 次元複素トーラスとする. Hilbert-Chow 写像 $T^{[r+1]} \rightarrow T^{(r+1)}$ と T の加法に関して和をとる写像 $T^{(r+1)} \rightarrow T$ の合成 $a: T^{[r+1]} \rightarrow T$ は全射正則写像である. 写像 a は isotrivial かつ滑らかな写像であり, a のファイバーはすべて同型になる. a のファイバーの同型類を $K_r(T)$ と書く¹⁰. $K_r(T) (r \geq 2)$ も $2r$ 次元超 Kähler 多様体である. 2 次 Betti 数は 7 で, 変形の次元は 5 である. 2 次元複素トーラスの変形の次元は 4 だから, やはり少し変形すると, 一般化された Kummer 曲面ではない超 Kähler 多様体になる.

(3) ([Od1,2], [Ra1,2]) (1), (2) のいずれとも変形同値でない超 Kähler 多様体が, 変形同値を除いて, 6 次元に一種と 10 次元に一種存在する. 変形の次元はそれぞれ 6, 22 である ([Ra1,2]). これら以外にも実在するかどうかは確認されていない.

命題 2 (1) S を $K3$ 曲面とする. $a(S) = 0, 1, 2$ に応じて, $a(S^{[r]}) = 0, r, 2r$ となる. また, $a(S) = 1$ のとき, $S^{[r]}$ の代数還元写像として, $\mathbb{P}^n$ への全射正則写像 $\tilde{f}: S^{[r]} \rightarrow \mathbb{P}^r$ がとれる. その一般ファイバーは r 次元アーベル多様体である.

(2) T を 2 次元複素トーラスとする. $a(T) = 0, 1, 2$ に応じて, $a(K_r(T)) = 0, r, 2r$ になる. また, $a(T) = 1$ のとき, $K_r(T)$ の代数還元写像として, $\mathbb{P}^r$ への全射正則写像 $\tilde{f}: K_r(T) \rightarrow \mathbb{P}^r$ がとれる. その一般ファイバーは r 次元アーベル多様体である.

証明 S 上の長さ r の効果的 0 サイクル全体からなる Chow 多様体を $S^{(r)}$ と書く. $S^{(r)} = S^r/S_r(S^r)$ は S の r 個の直積で S_r は r 次対称群である. Hilbert-Chow 写像 $S^{[r]} \rightarrow S^{(r)}$ は双有理型写像であり, $S^{(r)}$ は直積 S^r の有限商だから, $a(S^{[r]}) = a(S^r) = ra(S)$ である. $a(S) = 1$ とし, $f: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ を S の代数還元写像 (定理 (2.1)) とする. S は単連結だから, 底空間は必然的に $\mathbb{P}^1$ である. f は, 全射正則写像 $\tilde{f}: S^{[r]} \rightarrow S^{(r)} \rightarrow (\mathbb{P}^1)^{(r)}$ を誘導する. $a(S^{[r]}) = r$ だから, $\tilde{f}$ は $S^{[r]}$ の代数還元写像である. また, $\mathbb{P}^1$ の長さ r の 0 サイクルを与えることは, 次数 r の 2 変数斉次多項式 ($\neq 0$) を定数倍を法として与えることに他ならない. 従って, $(\mathbb{P}^1)^{(r)} = \mathbb{P}^r$ である. また, $\tilde{f}$ の一般ファイバーは, f の一般ファイバー r 個の直積であり, 射影的複素トーラス (アーベル多様体) である. こうして (1) が示された.

(2) を示そう. トーラス T の加法に関する和をとる写像を $s_T: T^{r+1} \rightarrow T$ とする. 対称群 S_{r+1} の T^{r+1} への自然な作用はファイバー $s_T^{-1}(0) \simeq T^r$ を保つから, $K_r(T)$ は T の r 個の直積 T^r の有限商 T^r/S_{r+1} と双有理型同値である. 従って, 前半は (1) と同じ理由により従う. $a(T) = 1$ とし, $f: T \rightarrow E$ を T の代数還元写像とする. E は楕円曲線である. $f(0)$ を E の 0 と定めることにより, f は全射正則写像 $\tilde{f}: K_r(T) \rightarrow s_T^{-1}(0)/S_{r+1} \rightarrow s_E^{-1}(0)/S_{r+1}$ を誘導する. (1) と同じ理由で, $\tilde{f}$ は $K_r(T)$ の代数還元写像である. $s_E^{-1}(0)/S_{r+1}$ は E の加法に関する和が 0 でありしかも長さが $r+1$ であるような E の効果的 0 サイクル全体であるが, それは完備線形系 $|r+1| \simeq \mathbb{P}^r$ に他ならない (楕円曲線に対する Abel の定理). 一般ファイバーについては (1) とまったく同様である. こうして (2) も示された. (Q.E.D.)

⁹超 Kähler 多様体 M の変形の次元は常に $b_2(M) - 2 = h^{1,1}(M) \geq 1$ である.

¹⁰ $K_1(T)$ は Kummer 曲面 $\text{Km } T$ である. このため, $K_r(T)$ は一般化された Kummer 多様体とも呼ばれる.

このように、具体的な 2 例についてはあるが、超 Kähler 多様体の代数次元や代数還元写像の構造が明らかになった。個人的には、この例（より正確には例 (1)）に気づいたことが、後に述べる予想の定式化の最初の根拠になった。結果として、超 Kähler 多様体の代数次元のふるまいや代数還元写像の構造は、多様体の構造がより近いように見える Calabi-Yau 多様体や複素トーラスの場合よりも、 $(2r = 2 \times r, 2 = 2 \times 1)$ と見ることで）曲面の場合により似ていることが観察される。

代数次元や代数還元写像に限らず、超 Kähler 多様体と曲面にはいろいろなところで顕著な類似性が観察されている ([GHJ], [Og] 参照)。

超 Kähler 多様体と曲面との類似を支持する 1 つの根拠であり、強力な道具でもあるのが、次の基本定理である：

定理 3 (Beauville-Bogomolov-藤木形式¹¹. [Be1], [Fu3], [Ve], [Bo1,2], [GHJ])

M を $2d$ 次元超 Kähler 多様体、 σ_M を M の大域的正則 2 形式とする。ただし、 σ_M は $\int_M \sigma_M^d \overline{\sigma_M}^d = 1$ となるように正規化しておく（方法は一意ではないが、次に定める $\tilde{q}_M(*)$ は一意の定まる）。 $H^2(M, \mathbf{R})$ 上の実 2 次形式 $\tilde{q}_M$ を

$$\tilde{q}_M(\alpha) := \frac{d}{2} \int_M \alpha^2 \sigma_M^{d-1} \overline{\sigma_M}^{d-1} + (1-d) \int_M \alpha \sigma_M^{d-1} \overline{\sigma_M}^d \cdot \int_M \alpha \sigma_M^d \overline{\sigma_M}^{d-1}, \quad \alpha \in H^2(M, \mathbf{R})$$

により定める。また、 $\tilde{q}_M(*)$ に付随する実対称双一次形式¹²を、 $\tilde{q}_M(*, **): H^2(M, \mathbf{R}) \times H^2(M, \mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$ を $\tilde{q}_M(*)$ と書く。このとき、次の (1)-(5) が成り立つ：

(1) $\tilde{q}_M(*, **)$ は、 $H^2(M, \mathbf{Z})$ 上の重さ 2 の Hodge 構造 $H^2(M, \mathbf{C}) = H^{1,1}(M) \oplus H^{2,0}(M) \oplus H^{0,2}(M)$ と適合する [Be]：

$$\begin{aligned} \tilde{q}_M(H^{1,1}(M), H^{2,0}(M)) &= \tilde{q}_M(H^{1,1}(M), H^{0,2}(M)) = 0 ; \\ \tilde{q}_M(\sigma_M, \sigma_M) &= \tilde{q}_M(\overline{\sigma_M}, \overline{\sigma_M}) = 0, \quad \tilde{q}_M(\sigma_M, \overline{\sigma_M}) > 0. \end{aligned}$$

(2) $\tilde{q}_M(*, **)$ は非退化でその符号数は $(3, b_2(M) - 3)$ である。より詳しく、 η を M の任意の Kähler 類とすると、 $\tilde{q}_M(*, **)$ は、 $H^2(M, \mathbf{R})$ の 3 次元部分空間 $H_\eta := \langle \eta, \operatorname{Re} \sigma_M, \operatorname{Im} \overline{\sigma_M} \rangle$ 上は正定値であり、その直交補空間 $H_\eta^\perp$ 上は負定値である [Be]。

(3) 正の実数 $c > 0$ をうまくとれば、 $q_M(*, **) := c\tilde{q}_M(*, **)$ は $H^2(M, \mathbf{Z})$ 上整数値であり、しかも値の最大公約数が 1 であるようにできる [Be]。 $q_M(*, **)$ は M から一意に定まり、変形不変である。この対称双 1 次形式 $q_M(*, **)$ あるいは対応する 2 次形式 $q_M(*)$ のことを Beauville-Bogomolov-藤木形式 (BF 形式) と呼ぶ。

(4) 実数定数 $C > 0$ があって、 $\alpha^{2d} = C \cdot q_M(\alpha)^d$ がすべての $\alpha \in H^2(M, \mathbf{C})$ に対して成り立つ。また、 $\chi(L) = f_M(q_M(L))$ (f_M は直線束 L によらない多項式) の形に書ける [Fu3]。

¹¹Bogomolov は論文 [Bo1] において、超 Kähler 多様体の変形が unobstructed であることを示した後、4 次元以上の超 Kähler 多様体は存在しないことを「証明」した。もちろん後者は誤りではあるが、2 次形式 $\tilde{q}_M$ が最初に現れたのはその「証明」においてであった。このことは、2008 年 9 月に Bogomolov 先生に Pisa でお会いした時に、「何故先生の名前が冠されているのか」（個人的にはずっと不思議に思っていた）をお聞きして直接教えていただいた。改めて [Bo1] を見てみると、その「証明」には後に確立された上記諸性質の兆しもが窺えることがわかった。従って、論説 [Og] における筆者の主張「 $q_M(*)$ あるいは $q_M(*, **)$ のことは Beauville-Bogomolov-藤木形式ではなく、Beauville-藤木形式と呼ぶべきである。」は誤りであり、完全撤回したいと思う。

¹²形から $K3$ 曲面の場合には cup 積と一致する。

(5) $SH^2(M, \mathbf{C})$ を $H^2(M, \mathbf{C})$ で生成される $H^*(M, \mathbf{C})$ の部分環とすると、次が成り立つ ([Ve], [Bo2]):

$$SH^2(M, \mathbf{C}) = \text{Sym}^* H^2(M, \mathbf{C}) / \langle \alpha^{d+1} | q_M(\alpha) = 0 \rangle.$$

系 1 BF 形式に関して、 $NS(M)$ の符号は $(0, 0, \rho(M))$ (楕円型), $(0, 1, \rho(M)-1)$ (放物型), $(1, 0, \rho(M)-1)$ (双曲型) のいずれかである.

曲面においては $NS(S)$ が双曲型であることと S が射影代数的であることは同値であった. Huybrechts は次の深い類似性を示した:

定理 4 ([Hu1]) 超 Kähler 多様体が射影代数的であることと、 $NS(M)$ が双曲型であることは同値である.

4 予想と主結果

命題 (3.2), 系 (3.1), 定理 (3.4) 等に基づき、筆者は次の予想を提唱した (2004 年頃):

予想 1 M を $2d$ 次元超 Kähler 多様体とする. このとき、

(1) $a(M) = 0, d, 2d$ のいずれかが成り立つ. 更に、 $a(M) = d$ であれば、 M の代数還元写像として、Lagrangian fibration $f : M \rightarrow B$ (特に M からの正則写像) がとれる.

(2) より詳しく、 $a(M) = 0, d, 2d$ であることは、それぞれ $NS(M)$ が楕円型、放物型、双曲型であることと同値である¹³.

注意 1 (1) $2d$ 次元超 Kähler 多様体 M の非特異閉部分多様体 N のうち、 $\sigma_M|_N = 0$ かつ $\dim N = d$ をみたまものを Lagrangian 部分多様体という. 一般ファイバーが Lagrangian 部分多様体であるファイバー空間¹⁴ $f : M \rightarrow B$ のことを Lagrangian fibration という. このとき、底空間は d 次元であり、一般ファイバー F は d 次元複素トーラスになる¹⁵.

(2) Matsushita の定理 [Ma1, 2] により、超 Kähler 多様体からに付随するファイバー空間 $f : M \rightarrow B$ (ただし、 B は射影的で $0 < \dim B < 2d$) はすべて Lagrangian fibration である. 従って、予想 (4.1)(1) の後半は、代数還元写像が M からの正則写像にとれることと同値である.

予想 (4.1) に対して、今までにわかったことは次である [COP]:

定理 5 (主定理) M を $2d$ 次元超 Kähler 多様体とする. このとき、

(1) $a(M) \leq d$ または $2d$ のいずれかが成り立つ. 更に、 $a(M) = d$ であれば、 M の代数還元写像として、Lagrangian fibration, 特に M からの正則写像, がとれる.

(2) 4 次元超 Kähler 多様体に対しては、予想 (4.1)(1) は正しい.

¹³ $a(M) = 2d$ と $NS(M)$ が双曲型であること同値性は Huybrechts の定理 (定理 (3.4)) である.

¹⁴ファイバーが連結な全射固有正則写像のことをファイバー空間という.

¹⁵Lagrangian fibration に対する Liouville-Arnold の定理である. 代数幾何の人には、「一般ファイバー F が Lagrangian 部分多様体であることから、非退化 2 形式 σ_M に関して、 F の接束 TF が、 F の法束 $N_{M/F} (\simeq \mathcal{O}_F^{\oplus d})$ と双対になり、 TF が自明束になることから直ちに従う。」と説明するほうがわかりがよいであろう.

注意 2 また、「ある種の極小モデル理論の成立¹⁶の下で」ではあるが、次もわかっている [COP]:

小平次元が 0 である $2d - 1$ 次元以下のすべてのコンパクト Kähler 多様体に対して、標準因子が数値的に 0 である極小モデルが存在するならば、予想 (4.1)(1) は $2d$ 次超 Kähler 多様体に対して正しい。

5 主定理の証明

本節では主定理の証明を、その中で用いられる事実と合わせて解説したい。

5.1 設定

M を非射影的な $2d$ 次超 Kähler 多様体とする。定理 (3.4) により、 $NS(M)$ は楕円型あるいは放物型である。 $f: M \dashrightarrow B$ を M の代数還元写像とし、底空間 B は射影的かつ正規に選ぶものとする。 f の不確定点除去写像を $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$ とし、 π により誘導される全射正則写像を $\tilde{f}: \tilde{M} \rightarrow B$ と書く。 A を B の一般超平面切断とし、 $L = \pi_* \tilde{f}^* A$ 、 $\tilde{L} = \pi^* L$ とおく。このとき、 $\tilde{L} = \tilde{f}^* A + E$ ($E \geq 0$ は π -例外因子にサポートが含まれる効果的因子) と書ける。また、作り方から、 $\tilde{f} = \Phi_{|\tilde{f}^* A|}$ 、 $f = \Phi_\Lambda$ (Λ は $|L|$ の部分線形系) の形をしている。

$H^{1,1}(M, \mathbf{R})$ における M の Kähler 錐 $\mathcal{K}(M)$ の閉包を $\bar{\mathcal{K}}(M)$ 、 M の正錐¹⁷ の閉包を $\bar{\mathcal{P}}(M)$ と書く。

$$\bar{\mathcal{K}}(M) \subset \bar{\mathcal{P}}(M) \subset H^{1,1}(M, \mathbf{R})$$

である。 $NS(M) \cap \bar{\mathcal{K}}(M)$ に属する直線束あるいは因子のことを解析的に nef であるという ([Na]).

5.2 主定理 (1) の証明

命題 3 $\dim B > 0$ (つまり $a(M) > 0$) ならば、 $NS(M)$ は放物型である。また、 $\text{Pic}(M) \simeq NS(M)$ において、 $L \in \mathbf{Z}_{>0} \ell$ である。ここで、 ℓ は $NS(M)$ の原始的等方で M の Kähler 錐の閉包に属する (M に対して一意に定まる) 元である。特に、任意の $x \in NS(M)$ に対して $q_M(L, x) = 0$ となる。

系 2 $NS(M)$ が楕円型ならば $a(M) = 0$ である。

証明 $\dim B > 0$ であり、 $|L|$ は固定成分をもたない。従って、 $D_1, D_2 \in |L|$ を一般にとれば、 $D_1 \cap D_2$ は純余次元 2 (または空) である。このことから、

$$0 \geq q_M(L) = q_M(D_1, D_2) = \int_{D_1 \cap D_2} (\sigma_M \overline{\sigma_M})^{d-1} \geq 0.$$

第 1 の不等式は $NS(M)$ が放物型または楕円型だからである。故に、 $q_M(L) = 0$ 。 $NS(M)$ において $L \neq 0$ だから、これより主張が従う。(Q.E.D.)

以下、 $\dim B > 0$ と仮定する。特に、 $NS(M)$ は放物型である。次は、後の議論で重要になる。

¹⁶Kähler 多様体に関しては、3 次元でも確立されていない。

¹⁷ $\{x \in H^{1,1}(M, \mathbf{R}) | q_M(x) > 0\}$ は 2 つの連結成分からなるが、そのうち Kähler 錐を含む方の連結成分。

命題 4 L は解析的に nef である. より強く, M 上の任意の曲線 C に対して, $(L, C) = 0$ である.

証明の鍵は, Huybrechts による次の定理¹⁸である.

定理 6 ([Hu2]) $\omega \in \overline{P}(M)$ に対して, $\omega \in \overline{K}(M)$ となるための必要十分条件は, M 上の任意の有理曲線 C に対して $(\omega, C) \geq 0$ が成り立つことである.

この定理により, 命題 (5.2.4) を示すには命題 (5.2.4) の後半を示せばよいことになる.

証明 BF 形式は $\mathbf{Q}$ 上定義されていることから, 対応 $x \mapsto q_M(*, x)$ により, $H^2(M, \mathbf{Q}) \simeq (H^2(M, \mathbf{Q}))^*$ である. また, 交点形式による対応 (Poincaré 双対) $c \mapsto (*, c)$ により, $H^{4d-2}(M, \mathbf{Q}) \simeq (H^2(M, \mathbf{Q}))^*$ である. この 2 つを合成して, 同型写像 $\iota: H^{4d-2}(M, \mathbf{Q}) \simeq H^2(M, \mathbf{Q})$ ができる. C を M 上の曲線とする. $(\sigma_M, [C]) = (\overline{\sigma}_M, [C]) = 0$, すなわち, $q_M(\sigma_M, \iota([C])) = q_M(\overline{\sigma}_M, \iota([C])) = 0$ である. 故に, 定理 (3.3)(1) により,

$$\iota([C]) \in H^{1,1}(M) \cap H^2(M, \mathbf{Q}) = NS(M)_{\mathbf{Q}}$$

である. このことと, L は放物型格子 $NS(M)$ の等方元である (命題 (5.2.3)) ことから,

$$(L, C) = q_M(L, \iota([C])) = 0$$

である. こうして示された. (Q.E.D.)

次は, [Ma1] の議論 (f が正則な場合) を少し修正したものである:

命題 5 $\eta \in \mathcal{K}(M)$ とし, $\tilde{\eta} = \pi^*\eta$ (従って, $\tilde{\eta} \in \overline{K}(\tilde{M})$ である) とする. このとき,

$$0 \leq k := 2d - (a + b) < d$$

であるすべての非負整数 a, b に対して

$$(\tilde{f}^*A)^a \tilde{L}^b \tilde{\eta}^{2d-a-b} = 0.$$

証明 t を実数変数とする. Fujiki の関係式 (定理 (3.3)(4)) と $q_M(L) = 0$ により,

$$(L + t\eta)^{2d} = c_M q_M(L + t\eta)^d = c_M t^d (2q_M(L, \eta) + q_M(\eta))^d.$$

両辺を t の多項式とみなして $t^k (k < d)$ の係数を比較して, $L^{2d-k} \eta^k = 0$. 従って

$$\tilde{L}^{2d-k} \tilde{\eta}^k = 0.$$

$\tilde{L} = \tilde{f}^*A + E$ を代入して,

$$(\tilde{f}^*A) \tilde{L}^{2d-k-1} \tilde{\eta}^k + E \tilde{L}^{2d-k-1} \tilde{\eta}^k = 0.$$

各項は非負なので,

$$(\tilde{f}^*A) \tilde{L}^{2d-k-1} \tilde{\eta}^k = 0.$$

¹⁸この定理も曲面と超 Kähler 多様体との間の類似を示す定理である.

$\tilde{L} = \tilde{f}^*A + E$ を代入して

$$(\tilde{f}^*A)^2 \tilde{L}^{2d-k-2} \tilde{\eta}^k + (\tilde{f}^*A) E \tilde{L}^{2d-k-2} \tilde{\eta}^k = 0.$$

再び各項は非負なので,

$$(\tilde{f}^*A)^2 \tilde{L}^{2d-k-2} \tilde{\eta}^k = 0.$$

以下, この操作を繰り返して, 結論の等式を得る. (Q.E.D.)

主定理 (1) の証明を完結させよう. $r := \dim B = a(M) > d$ であったと仮定する. このとき, 命題 (5.2.4) を, $a = r, b = 0$ に適用することができて,

$$(\tilde{f}^*A)^r \tilde{\eta}^{2d-r} = 0.$$

ここで, $(\tilde{f}^*A)^r$ は $\tilde{f}$ の一般ファイバーの類 $\tilde{F}$ の正数倍 ($c > 0$ とする) であり, $\tilde{\eta} = \pi^*\eta$ である. 従って, 射影公式により,

$$0 = (\tilde{f}^*A)^r \tilde{\eta}^{2d-r} = c(\pi_*F)\eta^{2d-r}.$$

これは矛盾である. $\pi_*F \neq 0$ は効果的な $2d - r$ 次元サイクルであり, η は Kähler 類だから右辺は正になるはずだからである. 故に, $a(M) \leq d$ である.

後は, $a(M) = d$ のとき, M からの代数還元写像が正則写像にとれることを示せばよい. L の小平次元と数値的小平次元¹⁹に関する次の不等式に注意する:

$$d \leq \kappa(L) \leq \nu(L) \leq d.$$

最初の不等式は L の取り方から自明であり, 第 2 の不等式は L が解析的 nef であることから従う ([Na]). 最後の不等式は, Verbitsky の関係式 (定理 (3.3)(5)) により, $q_M(L) = 0$ であることから, $L^{d+1} = 0$ であることがコホモロジー環の中で成り立つからである. こうして $0 < d = \kappa(L) = \nu(L)$ がいえた. 今, $K_M = 0$ だから, Kawamata-Nakayama-Fujino による半豊富性 (semi-ampleness) 判定法 ([Ka], [Na], [Fu]) により, 正の整数 m を適当にとれば, $|mL|$ は固定点自由になり, 付随する写像 $\Phi_{|mL|}$ は M からの正則な代数還元写像を与える. こうして, 主定理 (1) が示された.

5.3 極小写像と構造定理

主定理 (2) の証明には, 代数還元写像に関するより深い結果が必要になる. 本節はその準備である. 今まで同様, M は $2d$ 次元非射影的超 Kähler 多様体とする. 本節では, 設定 5.1 の記号には固執しない.

次は, 気づけば簡単だが重要である:

命題 6 S を $\dim S < \dim M$ であるコンパクト多様体とする. 超 Kähler 多様体 M から S への支配的有理型写像 $f : M \cdots \rightarrow S$ があるならば, S は Moishezon である.

¹⁹Kähler の場合の定義と基本的性質は [Na] にある.

証明条件により, S は Fujiki のクラスに属するから, コンパクト Kähler 多様体 $\tilde{S}$ と双有理型同値である. φ が誘導する M から $\tilde{S}$ への有理型写像を不確定点除去して得られる写像を $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$ とし, 誘導される全射正則写像を $\tilde{f}: \tilde{M} \rightarrow \tilde{S}$ とする. $\sigma \in H^0(\tilde{S}, \Omega_{\tilde{S}}^2)$ とする. このとき, $\tilde{f}^*\sigma \in H^0(\tilde{M}, \Omega_{\tilde{M}}^2)$ である. 他方, π により $H^0(\tilde{M}, \Omega_{\tilde{M}}^2) = \mathbb{C}\pi^*\sigma_M$ である. 従って, $\tilde{f}^*\sigma = a\pi^*\sigma_M (a \in \mathbb{C})$ となる. ここで, π は双有理型だから, $\pi^*\sigma_M$ はほとんど至るところ非退化である. 一方, $\dim S < \dim M$ だから, $\tilde{f}^*\sigma$ は $\tilde{f}$ のファイバー方向 (正次元) に退化している. 従って, $a = 0$, つまり, $\tilde{f}^*\sigma = 0$ である. 故に, $\sigma = 0$ となる. σ は任意でよいので, これより, $H^0(\tilde{S}, \Omega_{\tilde{S}}^2) = 0$ である. 故に, $\tilde{S}$ は射影代数的であり, $\tilde{S}$ と双有理型同値である S は Moishezon である. (Q.E.D.)

定義 1 $f: X \cdots \rightarrow Y$ を, 多様体間の支配的かつファイバーが連結である有理型写像とする. f を factor する写像が, 双有理型写像以外には存在しないとき, つまり, $f = f_1 \circ f_2$ をみたく支配的有理型写像 $f_1: X \cdots \rightarrow Z$, $f_2: Z \cdots \rightarrow Y$ に対して f_1 または f_2 が双有理型写像になるとき, f を極小写像という.

次の定理²⁰は極小写像に関する基本定理である.

定理 7 ([COP]) X, Y を $\dim Y < \dim X$ であるコンパクト Kähler 多様体とし, $f: X \cdots \rightarrow Y$ を極小写像とする²¹. Z を f の一般ファイバーとする. このとき,

(1) Z は, 次の (I), (II) のいずれか一方をみたす²²

(I) 代数的 (つまり $a(Z) = \dim Z$) である;

(II) $a(Z) = 0$ かつ isotypically semi-simple である.

(2) 更に, X は代数的ではないが, Y と Z は代数的であると仮定する. このとき, f は almost holomorphic で, Z はアーベル多様体である.

注意 3 定理に現れるいくつかの用語について説明しておく.

(1) 真部分多様体の (Barlet) 族では決して覆われない多様体 (variety) を simple であるという. 正の整数 d と simple な多様体 S , 及び generically finite な全射固有正則写像の対

$$Z \leftarrow \tilde{Z} \rightarrow S^d$$

があるとき, Z は isotypically semi-simple であるという.

(2) $f: X \cdots \rightarrow Y$ を支配的固有有理型写像とする. $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ を f の不確定点除去写像とし, $E \subset \tilde{X}$ をその例外集合, $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow Y$ を f が誘導する全射正則写像とする. $\tilde{f}(E) \neq Y$ であるとき, すなわち, f の不確定点集合と f の一般ファイバーが交わらないとき, f は almost holomorphic であるという.

定理 (5.3.7) は主定理 (2) の証明において重要になるが, 証明には, [Fu2], [Ca] の諸結果に加え, サイクル空間からの更なる準備が必要となる. 従って, 本稿では, 証明は省略する. 証明に興味のある

²⁰[Fu2], [Ca] を経て, [COP] において以下に述べる形に定式化された.

²¹ X がコンパクト Kähler であれば Y は Fujiki のクラスに属する. 従って, Y を双有理型同値なものに置き換えることで Y はいつでも Kähler にできる. 従って, Y が Kähler であることは実は不要である.

²²与えられた f に対して, (I), (II) は互いに背反である. つまり, ある一般ファイバーに対しては (I) だが, 別の一般ファイバーに対しては (II) であるといったことは生じない.

方は [COP] の第 2 章 (この部分はほとんど Campana 氏による) を [Fu1], [Ca] 等と合わせて見られたい。

定理 (5.3.7) が超 Kähler 多様体の代数還元写像の研究に役立つのは次の事実があるからである:

命題 7 非射影的超 Kähler 多様体 M の代数還元写像 $f: M \cdots \rightarrow B$ は極小写像である。

証明 f を非自明に factor する支配的写像 $g: M \cdots \rightarrow S$, $h: S \cdots \rightarrow B$ があつたとする。ファイバーの連結性から $\dim B < \dim S < \dim M$ である。他方, 命題 (5.3.6) により, S は Moishezon だから, $a(M) \geq a(S) = \dim S$ である。 $a(M) = \dim B$ だから, これは前の不等式に矛盾する。(Q.E.D.)
 こうして, 定理 (5.3.7) を非射影的超 Kähler 多様体の代数還元写像に適用でき, 次を得る:

系 3 非射影的超 Kähler 多様体の代数還元写像 $f: M \cdots \rightarrow B$ に対して次の (I), (II) のいずれか一方が成立する:

(I) 一般ファイバー M_b はアーベル多様体であり f は almost holomorphic である。 ($a(M_b) = \dim M_b$ の場合)

(II) 一般ファイバー M_b は代数次元が 0 である isotypically semi-simple な多様体 (variety) である。 ($a(M_b) = 0$ の場合)

5.4 主定理 (2) の証明

本節では主定理 (2) を示す。以下, M を 4 次元非射影的超 Kähler 多様体とする。主定理 (1) により, $a(M) = 0, 1, 2, 4$ であり, $a(M) = 2$ であれば代数還元写像は Lagrangian fibration である。従って, 示すべきことは $a(M) \neq 1$ である。

以下 $a(M) = 1$ であると仮定して矛盾を導くことにする。(そうすれば, 背理法により, $a(M) \neq 1$ であることが従うからである。)

このとき, $NS(M)$ は放物型であり, 設定 5.1 における B は $\mathbb{P}^1$ になる。また, 設定 5.1 における A として $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ の一般元をとることにする。後の記号はすべて設定 5.1 における記号をそのまま用いることにする。 f 及び $\tilde{f}$ の $b \in \mathbb{P}^1$ 上のファイバーを, それぞれ $M_b, \tilde{M}_b$ で表す。 $M_b, \tilde{M}_b$ は 3 次元であり, $M_b \in |L|, \tilde{M}_b \in |\tilde{f}^* A|$ である。また, b が一般の点であれば, $\tilde{M}_b$ は M_b の特異点解消である。

主張 1 $\tilde{M}_b$ は simple であり, しかも, $a(\tilde{M}_b) = 0, h^1(\mathcal{O}_{\tilde{M}_b}) = 0$ である²³。

証明 定理 (5.3.7) により, $a(\tilde{M}_b) = 0, 3$ である。 $a(\tilde{M}_b) = 3$ であれば, ($a(M_b) = 3$ でもあるから) 系 (5.3.4) により, f は almost holomorphic である。 f は pencil だからこのとき, f は正則である。実際, f は 2 つの一般ファイバーからできる一次系による写像である。従って, almost holomorphic であれば, 一般ファイバーは不確定点と交わらないため, この 1 次系は固定点自由になるからである。

f が正則ならば, $\dim B = 2$ であり, 仮定 $\dim B = 1$ に矛盾する。故に $a(\tilde{M}_b) = 0$ でなければならぬ。このとき, 再び定理 (5.3.7) により, $\tilde{M}_b$ は isotypically semi-simple である。 $\dim \tilde{M}_b = 3$ だから, $\tilde{M}_b$ 自身 simple である。実際, そうでなければ, コンパクト Riemann 面 C と generically finite

²³誤った仮定 $a(M) = 1$ のもとで「成り立つ」ことなので, 実際には正しくないことであり, 本当に正しいこととの混乱をさけるため「主張」と書いている。誤った仮定 $a(M) = 1$ とは無関係に成立することは, 今まで通り定理, 命題等と書くことにする。

な支配射 $\tilde{M}_b \leftarrow Z \rightarrow C^3$ があるが, C^3 は射影代数的だから, $a(\tilde{M}_b) = a(Z) = a(C^3) = 3$ になってしまうからである.

最後に, $h^1(\mathcal{O}_{\tilde{M}_b}) = 0$ を示そう. もし, $h^1(\mathcal{O}_{\tilde{M}_b}) > 0$ であれば, ($\tilde{M}_b$ は Kähler だから) Albese 射

$$alb : \tilde{M}_b \longrightarrow T, T = Alb(\tilde{M}_b) \text{ は正次元の複素トーラス}$$

ができて, $\tilde{M}_b$ の像は正の次元になる. $\tilde{M}_b$ は, 代数次元が 0 の simple な多様体だから, $\kappa(\tilde{M}_b) \leq 0$ であり, しかも, 非自明な fibration をもたないことに注意しよう. このことと, 複素トーラスの部分多様体 (variety) の一般論 ([Ue]) から, $alb : \tilde{M}_b \longrightarrow T$ は双有理型全射写像であることがわかる. 他方, $\pi : \tilde{M} \longrightarrow M$ の例外因子を $E = \cup E_i$ と書くとき,

$$\tilde{L}|_{\tilde{M}_b} = \sum_{i \in I} a_i E_i |_{\tilde{M}_b}, a_i > 0$$

であり, また, $K_M = 0$ と添加公式により

$$K_{\tilde{M}_b} = \sum_{i \in I} b_i E_i |_{\tilde{M}_b}, b_i > 0$$

である. ここで, I は一般ファイバー $\tilde{M}_b$ と交わる E の既約成分 E_i の添え字 i 全体のなす集合である. 第 2 式と Albanese 射 alb がトーラスへの全射双有理型写像であることから, $\cup_{i \in I} E_i |_{\tilde{M}_b}$ は alb の例外集合に含まれる. 従って, 第 1 式から, 因子 $\tilde{L}|_{\tilde{M}_b}$ のサポートも alb の例外因子に含まれる. $\tilde{L}|_{\tilde{M}_b}$ は nef であるから, これが可能なのは, 因子として, $\tilde{L}|_{\tilde{M}_b} = 0$, つまり, $E_i |_{\tilde{M}_b}$ がすべて 0 である場合に限られる²⁴. これは, f が almost holomorphic であることを意味し, 先と同様矛盾である. こうして, $h^1(\mathcal{O}_{\tilde{M}_b}) = 0$ である. (Q.E.D)

主張 2 $h^0(M, L) = 2$ かつ $h^1(M, L) = 0$.

証明 第 1 の等式は自明である. 第 2 の等式を示す. D_1, D_2 を $|L|$ の一般元として, 解析的部分空間の意味で $S = D_1 \cap D_2$ と定める. また, S の定義イデアル層を I_S とおく. φ_i を D_i の P における局所方程式とすれば, P の M における近傍 (U とする) において, $I_S = (\varphi_1, \varphi_2)$ である. 特に, $\text{Supp} S = \text{Bs}|L|$ であり, S は純 2 次元の局所完全交差多様体である.

Step 1. $\pi_* I_E = I_S$.

(証明) $\tilde{f}$ は pencil であり, E の解析的部分空間の構造は, 因子の等式 $\tilde{L} = \tilde{f}^* A + E$ で定まるものである. 従って, 解析的部分空間の意味で,

$$\pi^* D_1 \cap \pi^* D_2 = (\tilde{D}_1 + E) \cap (\tilde{D}_2 + E) = E,$$

つまり, 各 $\pi^{-1}(U)$ 上 $I_E = (\pi^* \varphi_1, \pi^* \varphi_2)$ である. これは $\pi_* I_E = I_S$ であることを意味する. (Q.E.D.)

²⁴ $\pi_b^{-1} : M_b \cdots \rightarrow \tilde{M}_b$ の blow-up による不確定点除去 $\nu : V \rightarrow M_b$ をとり, その例外因子を $\cup_{j \in J} F_j$, 誘導される $\tilde{M}_b$ への正則写像を $\mu : V \rightarrow \tilde{M}_b$ とする. 構成から, $P = \sum_{j \in J} -c_j F_j$ ($c_j > 0$) の形の ν -ample 因子がある. 他方, $Q = \mu^*(\tilde{L}|_{\tilde{M}_b})$ は, そのサポートが $\cup_{j \in J} F_j$ に含まれる効果的 nef 因子である. 特に ν -nef でもある. $Q \neq 0$ とする. このとき, P と Q の適当な正数係数の 1 次結合を作ることによって, すべての $j \in J$ に対して $d_j \leq 0$ でありかつ, ある j_0 について $d_{j_0} = 0$ であるような ν -ample 因子 $R = \sum d_j F_j$ ができるとなるが, これは矛盾である. ν で潰れる曲線 $C \subset F_{j_0}$ (blow-up で作っているのだから) に対し, 係数の条件から $(R, C) \leq 0$ でなければならないからである.

Step 2. $I_S \otimes L = \pi_*(I_E \otimes \tilde{L}) = \pi_*\tilde{f}^*A$.

(証明) $\tilde{L} = \pi^*L$ だから, 第 1 式は Step 1 と射影公式から従う. 因子として $\tilde{L} = \tilde{f}^*A + E$ であることから, 第 2 式が従う. (Q.E.D.)

Step 3. $h^1(I_S \otimes L) = 0$.

(証明) Step 2 により, $h^1(\pi_*\tilde{f}^*A) = 0$ を示せばよい. Leray のスペクトル系列 ($\tilde{f}^*A$ と π に適用) の端写像を考えて, 完全系列

$$0 \longrightarrow H^1(\pi_*(\tilde{f}^*A)) \longrightarrow H^1(\tilde{f}^*A)$$

ができる. 従って, $h^1(\tilde{f}^*A) = 0$ を示せば十分である. 再び, Leray のスペクトル系列 ($\tilde{f}^*A$ と $\tilde{f}$ に適用) の端写像を考えて, 完全系列

$$0 \longrightarrow 0 = H^1(A) \longrightarrow H^1(\tilde{f}^*A) \longrightarrow H^0(R^1\tilde{f}_*\mathcal{O}_{\tilde{M}} \otimes A)$$

ができる. 従って, $H^0(R^1\tilde{f}_*\mathcal{O}_{\tilde{M}} \otimes A) = 0$ を示せば十分である. それには, $R^1\tilde{f}_*\mathcal{O}_{\tilde{M}} = 0$ が言えれば十分である. 主張 1 により, $h^1(\mathcal{O}_{\tilde{M}_b}) = 0$ が一般の $b \in \mathbf{P}^1$ に対して成り立つから, $R^1\tilde{f}_*\mathcal{O}_{\tilde{M}}$ は $\mathbf{P}^1$ の摩天楼層である. 従って, $h^0(R^1\tilde{f}_*\mathcal{O}_{\tilde{M}}) = 0$ を示せばよいことになる. 以下, この等式を示す. Leray のスペクトル系列 ($\mathcal{O}_{\tilde{M}}$ と $\tilde{f}$ に適用) の端写像 (の 3 項目以降) を考えて, 完全系列

$$H^1(\mathcal{O}_{\tilde{M}}) \longrightarrow H^0(R^1\tilde{f}_*\mathcal{O}_{\tilde{M}}) \longrightarrow H^2(\mathbf{P}^1, \tilde{f}_*\mathcal{O}_{\tilde{M}})$$

ができる. $\tilde{M}$ は超 Kähler 多様体と双有理型同値だから, $H^1(\mathcal{O}_{\tilde{M}}) = 0$ である. また, $\mathbf{P}^1$ は 1 次元だから, $H^2(\mathbf{P}^1, \tilde{f}_*\mathcal{O}_{\tilde{M}}) = 0$ である. 従って, $H^0(R^1\tilde{f}_*\mathcal{O}_{\tilde{M}}) = 0$ である. (Q.E.D.)

Step 4. $\chi(L|S) = 0$.

(証明) m を任意の整数とする. Fujiki の関係式 (定理 (3.3)(4)) と $q_M(mL) = q_M(\mathcal{O}_M) = 0$ により,

$$\chi(mL) = \chi(\mathcal{O}_M) = \sum_{i=0}^4 (-1)^i h^0(\Omega_M^i) = 3.$$

また, $S = D_1 \cap D_2 (D_i \in |L|)$ だから, その局所方程式から導かれる完全系列 (Koszul resolution)

$$0 \longrightarrow L^* \longrightarrow \mathcal{O}_M \oplus \mathcal{O}_M \longrightarrow I_S \otimes L \longrightarrow 0$$

ができる. これより,

$$\chi(I_S \otimes L) = 2\chi(\mathcal{O}_M) - \chi(L^*) = 3$$

を得る. これと完全系列

$$0 \longrightarrow I_S \otimes L \longrightarrow L \longrightarrow L|S \longrightarrow 0$$

により

$$\chi(L|S) = \chi(L) - \chi(I_S \otimes L) = 3 - 3 = 0$$

である. (Q.E.D.)

Step 5. $h^1(L) = 0$.

(証明) S の定め方により, $H^0(I_S \otimes L) \simeq H^0(L)$ である. また, Step 3 により, $H^1(I_S \otimes L) = 0$ である. 故に, 完全系列

$$0 \longrightarrow H^0(I_S \otimes L) \longrightarrow H^0(L) \longrightarrow H^0(L|S) \longrightarrow H^1(I_S \otimes L)$$

により, $H^0(L|S) = 0$ である. $S = D_1 \cap D_2 (D_i \in |L|)$ は純次元 2 の局所完全交差だから, S の双対層は $\omega_S = 2L|S$ であり (添加公式), Serre の双対定理が成り立つ. 故に,

$$h^2(L|S) = h^0(L^* + 2L|S) = h^0(L|S) = 0.$$

$\chi(L|S) = 0$ (Step 4) に $h^2(L|S) = h^0(L|S) = 0$ を代入して, $h^1(L|S) = 0$ を得る. このとき, 完全系列

$$0 = H^1(I_S \otimes L) \longrightarrow H^1(L) \longrightarrow H^1(L|S) = 0$$

により, $H^1(L) = 0$ である. (Q.E.D.)

こうして主張 2 が確かめられた. (Q.E.D.)

主張 3 $h^{1,1}(M) \geq 2$. 特に, 対 (M, L) は自明でない変形をもつ.

証明 $TM \simeq \Omega_M^1$ だから, $h^{1,1}(M) = h^1(TM)$ であり, M の変形は unobstructed である ([Bo1]). 従って, $h^{1,1}(M)$ は M の倉西空間の次元である. 局所 Torelli の定理 ([Be], [GHJ, Part III]) により, 対 (M, L) の変形は倉西空間において余次元 1, つまり, $h^{1,1}(M) - 1$ 次元である. こうして, 後半は前半から従う. 前半を示そう. もし, そうでなければ, $h^{1,1}(M) = 1$ であり, $H^{1,1}(M)$ は 1 つの Kähler 類で張られる. 従って, $NS(M) \subset H^{1,1}(M)$ は双曲型または楕円型になるが, これは考えている状況 ($NS(M)$ は放物型) と相入れない. (Q.E.D.)

以上を準備に定理 (2) の証明を完結させよう. 主張 3 により, (M, L) は 1 次元の非自明な変形をもつから, それを $p: (\mathcal{M}, \mathcal{L}) \longrightarrow \Delta$, $(M, L) = (M_0, L_0)$ とおく. また, (M_t, L_t) で $t \in \Delta$ 上のファイバーを表す.

証明の鍵は Fujiki の稠密性定理 (定理 (3.2) の注) を用いて, 射影的な場合に帰着させることである.

Fujiki の稠密性定理により, M_{t_k} がすべて射影的であるような, 0 に収束する点列 $\{t_k\} \subset \Delta$ がある. また, やや細かいことではあるが, $\Delta_1 := \{t \in \Delta | a(M_t) \geq 2\}$ は可算集合でなければならないことも注意しておく²⁵.

主張 2 により, Grauert の定理を $p_*\mathcal{L}$ に適用できて, $p_*\mathcal{L}$ は, Δ 上の階数 2 の (局所) 自由層であり, base change property をみたす. 従って, $p_*\mathcal{L}$ に対応して, Δ 上の支配的有理型写像

$$\varphi: \mathcal{M} \cdots \rightarrow \mathcal{B} = \mathbf{P}^1 \times \Delta$$

ができて, φ を $t \in \Delta$ 上に制限した写像 φ_t は, $|L_t|$ で定まる有理型写像

$$\Phi_{L_t}: M_t \cdots \rightarrow \mathbf{P}^1$$

²⁵そうでなければ, Néron-Severi 群の可算性により, $\mathcal{M}$ 上の直線束 $\mathcal{D}$ があって, 一般の $t \in \Delta$ に対して $\Phi_{|\mathcal{D}_t|}$ による M_t の像は 2 次元以上になる. 従って, 次元の上半連続性を $\pi_*\mathcal{D}$ に付随する Δ 上の相対有理型写像に適用することにより, $\Phi_{|\mathcal{D}_0|}$ による $M_0 = M$ の像の次元も 2 次元以上になってしまい, 仮定 $a(M) = 1$ に反するからである.

と一致する. $b \in \mathbf{P}^1$ を $\mathbf{P}^1$ の一般点とし, $F_t \subset M_t$ を φ_t の b 上のファイバーとする. また, この写像により, $\Delta \setminus \Delta_1$ の点 t に対しても $a(M_t) = 1$ であることに注意しよう.

次は [AC, 定理 (3.6)] の特別な場合である.

命題 8 X を 4 次元射影的超ケーラー多様体, $\varphi: X \cdots \rightarrow \mathbf{P}^1$ をファイバーが連結な支配的有理写像とする. このとき, 一般の $b \in \mathbf{P}^1$ に対して, $\kappa(X_b) > 0$ である. ただし, $\kappa(X_b)$ は b 上のファイバーの非特異モデルの小平次元である.

従って, 次の主張が言えれば, 命題 (5.4.7) ($X = M_{t_k}$ に適用) との間に矛盾が生じ, 主定理 (2) の証明が完結することになる:

主張 4 $\kappa(F_{t_k}) \leq 0$ であるような t_k がある.

証明 $\nu: \tilde{M} \rightarrow M$ を φ の不確定点除去写像とし, $\tilde{\varphi}: \tilde{M} \rightarrow B = \mathbf{P}^1 \times \Delta$ を誘導される正則写像とする. $\tilde{\varphi}$ を $\{b\} \times \Delta$ に制限して得られる写像 $\psi: \tilde{F} \rightarrow \Delta$ を考える.

今までは, $\psi: \mathbf{P}^1 \times \Delta$ を「縦に切って」考えていたが, ここからは「横に切って」考えるのである.

以下, $t \in \Delta$ 上のファイバー $\psi^{-1}(t)$ のことを $\tilde{F}_t$ と書くことにする. 必要ならば, 0 を $\Delta \setminus \Delta_1$ の別の点におきかえる²⁶ことで, 最初から $\tilde{F}_0$ は非特異としてよい. このとき, $t_k \in \Delta$ 上のファイバー $\tilde{F}_{t_k}$ (k は十分大) も非特異であり, F_{t_k} と双有理である.

他方, 主張 1 により, $a(\tilde{F}_0) = 0$ だから, すべての正の整数 M に対して, $h^0(MK_{\tilde{F}_0}) \leq 1$ である. 従って, 上半連続性により, 各 M に対して, すべての $t \in U_M$ ならば $h^0(MK_{\tilde{F}_t}) \leq 1$ であるような開集合 $0 \in U_M \subset \Delta$ がとれる. 特に, すべての $t_k \in U_M$ に対して $h^0(MK_{\tilde{F}_{t_k}}) \leq 1$ である. ここから, 十分大きな k に対して, $\kappa(\tilde{F}_{t_k}) \leq 0$ であることを言いたいのであるが, 1 つ気懸かりなのは,

$$\bigcap_{M>0} U_M = \{0\}$$

になってしまわないかということである.

この懸念を解消してくれるのが, Beauville, Kawamata, Meng-Chen, Hacon-McKernan, Fujino-Mori 等の結果と合わせて, 最終的には Viehweg と De-Qi Zhang [VZ] により確立された次の定理 (3 次元 Effective Iitaka Theorem) である:

定理 8 正の整数 $M_3 > 0$ (X によらない) があって, すべての 3 次元非特異射影代数多様体に対して, $\Phi_{|M_3K_X|}$ は X の Kodaira fibration を与える. 特に, $\kappa(X) = \dim \text{Im} \Phi_{|M_3K_X|}$ である.

そこで, $M = M_3$ に選ぶ. このとき, k を十分大きくとれば, $t_k \in U_{M_3}$ である. このとき, $h^0(M_3K_{\tilde{F}_{t_k}}) \leq 1$ だから, 定理 (5.4.8) により, $\kappa(F_{t_k}) \leq 0$ である. こうして主張 4 が示された. (Q.E.D.)

以上で主定理 (2) が示された. (Q.E.D.)

²⁶ 不確定点除去写像は具体的にかけるわけではないので, $t = 0$ 上では何か変なことがおきていやしいかという心配が残るためである. Δ_1 に関する先のやや細かい注意はこの心配を解消するためのものである.

参考文献

- [AC] E. Amerik, F. Campana, *Fibrations mero-morphes sur certaines varietes de classe canonique triviale*, Pure Appl. Math. Q. **4** (2008) 509–545.
- [BHPV] W. Barth, K. Hulek, C. Peters, A. Van de Ven, *Compact complex surfaces*, Second edition. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [Be] A. Beauville, *Variété Kähleriennes dont la première classe de chern est nulle*, J. Differential Geom. **18** (1983) 755–782.
- [Bo1] F. Bogomolov, *Hamiltonian Kähler manifolds*, Soviet. Math. Dokl. **19** (1978) 1462–1465.
- [Bo2] F. Bogomolov, *On the cohomology ring of a simple hyper-Kähler manifold (on the results of Verbitsky)*, Geom. Funct. Anal. **6** (1996), no. 4, 612–618.
- [Ca] F. Campana, *Coréduction algébrique d'un espace analytique faiblement kählérien compact*, Invent. Math. **63** (1981) 187–223.
- [COP08] F. Campana, K. Oguiso, Th. Peterzell, *Non-algebraic hyperkähler manifolds*, ArXiv:0804.1682., submitted.
- [Fu1] A. Fujiki, *On primitively symplectic compact Kähler V -manifolds of dimension four* In: Classification of algebraic and analytic manifolds (Katata, 1982), Progr. Math. Birkhauser Boston **39** (1983) 71–250.
- [Fu2] A. Fujiki, *On the structure of compact complex manifolds in $\mathcal{C}$* , Adv. Stud. Pure Math. **1**, North-Holland, Amsterdam (1983) 231–302.
- [Fu3] A. Fujiki, *On the de Rham cohomology group of a compact Kähler symplectic manifold* In: Algebraic geometry, Sendai, 1985, Adv. Stud. Pure Math. **10** (1987) 105–165.
- [Fn] O. Fujino, *On Kawamata's theorem*. Preprint 2008
- [FM] O. Fujino, S. Mori, *A canonical bundle formula*. J. Diff. Geom. **56** (2000), 176–188.
- [Fs] 藤崎源二郎, 体と Galois 理論 I, II, III, 岩波基礎数学講座, 岩波書店.
- [GHJ] M. Gross, D. Huybrechts and D. Joyce, *Calabi-Yau manifolds and related geometries*, Springer-Verlag (2003).
- [Hu1] D. Huybrechts, *Compact hyperkähler manifolds: basic results*, Invent. Math. **135** (1999) 63–113. Erratum: "Compact hyperkähler manifolds: basic results" Invent. Math. **152** (2003) 209–212.
- [Hu2] D. Huybrechts, *The Kähler cone of a compact hyperkähler manifold*, Math. Ann. **326** (2003) 499–513.
- [Ka] Y. Kawamata, *Pluricanonical systems on minimal algebraic varieties*, Invent. Math. **79** (1985) 567–588.
- [Ma1] D. Matsushita, *On fibre space structures of a projective irreducible symplectic manifold*, Topology **38** (1999) 79–83. Addendum: "On fibre space structures of a projective irreducible symplectic manifold", Topology **40** (2001) 431–432.
- [Ma2] D. Matsushita, *Equidimensionality of Lagrangian fibrations on holomorphic symplectic manifolds*, Math. Research Letters **7** (2000) 389–391.

- [Na] N. Nakayama, *The lower semicontinuity of the plurigenera of complex varieties*, Adv. Stud. Pure Math. **10** North-Holland, Amsterdam (1987) 551–590.
- [Od1] K. O’Grady, *Desingularized moduli spaces of sheaves on a K3*, J. Reine Angew. Math. **512** (1999) 49–117.
- [Od2] K. O’Grady, *A new six-dimensional irreducible symplectic variety*, J. Algebraic Geom. **12** (2003) 435–505.
- [Og] 小木曾啓示, Salem 多項式と超 Kähler 多様体の双有理型変換群, 数学 **59** 巻 (2007) 1–23.
- [Ra1] A. Rapagnetta, *Topological invariants of O’Grady’s six dimensional irreducible symplectic varieties*, Math. Z. **256** (2007) 1–34.
- [Ra2] A. Rapagnetta, *On the Beauville form of the known irreducible symplectic manifolds*, Math. Ann. **340** (2008) 77–95.
- [Sh] T. Shioda, *The period map of Abelian surfaces*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **25** (1978) 47–59.
- [Ue] K. Ueno, *Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces*, Lecture Notes in Mathematics **439** Springer-Verlag, Berlin-New York (1975).
- [Ve] M. Verbitsky, *Cohomology of compact hyper-Kähler manifolds and its applications*, Geom. Funct. Anal. **6** (1996) 601–611.
- [VZ] E. Viehweg, De-Qi Zhang, *Effective Iitaka fibrations*, arXiv:0707.4287.
- [Vo] C. Voisin, *On the homotopy types of compact Kähler and complex projective manifolds*, Invent. Math. **157** (2004) 329–343.