

古典型二重シューベルト多項式と その拡張について

池田 岳 (岡山理科大学)・成瀬 弘 (岡山大学)

1 概要

この報告では、代数学シンポジウムでの講演に補足を追加する形で論文 [7] で得られた主要な結果の概略について述べる．ここでいう二重シューベルト多項式とは、旗多様体のトーラス同変コホモロジーにおけるシューベルト類を代表する多項式のことである．我々は、次の 2 通りの方法で B, C, D 型の二重シューベルト多項式 (cf. 3.1 主定理) を構成した．

(1) transition equation (cf. 3.3 (1)) を用いてグラスマン元に帰着させる．

(2) 最長元 w_0 の多項式 (cf. 3.4) に divided difference を適用する．

また、用いた変数の幾何学的意味をつけた (cf. 3.5)．同変 K 理論の場合への拡張も考えた (cf. 4 節)．

1.1 二重シューベルト多項式の歴史

シューベルト多項式という名称は、Lascoux-Schützenberger の論文 [15] で初めて登場した．さらに、二重シューベルト多項式というものは、Lascoux により [14] において導入された．そこでは、旗多様体の接空間の特性類を記述するために二重に組み合わせたシューベルト多項式が使われた．ちなみに、 K -theory における対応した多項式も彼らにより同年の別の論文で定義され、それはグロタンディエック多項式とよばれた．二重シューベルト多項式についてはその後、Fulton が、[4] で、退化跡 (degeneracy loci) のコホモロジー類を記述する式に登場することを指摘した．ここまでは、 A 型の Lie 群に対するシューベルト多項式であり、通常、シューベルト多項式といえばこの Lascoux-Schützenberger によって定められた A 型の多項式をさす場合が多い．

一方, Pragacz は, [16] において B,C,D 型のグラスマン多様体のシューベルト類が Schur の P -, Q -関数に対応していることを見抜き, Józefiak も [10] で同様のことを指摘している. Fulton は, B,C,D 型の場合に, A 型と同様に, 退化跡を表す多項式を [5] で定義した. これは, 実質 B,C,D 型の二重シューベルト多項式と呼べるものである. Kresch-Tamvakis も [13] において, B,C,D 型の二重シューベルト多項式を構成している.

これらの二重シューベルト多項式を, 同変コホモロジー類として捉えることは比較的最近になって行われた. A 型では, グラスマンの場合に factorial シューア関数となることは Lascoux によって既に知られていたが, Knutson-Tao は, [12] で同変コホモロジー類となることを明らかにした. また, 旗多様体の場合は, Knutson-Miller の論文 [11] で示された. C 型グラスマンについては [6], B,D も含む古典型グラスマンについては [8] で factorial シューア P -, Q -関数が, 同変コホモロジーのシューベルト類になっていることを示した. 我々が [7] で構成した二重シューベルト多項式は, Billey-Haiman [2] の多項式の二重化になっていて Fomin-Kirillov [3] の多項式の二重化と見ることもできる. 表でまとめると次のようになる.

グラスマン多様体 G/P のときのシューベルト多項式

	A 型	B 型	C 型	D 型	
H^*	$s_\lambda(z)$	$P_\lambda(x)$	$Q_\lambda(x)$	$P_\lambda(x)$	シューア関数
H_T^*	$s_\lambda(z t)$	$P_\lambda(x 0, t)$	$Q_\lambda(x t)$	$P_\lambda(x t)$	factorial シューア関数

旗多様体 G/B のときのシューベルト多項式

	A 型	B 型	C 型	D 型	
H^*	$\mathfrak{S}_w(z)$	$\mathfrak{B}_w(z; x)$	$\mathfrak{C}_w(z; x)$	$\mathfrak{D}_w(z; x)$	一重シューベルト多項式
H_T^*	$\mathfrak{S}_w(z, t)$	$\mathfrak{B}_w(z, t; x)$	$\mathfrak{C}_w(z, t; x)$	$\mathfrak{D}_w(z, t; x)$	二重シューベルト多項式

A 型二重シューベルト多項式については, 次のように定められている. 対称群 S_n の最長元 $w_0^{(n)}$ に対して, $\mathfrak{S}_{w_0^{(n)}}(z, t) = \prod_{i+j \leq n} (z_i - t_j)$ とし, $ws_i < w$ のとき $\mathfrak{S}_{ws_i}(z, t) = \partial_i \mathfrak{S}_w(z, t)$ として帰納的に定める. ただし, divided difference 作用素 ∂_i は, $\partial_i(f) = \frac{f - s_i^z(f)}{z_i - z_{i+1}}$ で定める. ここで, s_i^z は, z_i と z_{i+1} の置換として作用している.

以下では, 主として B,C,D 型の二重シューベルト多項式について説明する.

1.2 記号・用語等について

$G \supset P \supset B \supset T$ を, 複素数体上の連結半単純代数群およびそのパラボリック部分群, ボレル部分群, 極大トーラスとする. ワイル群 $W = N_G(T)/T$, ルート系 $R = R^+ \amalg R^-$, 単純ルート α_i と対応する単純鏡映 s_i などを通常記号とする. P に対応する W の部分群 W_P によるコセットの最短代表系を $W^P = W/W_P$ で表す. G/B を旗多様体といい, P が極大なパラボリック部分群のとき, G/P はグラスマン多様体という. B, C, D 型の場合, ここではさらに特定の P を選ぶ. (後述)

B_- を B の opposite ボレル部分群とする. すなわち $B_- \cap B = T$ となっている. このときブリュア分解から $G/P = \coprod_{w \in W^P} B_- wP/P$ となり,

各セル $X_w^\circ = B_- wP/P \simeq \mathbb{C}^{\dim G/P - \ell(w)}$ は, ただ一つの T -固定点 $e_w := wP/P$ を含む. またセルの閉包 $X_w := \overline{B_- wP/P}$ に他のセル X_v° が含まれるための条件は, Coxeter 群としての Weyl 群のブリュア・シェバレー半順序 $w \leq v$ が成り立つことである. シューベルト多様体 X_w は, 一般には特異点を持つが, 高々有理特異点である.

$w \in W$ に対して, X_w からシューベルト類 $\sigma_w = [X_w] \in H^{2\ell(w)}(G/B)$ が定まり, $\{\sigma_w\}_{w \in W}$ は, コホモロジー環 $H^*(G/B)$ の $\mathbb{Z}$ 基底となる. $\mathfrak{h}$ を T のリー環としたとき, 次のボレル表示が知られている.

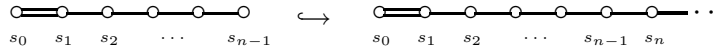
$$H^*(G/B) \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}[\mathfrak{h}^*]/I, \quad I = \langle (\mathbb{Q}[\mathfrak{h}^*]^W)^+ \rangle$$

2 古典型 Lie 群の旗多様体とその同変コホモロジー

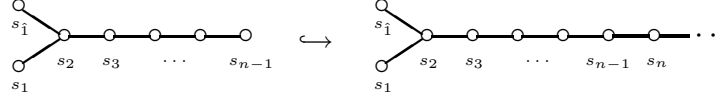
2.1 ワイル群とルート系

添字集合 $I_\infty^B = I_\infty^C = \{0, 1, 2, \dots\} = I_\infty$, $I_\infty^D = \{\hat{1}, 1, 2, \dots\} = I'_\infty$ を用いて, 無限ランクの Coxeter 群 (W_∞, I_∞) , (W'_∞, I'_∞) とその部分群 W_n , W'_n を次のコクセターグラフにより定める.

Type B_n, C_n : $W_n = \langle s_0, s_1, s_2, \dots, s_{n-1} \rangle \subset W_\infty = \langle s_0, s_1, s_2, \dots, s_{n-1}, s_n, \dots \rangle$



Type D_n : $W'_n = \langle s_{\hat{1}}, s_1, s_2, \dots, s_{n-1} \rangle \subset W'_\infty = \langle s_{\hat{1}}, s_1, s_2, \dots, s_{n-1}, s_n, \dots \rangle$



符号付き置換で表示する場合，生成元は $s_0 = (1, \bar{1})$, $s_{\bar{1}} = (1, \bar{2})(2, \bar{1})$, $s_i = (i, i+1)(\bar{i}, \bar{i+1})$, $i \geq 1$ となる．

ルート系および単純ルートは，以下の通りである．

$$\text{Type } B_n: R_n^+ = \{t_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{t_j \pm t_i \mid 1 \leq i < j \leq n\},$$

$$\text{Type } C_n: R_n^+ = \{2t_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{t_j \pm t_i \mid 1 \leq i < j \leq n\},$$

$$\text{Type } D_n: R_n^+ = \{t_j \pm t_i \mid 1 \leq i < j \leq n\}.$$

$$\text{Type } B_n: \alpha_0 = t_1, \quad \alpha_i = t_{i+1} - t_i \quad (1 \leq i \leq n-1),$$

$$\text{Type } C_n: \alpha_0 = 2t_1, \quad \alpha_i = t_{i+1} - t_i \quad (1 \leq i \leq n-1),$$

$$\text{Type } D_n: \alpha_{\bar{1}} = t_2 + t_1, \quad \alpha_i = t_{i+1} - t_i \quad (1 \leq i \leq n-1).$$

ワイル群の多項式環 $\mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]$ への作用は，次の通り．

$$s_0: s_0(t_1) = -t_1, s_0(t_i) = t_i, (2 \leq i \leq n),$$

$$s_{\bar{1}}: s_{\bar{1}}(t_1) = -t_2, s_{\bar{1}}(t_2) = -t_1, s_{\bar{1}}(t_i) = t_i, 3 \leq i \leq n,$$

$$s_i (2 \leq i \leq n-1): s_i \text{ は } t_i \text{ と } t_{i+1} \text{ の置換.}$$

2.2 古典型グラスマン多様体

$$\text{Type } A: Gr(n, n+m) = \{V \mid V \subset \mathbb{C}^{n+m}, \dim V = n\} = SL_{n+m}/P_n$$

$$\begin{aligned} \text{type } B: OG(n, 2n+1) &= \{V \mid V \subset \mathbb{C}^{2n+1}, \text{ isotropic }, \dim V = n\} \\ &= SO(2n+1)/P_0 \end{aligned}$$

$$\text{Type } C: LG(n) = \{V \mid V \subset \mathbb{C}^{2n}, \text{ isotropic }, \dim V = n\} = Sp(2n)/P_0$$

$$\text{Type } D: OG(n, 2n) = \{V \mid V \subset \mathbb{C}^{2n}, \text{ isotropic }, \dim V = n\} = SO(2n)/P_{\bar{1}}$$

$W^P = W/W_P$ は，グラスマン元の集合となる．ここで，B,C,D 型のとき，

$$w \in W_n \text{ がグラスマン元} \iff w(1) < \dots < w(n)$$

ただし， $\bar{n} < \dots < \bar{1} < 1 < \dots < n$ とする．

2.3 古典型旗多様体

$$\text{Type } A: \mathcal{F}_n^A = \{V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_n \mid V_i \subset \mathbb{C}^n, \dim V_i = i\} = SL_n/B$$

$$\begin{aligned}
\text{Type } B : \mathcal{F}_n^B &= \{V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n \mid V_i \subset \mathbb{C}^{2n+1}, \dim V_i = i, \\
&\quad V_n \text{ isotropic}\} = SO(2n+1)/B \\
\text{Type } C : \mathcal{F}_n^C &= \{V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n \mid V_i \subset \mathbb{C}^{2n}, \dim V_i = i, V_n \text{ isotropic}\} \\
&= Sp(2n)/B \\
\text{Type } D : \mathcal{F}_n^D &= \{V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n \mid V_i \subset \mathbb{C}^{2n}, \dim V_i = i, V_n \text{ isotropic}\}^\circ \\
&= SO(2n)/B
\end{aligned}$$

ここで、D 型の上付き $\circ$ は、連結成分のうちの 1 つを意味する。以下では、これらこうち 1 つを $\mathcal{F}_n$ で表し、その型の Wey 群を W_n で表すことにする。

2.4 同変コホモロジー

ここでは、トーラス同変コホモロジーの定義について、簡単に復習しておく。

複素 n 次元トーラス $T_n = (\mathbb{C}^*)^n$ が多様体 X に作用しているとき、

$$H_{T_n}^*(X) := H^*(ET_n \times_{T_n} X)$$

と定める。 ET_n は可縮空間で、 T_n が free に作用する。

$BT_n = ET_n/T_n$ は T_n の分類空間

特に、 $T_1 = \mathbb{C}^*$ が $X = pt$ に自明に作用する場合は、

$ET_1 \times_{T_1} pt = BT_1 = ET_1/T_1 = \mathbb{C}P^\infty$ で、

$$H_{T_1}^*(pt) = H^*(\mathbb{C}P^\infty) = \lim_{\infty \leftarrow k} H^*(\mathbb{C}P^k) = \lim_{\infty \leftarrow k} \mathbb{Z}[t]/(t^{k+1}) = \mathbb{Z}[t]$$

$H_{T_n}^*(pt) = \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]$ は多項式環で、 $H_{T_n}^*(X)$ は $H_{T_n}^*(pt)$ 代数となる。シューベルト多様体 X_w は $T = T_n$ -stable なので、 T -同変シューベルト類 $\sigma_w^T = [X_w]^T \in H_T^*(G/B)$ が定まる。局所化写像は、 T -固定点の集合 $\mathcal{F}_n^{T_n} = \{e_v \mid v \in W_n\}$ の包含写像 $\iota_n : \mathcal{F}_n^{T_n} \hookrightarrow \mathcal{F}_n$ から引き起こされる写像

$$\iota_n^* : H_{T_n}^*(\mathcal{F}_n) \longrightarrow H_{T_n}^*(\mathcal{F}_n^{T_n}) = \prod_{v \in W_n} H_{T_n}^*(e_v),$$

で、単射になる。局所化による σ_w^T の像の v 成分を $\sigma_w^T|_v$ で表す。

A 型の場合、二重シューベルト多項式 $\mathfrak{S}_w(z, t)$ を使うと、

$$\sigma_w^T|_v = \mathfrak{S}_w(v(t), t)$$

となっている。また、局所化の意味から $v \not\geq w$ なら $\sigma_w^T|_v = 0$ である。

旗多様体の自然な包含写像の列

$$\mathcal{F}_1 \hookrightarrow \mathcal{F}_2 \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \mathcal{F}_n \hookrightarrow \cdots$$

から対応する同変コホモロジーの列

$$H_{T_1}^*(\mathcal{F}_1) \longleftarrow H_{T_2}^*(\mathcal{F}_2) \longleftarrow \cdots \longleftarrow H_{T_n}^*(\mathcal{F}_n) \longleftarrow \cdots$$

が作られ, 極限の同変シューベルト類 $\sigma_w^{(\infty)} \in \varprojlim H_{T_n}^{2\ell(w)}(\mathcal{F}_n)$ を定めることができる. 以下では, 同変シューベルト類 σ_w^T および $\sigma_w^{(\infty)}$ とその局所化による像である多項式の族とを同一視することにする.

2.5 factorial シューア P -, Q -関数

ここでは, Ivanov[9] によって導入された factorial シューア P -, Q -関数について説明する. $a = (a_1, a_2, \dots)$ をパラメータとし, このパラメータを用いて, 変数 x の k 次の factorial power を $(x|a)^k := (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_k)$ により定める.

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ を strict partition とする. すなわち $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_r > 0, r \leq n$. また strict partition 全体の集合を SP で表す.

分割 λ に付随した n 変数 $x_1, \dots, x_n$ の factorial シューア P -関数を,

$$P_\lambda^{(n)}(x_1, \dots, x_n|a) := \frac{1}{(n-r)!} \sum_{w \in S_n} w \left((x_1|a)^{\lambda_1} (x_2|a)^{\lambda_2} \cdots (x_r|a)^{\lambda_r} \prod_{i \leq \ell, i < j \leq n} \frac{x_i + x_j}{x_i - x_j} \right)$$

で定める. ただし w は, $x_1, \dots, x_n$ の置換として作用する.

また, factorial シューア Q -関数は, $Q_\lambda^{(n)}(x_1, \dots, x_n|a) := 2^r P_\lambda(x|0, a)$ により定める. $a = 0$ とすると通常の n 変数シューア P -, Q -関数 $P_\lambda^{(n)}(x) = P_\lambda^{(n)}(x|0)$, $Q_\lambda^{(n)}(x) = Q_\lambda^{(n)}(x|0)$ となる. factorial シューア関数は無限変数 $x_1, x_2, \dots$ の $P_\lambda(x|a)$, $Q_\lambda(x|a)$ に拡張できる. ただし, $P_\lambda(x|a)$ については, 偶数個の変数 $x_1, \dots, x_{2m}$ の極限とする.

例 $e_i(a_1, \dots, a_k)$ を $a_1, \dots, a_k$ の i 次の基本対称式とする. $\lambda = (k)$ のとき

$$P_k^{(n)}(x|a) = \sum_{i=1}^k (-1)^{k-i} P_i^{(n)}(x) e_{k-i}(a_1, \dots, a_k) \text{ if } n = \text{偶数}$$

$$P_k^{(n)}(x|a) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} P_i^{(n)}(x) e_{k-i}(a_1, \dots, a_k) \text{ if } n = \text{奇数}.$$

事実

$P_1(x), P_3(x), \dots$ は, 代数的に独立で, $P_\lambda(x)$ はこれらの多項式として表示できる.

$\Gamma' := \mathbb{Z}[P_1(x), P_3(x), \dots]$ と定めると $\{P_\lambda(x)\}_{\lambda \in SP}$ は Γ' の $\mathbb{Z}$ -基底になり, $\{P_\lambda(x|t)\}_{\lambda \in SP}$ は, $\Gamma' \otimes \mathbb{Z}[t]$ の $\mathbb{Z}[t]$ -基底になる. Γ' の部分環 Γ を

$\Gamma := \mathbb{Z}[Q_1(x), Q_2(x), \dots]$ と定めると $\{Q_\lambda(x)\}_{\lambda \in SP}$ は Γ の $\mathbb{Z}$ -基底になり ,
 $\{Q_\lambda(x|t)\}_{\lambda \in SP}$ は , $\Gamma \otimes \mathbb{Z}[t]$ の $\mathbb{Z}[t]$ -基底となる .

$Q_k(x)$ の母関数は ,

$$f(u) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1 + x_i u}{1 - x_i u} = \sum_{k \geq 0} Q_k(x) u^k = 1 + 2 \sum_{k \geq 1} P_k(x) u^k$$

と表すことができ , $f(u)f(-u) = 1$ なので

$$Q_i(x)^2 + 2 \sum_{j=1}^i (-1)^j Q_{i+j}(x) Q_{i-j}(x) = 0 \quad \text{for } i \geq 1.$$

あるいは , P -関数の場合は ,

$$P_i(x)^2 + 2 \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^j P_{i+j}(x) P_{i-j}(x) + (-1)^i P_{2i}(x) = 0 \quad \text{for } i \geq 1.$$

となっている . これらの 2 次の関係式が B,C,D 型のグラスマン多様体の
 コホモロジー環を記述する際のキーポイントとなっている .

2.6 divided difference 作用素

以下では , C 型の場合で説明する .

$R_\infty = \mathbb{Z}[t_1, t_2, \dots] \otimes \mathbb{Z}[z_1, z_2, \dots] \otimes \Gamma$ 上の作用素 $\delta_i, \partial_i: R_\infty \rightarrow R_\infty$,
 $i = 0, 1, 2, \dots$ を次で定める .

$$\delta_i(f) = \frac{f - s_i^t(f)}{\alpha_i}, \quad \partial_i(f) = \frac{f - s_i^z(f)}{\omega(\alpha_i)}$$

ただし , involution $\omega: R_\infty \rightarrow R_\infty$ は

$$\omega(z_i) = -t_i, \quad \omega(t_i) = -z_i, \quad \omega(Q_i(x)) = Q_i(x) .$$

このとき $\partial_i = \omega \delta_i \omega$ となっている . また , Γ への s_0^t, s_0^z の作用は , $s_0^t Q_k(x) =$
 $Q_k(x) + 2 \sum_{i=1}^k (-t_1)^i Q_{k-i}(x)$ および $s_0^z Q_k(x) = Q_k(x) + 2 \sum_{i=1}^k z_1^i Q_{k-i}(x)$ で
 定める . s_i^t の t への作用は , 2.1 で定めたもので , z は固定する . s_i^z につ
 いては 2.1 と同様の作用を z に対して行い , t は固定する .

3 二重シューベルト多項式

3.1 主定理

各型 $X = B, C, D$ について $R_\infty^X = \mathbb{Z}[t] \otimes \mathbb{Z}[z] \otimes \Gamma^X$ とする .

ただし , $\Gamma^B = \Gamma^D = \Gamma' = \mathbb{Z}[P_k(x)]_{k=1,2,\dots}$, $\Gamma^C = \Gamma = \mathbb{Z}[Q_k(x)]_{k=1,2,\dots}$

このとき次の条件 1), 2), 3) を満たす多項式の族 $\{\mathfrak{S}_w = \mathfrak{S}_w(z, t; x) \in R_\infty^X\}_{w \in W_\infty^X}$ が , ただ一通り存在する . $\mathfrak{S}_w$ を X 型の二重シューベルト多項式と呼ぶ .

1) すべての $i \in I_\infty^X$, に対して $(I_\infty^B = I_\infty^C = \{0, 1, 2, \dots\}, I_\infty^D = \{\hat{1}, 1, 2, \dots\})$

$$\partial_i \mathfrak{S}_w = \begin{cases} \mathfrak{S}_{ws_i} & \text{if } \ell(ws_i) < \ell(w) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad \delta_i \mathfrak{S}_w = \begin{cases} \mathfrak{S}_{s_i w} & \text{if } \ell(s_i w) < \ell(w) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

2) $\mathfrak{S}_e = 1$

3) $\mathfrak{S}_w$ は , $w = e$ 以外は定数項を持たない .

3.2 $\mathfrak{S}_w(z, t; x)$ の基本的性質

1. 二重シューベルト多項式 $\{\mathfrak{S}_w\}_{w \in W_\infty^X}$ は $R_\infty^X = \mathbb{Z}[t] \otimes \mathbb{Z}[z] \otimes \Gamma^X$ の $\mathbb{Z}[t]$ 基底となる .

2. 各 $w \in W_\infty^X$ について

$\mathfrak{S}_w(z, 0; x) = \mathfrak{S}_w(z; x)$ は , Billey-Haiman [2] の多項式 .

3. (Symmetry) $\mathfrak{S}_w(-t, -z; x) = \mathfrak{S}_{w^{-1}}(z, t; x)$.

4. (Positivity) $\mathfrak{S}_w(z, t; x) = \sum_{\lambda \in \mathcal{SP}} f_{w,\lambda}^X(z, t) Q_\lambda^X(x)$, と展開したとき

$w \in W_n^X$ ならば $f_{w,\lambda}^X(z, t) \in \mathbb{N}[-t_1, \dots, -t_{n-1}, z_1, \dots, z_{n-1}]$.

5. $w \in W_\infty^A \subset W_\infty^X$ なら $\mathfrak{S}_w(z, t; 0) = \mathfrak{S}_w(z, t)$ は A 型二重シューベルト多項式

例

C 型 二重シューベルト多項式

$$\mathfrak{C}_e = 1, \quad \mathfrak{C}_{s_0} = Q_1(x), \quad \mathfrak{C}_{s_1} = Q_1(x) + z_1 - t_1,$$

$$\mathfrak{C}_{s_1 s_0} = Q_2(x) - t_1 Q_1(x), \quad \mathfrak{C}_{s_0 s_1} = Q_2(x) + z_1 Q_1(x),$$

$$\mathfrak{C}_{s_0 s_1 s_0} = Q_{2,1}(x), \quad \mathfrak{C}_{s_1 s_0 s_1} = Q_3(x) + (z_1 - t_1)Q_2(x) - t_1 z_1 Q_1(x),$$

$$\mathfrak{C}_{s_0 s_1 s_0 s_1} = Q_{3,1}(x) + (z_1 - t_1)Q_{2,1}(x), \dots$$

D 型 二重シューベルト多項式

$$\mathfrak{D}_e = 1, \quad \mathfrak{D}_{s_{\bar{1}}} = P_1(x), \quad \mathfrak{D}_{s_1} = P_1(x) + z_1 - t_1,$$

$$\mathfrak{D}_{s_{\bar{1}} s_1} = P_2(x) + (z_1 - t_1)P_1(x), \dots$$

3.3 普遍局所化写像

主定理の証明のために、次の普遍局所化写像を用いる。(C型で説明する)

$R_\infty = \mathbb{Z}[t] \otimes \mathbb{Z}[z] \otimes \Gamma$ からの環準同型写像 Φ を、

$$\Phi = (\Phi_v)_{v \in W_\infty} : R_\infty \rightarrow \prod_{v \in W_\infty} \mathbb{Z}[t]_v$$

$$\Phi_v(t_i) = t_i, \quad \Phi_v(z_i) = t_{v(i)}, \quad \Phi_v(Q_k(x)) = Q_k(t_v)$$

で定めると Φ は、単射で像は、シューベルト類 $\sigma_w^{(\infty)}$ で張られる $\mathbb{Z}[t]$ -部分空間に一致する。ここで、 t_v は、 $v \in W_n$ を 1 から n の符号付き置換で表示したときのバーがついた (負の) 番号を抜き出して添え字とした変数列。たとえば、 $v = [2, \bar{4}, 1, \bar{5}, \bar{3}]$ のとき、 $t_v = (t_4, t_5, t_3, 0, 0, \dots)$ 。

同変 Chevalley formula を使うと、 z_i の Φ による像は、次のように表せる。

$$\text{Type } C: \Phi(z_i) = \sigma_{s_i}^{(\infty)} - \sigma_{s_{i-1}}^{(\infty)} + t_i \quad (i \geq 1),$$

$$\text{Type } D: \Phi(z_1) = \sigma_{s_1}^{(\infty)} - \sigma_{s_{\bar{1}}}^{(\infty)} + t_1, \quad \Phi(z_2) = \sigma_{s_2}^{(\infty)} - \sigma_{s_1}^{(\infty)} - \sigma_{s_{\bar{1}}}^{(\infty)} + t_2,$$

$$\Phi(z_i) = \sigma_{s_i}^{(\infty)} - \sigma_{s_{i-1}}^{(\infty)} + t_i \quad (i \geq 3)$$

Transition equation は、次で表される式。 $w = [w(1), w(2), \dots] \in W_\infty$ に対し、 r を $w(r) > w(r+1)$ を満たす最大のものとする (このような r が存在しないのは w がグラスマン元するとき。) 一重シューベルト多項式の場合は Billey[1] による。

$$\sigma_w^{(\infty)} = (\Phi(z_r) - v(t_r)) \sigma_v^{(\infty)} + \sum_{1 \leq i < r} \sigma_{vt_{ir}}^* + \sum_{i \neq r} \sigma_{vs_{ir}}^* + \chi \sigma_{vs_{rr}}^*, \quad (1)$$

ここで, $t_{ir} = (i, r)(\bar{i}, \bar{r})$, $s_{i,r} = (i, \bar{r})(r, \bar{i})$, および $s_{rr} = (r, \bar{r})$ は鏡映. $v = wt_{r,s}$. ただし, s は, $s > r$ で $w(s) < w(r)$ となる最大のもの. σ_z^* は, $\ell(z) = \ell(w)$ のとき $\sigma_z^{(\infty)}$, それ以外は 0 を表す. また, χ は, B, C, D の型に応じて 2, 1, 0 の値をとる定数.

Weyl 群の $H_T^*(\mathcal{F})$ への右作用 w^R , 左作用 w^L を次で定める (局所化した環の元つまり Φ の像に対して記述する)

$$(w^R \eta)|_v = \eta|_{vw} \quad (w^L \eta)|_v = w \cdot (\eta|_{w^{-1}v}).$$

$H_T^*(\mathcal{F})$ 上の (幾何学的に定まる) divided difference ∂_i and δ_i は, 次の通り.

$$(\partial_i \eta)|_v = \frac{\eta|_v - (s_i^R \eta)|_v}{-v(\alpha_i)}, \quad (\delta_i \eta)_v = \frac{\eta|_v - (s_i^L \eta)|_v}{\alpha_i} \quad (v \in W).$$

このとき ∂_i および δ_i と, 普遍局所化写像 Φ は交換可能となっている.

3.4 最長元の公式

$\rho_n = (n, n-1, \dots, 1)$ とする. また, $\rho_n + \rho_{n-1} = (2n-1, 2n-3, \dots, 1)$

定理 [7]

$$\mathfrak{B}_{w_0^{(n)}}(z, t; x) = P_{\rho_n + \rho_{n-1}}(x|0, t_1, -z_1, t_2, -z_2, \dots, t_{n-1}, -z_{n-1})$$

$$\mathfrak{C}_{w_0^{(n)}}(z, t; x) = Q_{\rho_n + \rho_{n-1}}(x|t_1, -z_1, t_2, -z_2, \dots, t_{n-1}, -z_{n-1})$$

$$\mathfrak{D}_{w_0^{(n)}}(z, t; x) = P_{2\rho_{n-1}}(x|t_1, -z_1, t_2, -z_2, \dots, t_{n-1}, -z_{n-1})$$

証明には, factorial シューア P -, Q -関数の divided difference についての漸化式を使う.

注意: factorial シューア P -, Q -関数のパラメータは, 一般には変数の順序によるが上記の場合 t_i と $-z_i$ の順序は逆にしても同じものになる.

3.5 変数の幾何学的説明 (C 型の場合)

C_n 型旗多様体 $\mathcal{F}_n^C$ 上に, 次のトートロジカルベクトル束の列がある .

$$0 = \mathcal{V}_{n+1} \subset \mathcal{V}_n \subset \cdots \subset \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{E}, \quad \text{rank } \mathcal{V}_i = n - i + 1, \text{rank } \mathcal{E} = 2n$$

ここで, $\mathcal{E} = \mathbb{C}^{2n} \times \mathcal{F}_n^C$ で, $\mathcal{V}_i$ の $F_\bullet = (F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_n) \in \mathcal{F}_n^C$ でのファイバーは, F_{n+1-i} である . これから, 1 番目の同変チャーン類として $z_i = c_1^T(\mathcal{V}_i/\mathcal{V}_{i+1})$ を定める .

また, $\mathbb{C}^{2n}$ の標準基底 $e_n^*, \dots, e_1^*, e_1, \dots, e_n$ に対応した自明ベクトル束の直和分解 $\mathcal{E} = \mathcal{L}_n^* \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_1^* \oplus \mathcal{L}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_n$ に対して, $t_i = -c_1^T(\mathcal{L}_i)$ とする .

注意 : ここではこれらの z_i, t_i ($i = 1, \dots, n$) は不定元ではなくコホモロジー類 (より正確には, 同変コホモロジー $H_{T_n}^2(\mathcal{F}_n^C)$ の元) を表している .

このとき, $\mathcal{F}_n^C$ 上のベクトル束の完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{V}_1 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{V}_1^* \longrightarrow 0$$

から $c^T(\mathcal{V}_1)c^T(\mathcal{V}_1^*) = c^T(\mathcal{E})$ したがって

$\prod_{i=1}^n (1 + z_i)(1 - z_i) = \prod_{i=1}^n (1 + t_i)(1 - t_i)$ がわかる . この関係式から $\prod_{i=1}^n \frac{1-z_i}{1-t_i} = \prod_{i=1}^n \frac{1+t_i}{1-z_i} = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k$ で, コホモロジー類 $\beta_k \in H_{T_n}^{2k}(\mathcal{F}_n^C)$ を定める . $\beta_k = c_k(\mathcal{V}^* - \mathcal{L}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_n)$ と書くこともできる .

$$\pi_n : R_\infty \rightarrow H_{T_n}^*(\mathcal{F}_n^C) \text{ を}$$

$$\pi_n(t_i) = t_i \quad 1 \leq i \leq n, \quad \pi_n(t_i) = 0, \quad i > n$$

$$\pi_n(z_i) = z_i \quad 1 \leq i \leq n, \quad \pi_n(z_i) = 0, \quad i > n$$

$\pi_n(Q_k(x)) = \beta_k$ $k = 1, 2, \dots$ で定めると, π_n は環準同型に一意に拡張でき, しかも全射になっていることが示せる . これにより変数 t_i, z_i および $Q_k(x)$ の幾何学的な意味が付いたことになる . (先に定めた divided difference 作用素はこれらの幾何学的な意味から定まるものとなっている)

4 K -理論への拡張

ここでは, 前節までで説明した同変コホモロジーのシューベルト基底を定める多項式同変 K -理論での対応物が自然に作れるということの概略を説明する . なお, 講演時に紹介した予想式は, その後証明ができていない . 詳細については別途準備中 .

コホモロジーと K -理論を同時に扱えるように, パラメータ β を導入する . (K 理論では $\beta = -1$, コホモロジーでは $\beta = 0$)

演算 $\oplus$ と $\ominus$ を $x \oplus y := x + y + \beta xy$, $x \ominus y := \frac{x-y}{1+\beta y}$ で定める .

パラメータ $b = (b_1, b_2, \dots)$ に対して factorial power にあたる K -理論でのべき乗を 2 種類定義しておく . ($b_i = \frac{e^{-\beta t_i} - 1}{\beta}$ と見る)

$$[x|b]^k := (x \oplus b_1)(x \oplus b_2) \cdots (x \oplus b_k)$$

$$[[x|b]]^k := (x \oplus x)(x \oplus b_1) \cdots (x \oplus b_{k-1})$$

このとき , factorial シューア P -, Q -関数の K -理論での類似として次の GP, GQ 関数を定める .

$$GP_\lambda^{(n)}(x|b) := \frac{1}{(n-\ell)!} \sum_{w \in S_n} w \left([x_1|b]^{\lambda_1} [x_2|b]^{\lambda_2} \cdots [x_\ell|b]^{\lambda_\ell} \prod_{i \leq \ell, i < j \leq n} \frac{x_i \oplus x_j}{x_i \ominus x_j} \right)$$

$$GQ_\lambda^{(n)}(x|b) := \frac{1}{(n-\ell)!} \sum_{w \in S_n} w \left([[x_1|b]]^{\lambda_1} [[x_2|b]]^{\lambda_2} \cdots [[x_\ell|b]]^{\lambda_\ell} \prod_{i \leq \ell, i < j \leq n} \frac{x_i \oplus x_j}{x_i \ominus x_j} \right)$$

これらは , $x_1, \dots, x_n$ と $b_1, b_2, \dots$ の $\mathbb{Z}[\beta]$ 係数の多項式となり , $x_1, \dots, x_n$ についての対称式となる .

K -theory での局所化は次で与えられる ($\beta = -1$ とする .)

Type B グラスマン $OG(n, 2n+1)$ $[\mathcal{O}_\lambda]_\mu = GP_\lambda^{(n)}(b'_\mu|0, b)$

Type C グラスマン $LG(n)$ $[\mathcal{O}_\lambda]_\mu = GQ_\lambda^{(n)}(b'_\mu|b)$

Type D グラスマン $OG(n, 2n)$ $[\mathcal{O}_\lambda]_\mu = GP_\lambda^{(n)}(b''_\mu|b)$

ここで , $b_i = 1 - e^{t_i}$, $b'_i = \ominus b_i$, $b'_\lambda = (b'_{\lambda_1}, \dots, b'_{\lambda_r})$, $b''_\lambda = (b'_{\lambda_1+1}, \dots, b'_{\lambda_r+1})$ グラスマン元と分割を対応させた . D 型では , 分割の成分は必要なら 0 を補って偶数個からなるとする . また , $\mathcal{O}_\lambda$ は , シューベルト多様体 X_λ の構造層をグラスマン多様体上に 0-拡大したもの .

最長元もコホモロジーの場合と同様となる . たとえば C 型では , $a_i = 1 - e^{-z_i}$ として , $\mathcal{G}_{w_0^{(n)}}(a, b; x) = GQ_{\rho_n + \rho_{n-1}}(x|a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_{n-1}, b_{n-1})$ が最長元 $w_0^{(n)} \in W_n$ に対するグロタンディエク多項式となる .

参考文献

- [1] S. Billey, Transition equations for isotropic flag manifolds, Discrete Math. **193** (1993) 69-84.

- [2] S. Billey and M. Haiman, Schubert polynomials for the classical groups, *J. Amer. Math. Soc.* 8 (1995), no. 2, 443-482.
- [3] S. Fomin and A. N. Kirillov, Combinatorial B_n -analogues of Schubert polynomials, *Trans. Amer. Math. Soc.* 348 (1996), no. 9, 3591-3620.
- [4] W. Fulton, Flags, Schubert polynomials, degeneracy loci, and determinantal formulas, *Duke Math. J.*, 65 (1992), 381-420.
- [5] W. Fulton, Determinantal formulas for orthogonal and symplectic degeneracy loci, *J. Diff. Geom.*, 43 (1996), 276-290.
- [6] T. Ikeda, Schubert classes in the equivariant cohomology of the Lagrangian Grassmannian, *Adv. Math.* 215 (2007), 1-23.
- [7] T. Ikeda L. Mihalcea, and H. Naruse, Double Schubert polynomials for the classical groups, preprint, ArXiv: 0810.1348
- [8] T. Ikeda and H. Naruse, Excited Young diagrams and equivariant Schubert calculus, preprint, ArXiv:0703 to appear in *Trans. Amer. Math. Soc.*
- [9] V. N. Ivanov, Interpolation analogue of Schur Q -functions, *Zap. Nauc. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov.* 307 (2004) 99-119.
- [10] T. Józefiak, Schur Q -functions and cohomology of isotropic Grassmannians, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* (1991), 109, 471-478.
- [11] A. Knutson and E. Miller, Gröbner geometry of Schubert polynomials. *Ann. of Math.* (2) 161 (2005), no. 3, 1245–1318.
- [12] A. Knutson and T. Tao, Puzzles and (equivariant) cohomology of Grassmannians. *Duke Math. J.* 119 (2003), no. 2, 221–260.
- [13] A. Kresch and H. Tamvakis, Double Schubert polynomials and degeneracy loci for the classical groups, *Annales de l'institut Fourier*, 52 no. 6 (2002), 1681-1727.
- [14] A. Lascoux, Classes de Chern des variétés de drapeaux, *C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math.* 295 (1982), no. 1, 1-43.

- [15] A. Lascoux and M.-P. Schützenberger, Polynômes de Schubert, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 294 (1982), no. 13, 447-450.
- [16] P. Pragacz, Algebro-geometric applications of Schur S - and Q -polynomials, in *Séminaire d'Algèbre Dubreil-Malliavin 1989-1990*, Springer Lecture Notes in Math. 1478 (1991) 130-191.