四元数ユニタリー群 $Sp(1,q)$ 上のある実解析的保型形式について

成田宏秋*

熊本大学大学院自然科学研究科

0 導入

この報告書は, 今回の代数学シンポジウムにおいて公表させて頂いた, タイトルの保型形式に関する筆者自身ないしは共同研究者と得た結果の概説である. 保型形式の詳しい研究の対象は, 主に複素上半平面上の楕円保型形式やその多変数化である正則ジーゲル保型形式などの正則保型形式であるが, 符号 $(1,q)$ の四元数ユニタリー群 $Sp(1,q)$ (または四元数双曲空間) 上の保型形式に照準を合わせた背景にあるものとして, 保型形式の詳しい研究を非正則なものにも広げたいという問題意識がある. 実際, 四元数ユニタリー群 $Sp(1,q)$ はエルミート型ではなく, この上には正則保型形式が存在しない

このタイトルの保型形式についての一連の研究は, 荒川恒男氏による結果 [Ar-1], [Ar-2] から始まる. この２つの結果は $Sp(1,q)$ のある離散系列表現の行列係数を再生核とする有界保型形式の空間の次元公式に関するものである. 荒川氏は次元公式以外にも例えば [Ar-2] において, フーリエ展開やアイゼンシュタイン級数の構成を与えており, その他この保型形式に関する様々な研究の試みについての未発表ノートを残している.

荒川氏の扱った保型形式はその非正則性にも関わらず正則保型形式に振舞いが似ている. 実はこの非正則保型形式は, 後に B. Gross と N. Wallach により導入された四元数離散系列表現 ([G-W] 参照) を生成するものであることが証明できる. この離散系列表現は正則離散系列表現 (それを生成する保型形式は正則保型形式) にその表現論的振舞いが似ており, 荒川氏の扱った保型形式の正則保型形式との類似性はこの表現論的背景から理解できる. 筆者自身および共同研究者と共に得た研究成果は, 荒川氏が扱った保型形式の具体的構成やそれに付随する L-関数やフーリエ係数に関してである.

この報告書の内容は３つの節から成る. まず第１節では, 代数群及びリー群と対称空間についての必要な基礎を与えた後, 保型形式の定義とそのフーリエ展開等について説明する. 第２節ではアイゼンシュタイン級数, ポアンカレ級数による保型形式の構成や, 荒川氏が定式化した楕円保型形式から $Sp(1,q)$ へのテータリフトに関する結果を紹介する. そして更に,

*E-mail:narita@sci.kumamoto-u.ac.jp

最近 $q=1$ の場合で得たこのテータリフトとは違う, テータ級数による新しい保型形式の構成方法を与える (山内淳生氏との共同研究). 第3節では, $q=1$ の場合で荒川氏のテータリフトをアデール的に再定式化し, その L-関数やフーリエ係数についての結果 (村瀬篤氏との共同研究) を紹介する.

1

1.1 群と対称空間

まず B を有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の定符号四元数環として, その判別式を d_B と記す. 四元数環 B は主対合 $B \ni x \mapsto \bar{x} \in B$ を持つ. すると B の被約トレース $\mathrm{tr}(x) := x + \bar{x}$ と被約ノルム $\nu(x) := x\bar{x}$ が定義される. そして $\mathcal{O}$ を B の固定した一つの極大整環とする.

$\mathbb{Q}$ 上の簡約代数群 $\mathcal{G} = GSp(1,q)$ と $\mathcal{G}^1 = Sp(1,q)$ を

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(\mathbb{Q}) &= \{g \in M_{1+q}(B) \mid {}^t\bar{g}Qg = \nu(g)Q,\ \nu(g) \in \mathbb{Q}^\times\},\\ \mathcal{G}^1(\mathbb{Q}) &= \{g \in \mathcal{G}(\mathbb{Q}) \mid \nu(g) = 1\}\end{aligned}$$

により定義する. ここに $Q := \begin{pmatrix} -1_{q-1} & & \\ & 0 & 1 \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおく. $q=1$ の時は $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ と約束する. 次に $G^1_\infty := \mathcal{G}^1(\mathbb{R})$ とすると, これはハミルトンの四元数環 $\mathbb{H}$ を係数とする符号 $(1,q)$ のユニタリー群になる. この G^1_∞ は四元数双曲空間

$$H := \begin{cases} \{(w,\tau) \in \mathbb{H}^{q-1} \times \mathbb{H} \mid \mathrm{tr}(\tau) > {}^t\bar{w}w\} & (q>1), \\ \{\tau \in \mathbb{H} \mid \mathrm{tr}(\tau) > 0\} & (q=1), \end{cases}$$

に対して一次分数変換

$$\begin{cases} g\cdot(w,\tau) = ((a_1w + b_1\tau + c_1)(a_3z + b_3\tau + c_3)^{-1}, (a_2w + b_2\tau + c_2)(a_3z + b_3\tau + c_3)^{-1}) & (q>1), \\ g\cdot\tau = (a\tau + b)(c\tau + d)^{-1} & (q=1), \end{cases}$$

により作用する. ここに $q>1$ のとき $g = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \in Sp(1,q)$ $(a_1 \in M_{q-1}(\mathbb{H}),\ b_1, c_1, {}^ta_2, {}^ta_3 \in \mathbb{H}^{q-1},\ b_2, c_2, b_3, c_3 \in \mathbb{H})$ であり, $q=1$ の時は $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $(a,b,c,d \in \mathbb{H})$ である. 次に $z_0 := \begin{cases} (\mathbf{0}, 1) & (q>1) \\ 1 & (q=1) \end{cases}$ と置き, G^1_∞ の部分群

$$K_\infty := \{g \in G^1_\infty \mid g\cdot z_0 = z_0\}$$

を導入する．この K_∞ は G^1_∞ の極大コンパクト部分群を与える．これは以下の同型を満たす．

$$K_\infty \simeq Sp^*(q) \times Sp^*(1).$$

ここに $Sp^*(n) := \{g \in M_n(\mathbb{H}) \mid {}^t\bar{g}g = 1_n\}$ である．この群は, $n = 1$ の時は $Sp^*(1) = \{a \in \mathbb{H} \mid \nu(a) = 1\}$ であり, これは次数 2 の特殊ユニタリー群 $SU(2)$ と同型である．

実単純リー群 G^1_∞ の岩澤分解を記述するために以下の部分群を導入する．

$$N := \begin{cases} \left\{ n(w,x) := \begin{pmatrix} 1_{q-1} & w & 0 \\ {}^t\bar{w} & 1 & \frac{1}{2}{}^t\bar{w}w + x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; w \in \mathbb{H}^{q-1},\ x \in \mathbb{H}^- \right\} & (q > 1), \\ \left\{ n(x) := \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{H}^- \right\} & (q = 1), \end{cases}$$

$$A := \begin{cases} \left\{ a_y = \begin{pmatrix} 1_{q-1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{y} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{y}^{-1} \end{pmatrix} \;\middle|\; y \in \mathbb{R}^\times_+ \right\} & (q > 1), \\ \left\{ a_y = \begin{pmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ 0 & \sqrt{y}^{-1} \end{pmatrix} \;\middle|\; y \in \mathbb{R}^\times_+ \right\} & (q = 1). \end{cases}$$

ここに, $\mathbb{H}^- := \{x \in \mathbb{H} \mid \mathrm{tr}(x) = 0\}$．これらにより, G^1_∞ の岩澤分解

$$G^1_\infty = NAK_\infty$$

を得る．

1.2 保型形式の定義

負でない整数 κ に対して, $(\sigma_\kappa, V_\kappa)$ を $GL_2(\mathbb{C})$ の κ 回対称テンソル表現の $Sp^*(1) \simeq SU(2)$ への引き戻しとする．そして $\mathrm{id}_{Sp^*(q)}$ を $Sp^*(q)$ の自明な表現とする．これらにより K_∞ の既約表現

$$(\tau_\kappa, V_\kappa) := \mathrm{id}_{Sp^*(q)} \boxtimes (\sigma_\kappa, V_\kappa)$$

が定義される．このとき $\kappa > 2q - 1$ に対して, τ_κ を極小 K_∞ タイプに持つ離散系列表現が存在しそれを π_κ と記す．これは四元数離散系列表現という, 正則離散系列表現に振舞いが似ている非正則離散系列表現である ([G-W] 参照)．このとき, 任意に固定した $\mathcal{G}^1(\mathbb{Q})$ の数論的部分群 Γ に対して以下の保型形式の空間が定義できる．

定義 1.1. 平滑な関数 $f : G^1_\infty \to V_\kappa$ が以下を満たすとき, f を π_κ を生成する保型形式と呼ぶ．

1. $f(\gamma g k) = \tau_\kappa(k)^{-1} f(g) \quad \forall(\gamma, g, k) \in \Gamma \times G^1_\infty \times K_\infty.$

2. $D_\kappa \cdot f = 0$.
   ここに D_κ は Schmid 作用素と呼ばれる勾配型微分作用素であり, Cauchy-Riemann 作用素の類似物である ([Sch §7], [N-1, Definition 5.2] 参照).

3. ある f にのみ依存する定数 C_f と整数 m_f が存在して, $||f(g)||_\kappa < C_f ||g||^{m_f}$ (つまり f は多項式増大度).
   ここに $||*||_\kappa$ と $||*||$ はそれぞれ, V_κ のノルム, $M_{q+1}(\mathbb{H})$ のノルムを表す.

以上で定義される保型形式全体を $\mathcal{A}_\kappa(\Gamma)$ と記し, その中のカスプ形式全体を $\mathcal{A}^0_\kappa(\Gamma)$ と記す.

注意 1.2. この保型形式の定義の 2 番目の条件は, f の係数関数の G^1_∞ による右移動で生成される $C^\infty(G^1_\infty)$ の部分空間が, π_κ と $(\mathfrak{g}, K_\infty)$-加群として同型という条件に置き換えられる. ここに $\mathfrak{g}$ は G^1_∞ のリー代数を表す. 保型形式の空間 $\mathcal{A}_\kappa(\Gamma)$ の元を π_κ を生成する保型形式と呼ぶのは, このためである.

1.3 フーリエ展開

保型形式 $f \in \mathcal{A}_\kappa(\Gamma)$ のフーリエ展開を記述するためには, Γ-カスプを導入する必要がある. そのために $\mathcal{P}$ を $\mathcal{G}^1$ の標準的な $\mathbb{Q}$-放物型部分群とすると, Γ-カスプは両側剰余類 $\Gamma\backslash\mathcal{G}^1/\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ の完全代表系として定義される. 以下 Γ-カスプの集合 Ξ を固定する. 各 $c \in \Xi$ に対して,

$$X_{\Gamma,c} := \begin{cases} \{x \in \mathbb{H}^- \mid n(l,x) \in c^{-1}\Gamma c \cap N,\ \exists l \in \mathbb{H}^{q-1}\} & (q>1), \\ \{x \in \mathbb{H} \mid n(x) \in c^{-1}\Gamma c \cap N\} & (q=1), \end{cases}$$

とおく. そして被約ノルム tr に関する $X_{\Gamma,c}$ の双対格子を $X^*_{\Gamma,c}$ と書く. このとき, 各 Γ-カスプ $c \in \Xi$ において保型形式 $f \in \mathcal{A}_\kappa(\Gamma)$ のフーリエ展開は, 次のように記述される ([N-1, Theorem 6.3] 参照).

$$\begin{cases} f(cn(w,x)a_y) = \displaystyle\sum_{\xi \in X^*_{\Gamma,c}} a^f_\xi(w) \cdot y^{\frac{\kappa}{2}+1} \exp(-4\pi\sqrt{\nu(\xi)}y)\mathbf{e}(\mathrm{tr}(\xi x)) & (q>1), \\ f(cn(x)a_y) = \displaystyle\sum_{\xi \in X^*_{\Gamma,c}} C^f_\xi \cdot y^{\frac{\kappa}{2}+1} \exp(-4\pi\sqrt{\nu(\xi)}y)\mathbf{e}(\mathrm{tr}(\xi x)) & (q=1). \end{cases}$$

ここで, ベクトル $v_{\kappa,\xi} \in V_\kappa$ を $\mathbb{R}(\xi)^\times$ の σ_κ による作用に関する最高ウェイトベクトルとすると

$$a^f_\xi \in \begin{cases} \Theta_{\xi,c} \otimes v_{\kappa,\xi} & (\xi \neq 0) \\ V_\kappa & (\xi = 0) \end{cases} \quad (\Theta_{\xi,c} : \mathbb{H}^{q-1} \text{ 上のテータ関数の空間}),$$

$$C^f_\xi \in \begin{cases} \mathbb{C}v_{\kappa,\xi} & (\xi \neq 0) \\ V_\kappa & (\xi = 0) \end{cases}.$$

テータ関数の空間 $\Theta_{\xi,c}$ は, $\mathbb{H}^{q-1}$ のある格子に関する変換則と再生核の条件で定義される ([N-1, Definition 6.2] 参照). このフーリエ展開の各項のノルムの $X^*_{\Gamma,c}$ 上の無限和を評価することにより, 以下の定理を得る ([N-1, Theorem 7.1] 参照).

定理 1.3 (Köcher 原理)**.** $q > 1$ のとき, $f \in \mathcal{A}_\kappa(\Gamma)$ は自動的に多項式増大度となる.

注意 1.4. シンポジウム後の, カリフォルニア大学サンディエゴ校での滞在の際, Nolan Wallach 氏から, 彼の Miatello との共同研究 [M-W] において, 符号 $(1, q)$ の特殊直交群に対する一般の次数 2 以上の総実体に関するヒルベルト保型形式で, 重さがスカラーであるもの (非正則も含む) についても, Köcher 原理が証明されているとの情報提供を頂いた.

2 保型形式の具体的構成

前節で与えたフーリエ展開の各項に現れる関数を用いて, アイゼンシュタイン級数とポアンカレ級数により $\mathcal{A}_\kappa(\Gamma)$ の元が構成できる (§2.1). そして, 荒川恒男氏は楕円尖点形式からのテータリフトにより G^1_∞ 上の保型形式を与えているが, それにフーリエ展開を応用することで $\mathcal{A}^0_\kappa(\Gamma)$ の元であることが証明できる (§2.2). 最後の §2.3 では, $q = 1$ の場合の $\mathcal{A}^0_\kappa(\Gamma)$ の元のより簡単な形をしたテータ級数による構成を与える.

2.1 アイゼンシュタイン級数とポアンカレ級数

この 2 つの級数を与えるためには以下の関数を要する.

$$\begin{cases} W_{v,\kappa}(na_yk) := \tau_\kappa(k)^{-1}y^{\frac{\kappa}{2}+1}v & (q\text{:任意}), \\ W_\theta(n(w,x)a_yk) := \tau_\kappa(k)^{-1}\theta(w)y^{\frac{\kappa}{2}+1}\exp(-4\pi\sqrt{N(\xi)}y)\mathbf{e}(\mathrm{tr}(\xi x))v_{\kappa,\xi} & (q > 1), \\ W_\xi(n(x)a_yk) := \tau_\kappa(k)^{-1}y^{\frac{\kappa}{2}+1}\exp(-4\pi\sqrt{N(\xi)}y)\mathbf{e}(\mathrm{tr}(\xi x))v_{\kappa,\xi} & (q = 1). \end{cases}$$

ここに最初の関数の定義において $n \in N$ であり, $v \in V_\kappa$, $\theta \in \Theta_{\xi,c}$ である. 言うに及ばず, これらの関数はフーリエ展開に現れる関数である. これらを試験関数として, まず Γ-カスプ c におけるアイゼンシュタイン級数は以下で与えられる.

$$E_{v,c}(g) := \sum_{\gamma \in cNc^{-1}\cap\Gamma\backslash\Gamma} W_{v,\kappa}(c^{-1}\gamma g).$$

そして Γ-カスプ c でのポアンカレ級数は

$$\begin{cases} P_c(g;\theta) := \sum_{\gamma \in cNc^{-1}\cap\Gamma\backslash\Gamma} W_\theta(c^{-1}\gamma g) & (q > 1), \\ P_c(g;\xi) := \sum_{\gamma \in cNc^{-1}\cap\Gamma\backslash\Gamma} W_\xi(c^{-1}\gamma g) & (q = 1), \end{cases}$$

と与えられる. フーリエ展開により, 保型形式の空間 $\mathcal{A}_\kappa(\Gamma)$, $\mathcal{A}^0_\kappa(\Gamma)$ はアイゼンシュタイン級数とポアンカレ級数で張られることが証明できる. つまり以下の定理を得る ([N-1, Theorem A.3, Theorem A.5] 参照).

定理 2.1. (1) $\mathcal{A}^0_\kappa(\Gamma) = \mathbb{C}$-*span of*

$$\begin{cases} \{P_c(g;\theta) \mid \theta \in \Theta_{\xi,c},\ \xi \in X^*_{\Gamma,c} \setminus \{0\}\} & (q > 1), \\ \{P_c(g;\xi) \mid \xi \in X^*_{\Gamma,c} \setminus \{0\}\} & (q = 1). \end{cases}$$

(2) $\mathcal{A}_\kappa(\Gamma) = \mathbb{C}$-*span of*

$$\begin{cases}\{E_{c,v}(g),\ P_c(g;\theta) \mid c \in \Xi,\ v \in V_\kappa,\ \theta \in \Theta_{\xi,c},\ \xi \in X^*_{\Gamma,c} \setminus \{0\}\} & (q > 1),\\ \{E_{c,v}(g),\ P_c(g;\xi) \mid c \in \Xi,\ v \in V_\kappa,\ \xi \in X^*_{\Gamma,c} \setminus \{0\}\} & (q = 1).\end{cases}$$

2.2　荒川リフト (非アデール版)

荒川氏は楕円尖点形式からのテータリフトにより, $\mathcal{A}^0_\kappa(\Gamma)$ に属する保型形式を与えようとしていた. この仕事に関する荒川氏の 1980 年頃の未発表ノートを見ると, 当時発表されていた Stephen Kudla 氏による楕円尖点形式からユニタリー群 $SU(1,q)$ (または複素超球) 上の正則保型形式へのテータリフト ([Ku] 参照) や, 織田孝幸氏による楕円尖点形式から直交群 $SO(2, n-2)$ (または IV 型対称領域) 上の正則保型形式へのテータリフト ([O] 参照) に影響されていたことが分かる.

荒川氏の (非アデール的) テータリフトを定式化するために, いくつか準備をする. まず自然数 N に対して, $\mathcal{S}_{\kappa-2q+2}(N)$ を合同部分群 $\Gamma_0(N)$ に関する重さ $\kappa - 2q + 2$ の楕円カスプ形式の空間とする. 次に $Sp(1,q)$ の数論的部分群として $\Gamma := \{\gamma \in Sp(1,q)_{\mathbb{Q}} \mid \gamma\mathcal{O}^{1+q} = \mathcal{O}^{1+q}\}$ と取る. ここに $\mathcal{O}$ は B の固定した極大整環である. そして $\mathfrak{h}$ を複素上半平面とすると $\theta(z,g)$ は,

$$\theta(z,g) := \sum_{l=(l_i)_{1\le i\le q+1}\in\mathcal{O}^{q+1}} \varphi_z({}^t\bar{g}^{-1}l) \quad (z,g)^* \in \mathfrak{h}\times G.$$

ここに $X = (X_i)_{1\le i\le q+1} \in \mathbb{H}^{q+1}$ と $z = s + \sqrt{-1}t \in \mathfrak{h}$ に対して,

$$\varphi_z(X) := t^{2q}\sigma_\kappa(X_q + X_{q+1})\exp(2\pi\sqrt{-1}({}^t\bar{X}(sQ + \sqrt{-1}t1_{q+1})X)).$$

これは次数 $4(q+1)$ のシンプレクティック群 $Sp(4(q+1);\mathbb{R})$ の Weil 表現 ([We], [Shin] 参照) を使って作られる $\mathrm{End}(V_\kappa)$-値テータ級数である. このとき, $\theta(z,g)^*$ は $\theta(z,g)$ の $\mathrm{End}(V_\kappa) \simeq \mathrm{End}(V^*_\kappa)$ における双対とすると, 荒川氏が与えたテータリフトは以下の通りに定式化される.

$$\mathcal{L} : \mathcal{S}_{\kappa-2q+2}(N) \times V_\kappa \ni (f,v) \mapsto \int_{\Gamma_0(N)\backslash\mathfrak{h}} f(z)\theta(z,g)^* \cdot vy^{\kappa-2q}dxdy.$$

定理 2.2 ($q = 1$:荒川, 一般の q:N)**.** 正の整数 N が $2|N$, $d_B|N$ とする *(*d_B : B の判別式*).* $\kappa > 4q + 2$ のとき

$$\mathrm{Im}\,\mathcal{L} \subset \mathcal{A}_0(\Gamma).$$

証明 ([N-2, Theorem 4.1] 参照) は, $\mathcal{S}_{\kappa-2q+2}(N)$ がポアンカレ級数で張られることより, f がポアンカレ級数の場合のテータリフトを考える. そのフーリエ展開を計算すると 1.3 節で与えたフーリエ展開と同じ形をしていることが分る. すると $\mathcal{A}_0(\Gamma)$ のフーリエ展開による特徴付け [N-2, Proposition 2.4] より, 定理が従う.

荒川氏はこのリフトを, 符号 $(4, 4q)$ の特殊直交群 $SO(4, 4q)$ と次数 2 の特殊線型群 $SL_2(\mathbb{R})$ の成す dual pair に対するテータリフトを $Sp(1,q) \subset SO(4, 4q)$ に制限したものと解釈してい

た．しかし一方で，これは dual pair $O^*(4) \times Sp(1,q)$ に対するテータリフトと解釈する方が自然であることが分る．実際，次数 4 の直交群の内型 $O^*(4)$ は $SL_2(\mathbb{R}) \times Sp^*(1)$ と同型であることに注意し，上のテータリフトの定式化において $v \in V_\kappa$ を，四元数環の乗法群上の V_κ-値保型形式に置き換えると，$O^*(4)$ からのテータリフトとして理解し直すことができる．この結果の後に続く，村瀬篤氏との $q=1$ の場合の荒川リフトに関する共同研究においては，後者の定式化を採用する (§3, 参照).

2.3　もう一つのテータ級数 (山内淳生氏との共同研究 [Y-N])

荒川リフトのようなテータリフトはテータ級数の概念の一般化であるが，古典的なテータ級数に近い簡単な形のテータ級数によって，$q=1$ の時，$\mathcal{A}_0(\Gamma)$ の元が構成できる．

このテータ級数を与えるために，いくつか準備をする．四元数環 B の純四元数の集合 $B^- := \{x \in B \mid \mathrm{tr}(x) = 0\}$ を導入し，$\xi_0 \in B^- \setminus \{0\}$ を一つ与える．そして B の $\mathbb{Z}$-格子 Λ と $p, q \in B$ を指定する．これらに対してテータ級数を以下で定義する．

$$\theta_{\xi_0}(n(x)a_yk; \Lambda, p, q) := \sum_{\lambda \in \Lambda - p} \mathbf{e}(\frac{1}{2}\bar{\lambda}q) y^{\frac{\kappa}{2}+1} \exp(-4\pi\sqrt{N(\lambda\xi_0\bar{\lambda})}y)\mathbf{e}(\mathrm{tr}(\lambda\xi_0\bar{\lambda}x))\tau_\kappa(k)^{-1}\sigma_\kappa(\lambda)v_{\kappa,\xi_0}.$$

ここに $(n(x), a_y, k) \in N \times A \times K_\infty$.

定理 2.3. $\kappa > 1$ とする．このとき適当な $\mathcal{G}^1(\mathbb{Q})$ の合同部分群 Γ が存在して

$$\theta_{\xi_0}(g; \Lambda, p, q) \in \mathcal{A}^0_\kappa(\Gamma)$$

となる．

このテータ級数は符号 $(2,2)$ のユニタリー群 (又は I 型の複素対称領域である次数 2 のエルミート上半空間) 上のベクトル値の特異テータ級数 (つまり，そのフーリエ係数が，行列式 0 の次数 2 のエルミート行列で番号付されるもの以外は消えているテータ級数) を構成し，それを G^1_∞ に制限するという方法で見つけたものである．

このテータ級数の $\xi \in B^- \setminus \{0\}$ に対するフーリエ係数 $C_\xi^{\theta_{\xi_0}(*;\Lambda,p,q)}$ は

$$\sum_{\lambda \in \Lambda - p,\ \xi = \lambda\xi_0\bar{\lambda}} \mathbf{e}(\frac{1}{2}\bar{\lambda}q)\sigma_\kappa(\lambda)v_{\kappa,\xi}$$

という簡単な形をしている．このテータ級数のフーリエ係数は以下の代数性を満たしている．

系 2.4. 四元数環 B にのみ依存して決まる V_κ の $\bar{\mathbb{Q}}$-構造 $V_{\kappa,B}(\bar{\mathbb{Q}})$ が存在して，$\theta_{\xi_0}(g; \Lambda, p, q)$ のフーリエ係数がすべて $V_{\kappa,B}(\bar{\mathbb{Q}})$ に入るようにできる．

3 アデール的荒川リフト (村瀬篤氏との共同研究 [M-N-1], [M-N-2])

荒川氏が非アデール的に定式化した, 楕円カスプ形式から $Sp(1,q)$ 上の保型形式へのテータリフトが, dual pair $O^*(4) \times Sp(1,q)$ に対するテータ対応として理解できることは §2.2 において注意した通りである. 以下 $q=1$ として, 代数体 K のアデール環を $\mathbb{A}_K$ と記し, $K=\mathbb{Q}$ のときは $\mathbb{A}_K=\mathbb{A}$, その有限アデール環は $\mathbb{A}_f$ と書く. この節では荒川リフトをアデール的に再定式化し, その L 関数 (スピノール L 関数) やフーリエ係数についての結果を紹介する. ヘッケ作用素の作用を考えるため, similitude 因子付きの代数群を用いて再定式化を与える. 具体的には, 直交群の内型 $O^*(4)$ 上の保型形式は $GL_2(\mathbb{A}) \times B_{\mathbb{A}}^\times$ 上の保型形式として, $Sp(1,1)$ 上の保型形式は $\mathcal{G}(\mathbb{A})$ 上の保型形式として考える. 以下で扱う保型形式はすべて中心的指標が自明であるとする.

3.1 テータリフトのアデール的再定式化

整数 D を B の判別式 d_B の約数とする. 楕円カスプ形式の空間 $\mathcal{S}_\kappa(D)$ の各元は $GL_2(\mathbb{A})$ 上の保型形式と見做す. そして $B_{\mathbb{A}}^\times$ 上の保型形式の空間 $\mathcal{A}_\kappa(B_{\mathbb{A}}^\times)$ を以下のように定義する.

$$\{f : B_{\mathbb{A}}^\times \to V_\kappa \mid f(z\delta b u_f u_\infty) = \sigma_\kappa(u_\infty)^{-1} f(b),\ \forall (z,\delta,b,u_f,u_\infty) \in Z_{B_{\mathbb{A}}} \times B^\times \times B_{\mathbb{A}}^\times \times \prod_{v<\infty} \mathcal{O}_v^\times \times Sp^*(1)\}$$

ここに $Z_{B_{\mathbb{A}}^\times}$ は $B_{\mathbb{A}}^\times$ の中心を表す.

荒川リフトのアデール的定式化を与えるために [M-N-1, §3] において $\mathcal{G}(\mathbb{A}) \times (GL_2(\mathbb{A}) \times B_{\mathbb{A}}^\times)$ のメタプレクティック表現 r を導入した. これは $\mathrm{End}(V_\kappa)$ に値を取る $B_{\mathbb{A}}^{\oplus 2} \times \mathbb{A}^\times$ 上のシュバルツ-ブリュア関数の空間 (無限素点である修正を与える) を表現空間として持つ. そしてシュバルツ-ブリュア関数の元 $\Phi := \prod_{v \le \infty} \Phi_v$ を以下により与える.

$$\Phi_v(X,t) := \begin{cases} \mathrm{ch}(\mathcal{O}_v^2 \times \mathbb{Z}_v^\times)(X,t) & (v \nmid D^{-1} d_B), \\ \mathrm{ch}((\mathcal{O}_v \oplus \mathfrak{P}_v^{-1}) \times \mathbb{Z}_v^\times)(X,t) & (v | D^{-1} d_B), \\ \mathrm{ch}(t \in \mathbb{R}_+^\times) t^{\frac{\kappa+3}{2}} \sigma_\kappa(X_1 + X_2) e^{-2\pi t^t \bar{X} X} & (v = \infty). \end{cases}$$

ここに $v=\infty$ のとき $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ で, $\mathfrak{P}_v$ は $\mathcal{O}_v$ の極大イデアルを表し, $\mathrm{ch}(S)$ は集合 S に対する特性関数を表す. この関数 Φ と表現 r により $\mathcal{G}(\mathbb{A}) \times (GL_2(\mathbb{A}) \times B_{\mathbb{A}}^\times)$ 上のテータ級数が次のようにして作られる.

$$\Theta_\kappa(g,h,h') := \sum_{(X,t) \in B^2 \times \mathbb{Q}^\times} (r(g,h,h')\Phi)(X,t).$$

すると, 荒川リフトのアデール的定式化は以下で与えられる.

$$\mathcal{S}_\kappa(D) \times \mathcal{A}_\kappa(B_{\mathbb{A}}^\times) \ni (f,f') \mapsto \mathcal{L}(f,f')(g) := \iint_{(\mathbb{R}_+^\times)^2 (GL_2 \times B^\times)_{\mathbb{Q}} \backslash (GL_2 \times B^\times)(\mathbb{A})} \overline{f(h)} \Theta_\kappa(g,h,h') f'(h') dh dh'.$$

これは $\mathcal{G}(\mathbb{A})$ 上の重さ τ_κ のカスプ形式であり, 無限素点で四元数離散系列表現 π_κ を生成している ([M-N-2, Theorem 3.3.2], 参照). 更にこのカスプ形式は $\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)$ の開コンパクト部分群 $K_f := \prod_{v<\infty} K_v$ に関する右不変性を満たす. ここに各 K_v は次で与えられる $\mathcal{G}(\mathbb{Q}_v)$ の極大コンパクト部分群である.

$$K_v := \begin{cases} \{g \in \mathcal{G}(\mathbb{Q}_v) \mid g(\mathcal{O}_v^{\oplus 2}) = \mathcal{O}_v^{\oplus 2}\} & (v \nmid \frac{d_B}{D}), \\ \{g \in \mathcal{G}(\mathbb{Q}_v) \mid g(\mathcal{O}_v \oplus \mathfrak{P}_v^{-1}) = \mathcal{O}_v \oplus \mathfrak{P}_v^{-1}\} & (v | \frac{d_B}{D}). \end{cases}$$

3.2 スピノール L 関数

アデール群 $\mathcal{G}(\mathbb{A})$ 上のヘッケ同時固有形式 F に対して, スピノール L 関数を以下で定義する.

$$L(F, \mathrm{spin}, s) := \prod_{v<\infty} L_v(F, \mathrm{spin}, s).$$

ここに, 不分岐素点 $v \nmid d_B$ では志村 [Shim, Theorem 2] によるヘッケ級数の分母公式を用いて $L_v(F, \mathrm{spin}, s)$ を定義し, 分岐素点 $v|d_B$ では日名-菅野 [H-S, §4 (I)] のヘッケ級数の分母公式を用いて $L_v(F, \mathrm{spin}, s)$ を定義する. 保型形式 F が $(f, f') \in \mathcal{S}_\kappa(D) \times \mathcal{A}_\kappa(B_{\mathbb{A}}^\times)$ の荒川リフト $\mathcal{L}(f, f')$ であるとき, そのスピノール L 関数についての次の結果を得る ([M-N-1, Corollary 5.3] 参照).

定理 3.1. 保型形式 $(f, f') \in \mathcal{S}_\kappa(D) \times \mathcal{A}_\kappa(B_{\mathbb{A}}^\times)$ が共にヘッケ同時固有形式であるとし, それら 2 つの大局的 L 関数 $L(f, s)$ と $L(f', s)$ *(*無限素点は除く*)* の素点 v での局所因子をそれぞれ $L_v(f, s)$, $L_v(f', s)$ とする. このとき $\mathcal{L}(f, f')$ もヘッケ同時固有形式となる. そして有限素点 $v \nmid d_B$ において

$$L_v(\mathcal{L}(f, f'), \mathrm{spin}, s) = L_v(f, s) L_v(f', s)$$

が成立し, $v|d_B$ においても $L_v(\mathcal{L}(f, f'), \mathrm{spin}, s)$ は f と f' のヘッケ固有値を用いて具体的に書ける. 特に $v|\frac{d_B}{D}$ においては

$$L_v(\mathcal{L}(f, f'), \mathrm{spin}, s) = L_v(f, s)$$

となる. つまり $D = 1$ のとき

$$L(\mathcal{L}(f, f'), \mathrm{spin}, s) = L(f, s) L^{d_B}(f', s)$$

が成立する. ここに $L^{d_B}(f', s)$ は有限素点 $v \nmid d_B$ 上のオイラー積で与えられる.

この定理は, テータリフトのヘッケ作用素に関する交換関係式 [M-N-1 Theorem 5.1] を求めることにより得られる. 実際それにより, $\mathcal{L}(f, f')$ のヘッケ固有値を (f, f') のヘッケ固有値を用いて記述でき, その帰結として定理を得る.

3.3 フーリエ展開

アデール群 $\mathcal{G}(\mathbb{A})$ 上のカスプ形式 F に対して, そのフーリエ展開を記述するため, ψ を $\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}$ 上の標準的な加法指標を表し, X_ξ を $\mathbb{A}^\times\mathbb{Q}(\xi)^\times\backslash\mathbb{A}^\times_{\mathbb{Q}(\xi)}$ 上のユニタリー指標 (ヘッケ指標) の集合とする. このとき, ψ と $\chi\in X_\xi$ に付随して F のフーリエ変換が以下のように定義できる.

$$F_\xi(g):=\int_{B^-\backslash B^-_{\mathbb{A}_\mathbb{Q}}} F\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}g\right)\psi(-\mathrm{tr}(\xi x))dx,\ F_\xi^\chi(g):=\int_{\mathbb{R}_+^\times\mathbb{Q}(\xi)^\times\backslash\mathbb{A}^\times_{\mathbb{Q}(\xi)}} F_\xi(s1_2\cdot g)\chi(s)^{-1}ds.$$

すると F のフーリエ展開が以下のように記述できる.

$$F(g)=\sum_{\xi\in B^-\backslash\{0\}}F_\xi(g)=\sum_{\xi\in B^-\backslash\{0\}}\sum_{\chi\in X_\xi}F_\xi^\chi(g).$$

ここで述べる結果は $F=\mathcal{L}(f,f')$ の時の, F_ξ^χ の明示型に関するものである.

(1) 状況設定

まず $(f,f')\in S_\kappa(D)\times\mathcal{A}_\kappa(B^\times_\mathbb{A})$ **はヘッケ同時固有形式である**とする. 更に f **と** f' **はアトキン-レーナー対合についての同時固有形式でもある**とする. つまり, すべての素数 $p|D$ に対して,

$$f\left(h\begin{pmatrix}0 & 1\\ -p & 0\end{pmatrix}\right)=\epsilon_p f(h),\qquad f'(h'\Pi_p)=\epsilon'_p f'(h')$$

を満たしているとする. ここに ϵ_p, $\epsilon'_p\in\{\pm1\}$ で Π_p は B_p の素元を表す. このとき $\mathcal{L}(f,f')\not\equiv 0$ **であるためには** $\epsilon_p=\epsilon'_p$ **が** $p|D$ **に対して成り立つ必要があること**を注意する.

各有限素点 $v=p<\infty$ に対して $\mathfrak{a}_p:=\begin{cases}\mathcal{O}_p & (p\not| d_B \text{ or } p|D)\\ \mathfrak{P}_p & (p|D^{-1}d_B)\end{cases}$ と置く. このとき $\xi\in B^-\setminus\{0\}$ が**原始的**であるとは各有限素点 p に対して $\xi\in\mathfrak{a}_p\setminus p\mathfrak{a}_p$ が成り立つことを言う. アデール群 $G_\mathbb{A}$ 上の保型形式 F のフーリエ係数 F_ξ は

$$F_\xi\left(\begin{pmatrix}t & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}g\right)=F_{t\xi}(g)\quad(t\in\mathbb{Q}^\times).$$

を満たすので, F_ξ **は原始的な** ξ **について考えれば十分である**.

次に結果を述べるために必要な記号の導入等を行う. 純四元数 $\xi\in B^-\setminus\{0\}$ に対して d_ξ を虚２次体 $E:=\mathbb{Q}(\xi)$ の判別式とする. そして

$$a:=\begin{cases}2\sqrt{-n(\xi)}\sqrt{d_\xi} & (d_\xi\text{:odd})\\ \sqrt{-n(\xi)}\sqrt{d_\xi} & (d_\xi\text{:even})\end{cases},\ b:=\xi^2-\frac{a^2}{4}.$$

とおく. これらの a と b により, 埋め込み写像を $\iota_\xi:E^\times\hookrightarrow GL_2(\mathbb{Q})$ を以下で与える.

$$\iota_\xi(x+y\xi)=x\cdot 1_2+y\cdot\begin{pmatrix}a/2 & b\\ 1 & -a/2\end{pmatrix}\ (x,y\in\mathbb{Q}).$$

虚2次体 E の ∞ での完備化 E_∞ は

$$\delta_\xi : E_\infty \ni x + y\xi \mapsto x + y\sqrt{-n(\xi)} \in \mathbb{C}\ (x, y \in \mathbb{R}).$$

により $\mathbb{C}$ と同一視できる. 虚2次体 E のヘッケ指標 $\chi = \prod_{v \le \infty} \chi_v$ に対して, $w_\infty(\chi) \in \mathbb{Z}$ を

$$\chi_\infty(u) = (\delta_\xi(u)/|\delta_\xi(u)|)^{w_\infty(\chi)} \qquad (u \in E_\infty^\times)$$

により与える.

各有限素点 $v = p < \infty$ に対して $i_p(\chi)$ を χ の導手の p 進位数として

$$\mu_p := \frac{\mathrm{ord}_p(2\xi)^2 - \mathrm{ord}_p(d_\xi)}{2}$$

とおく. すると次の命題を得る ([M-N-2, Theorem 5.1.1] 参照):

命題 3.2. 以下が成立しないとき $\mathcal{L}(f, f')^\chi_\xi \equiv 0$ である：

$$\text{任意の } p|d_B \text{ に対して } i_p(\chi) = 0 \text{ 且つ } w_\infty(\chi) = -\kappa. \quad (*)$$

以下ヘッケ指標 χ について, この $(*)$ が成り立つとする.

結果を述べるために更に $\gamma_0 = (\gamma_{0,p})_{v=p\le\infty} \in GL_2(\mathbb{A})$ と $\gamma_0' = (\gamma_{0,p}')_{v=p<\infty} \in B_{\mathbb{A}_f}^\times$ を次の通り与える.

$$\gamma_{0,p} := \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^{-\mu_p + i_p(\chi)} \end{pmatrix} & (p \nmid D), \\ 1_2 & (p|D \text{ で且つ } p \text{ は } E \text{ で惰性}), \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & (p|D \text{ で且つ } p \text{ は } E \text{ で分岐}), \\ \begin{pmatrix} 1 & a/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N(\xi)^{1/4} & 0 \\ 0 & N(\xi)^{-1/4} \end{pmatrix} & (p = \infty), \end{cases}$$

$$\gamma_{0,p}' := \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^{-\mu_p + i_p(\chi)} \end{pmatrix} & (p \nmid d_B), \\ \Pi_p^{-1} & (p|d_B). \end{cases}$$

ここに Π_p は B_p の $p|d_B$ に対する素元とする. さらに次の局所定数を導入する:

$$C_p(f, \xi, \chi) := \begin{cases} p^{2\mu_p - i_p(\chi)}(1 - \delta(i_p(\chi) > 0)e_p(E)p^{-1}) & (p \nmid d_B), \\ 1 & (p|D^{-1}d_B), \\ 2\epsilon_p & (p|D \text{ で且つ } p \text{ は } E \text{ で惰性}), \\ (p+1)^{-1} & (p|D \text{ で且つ } p \text{ は } E \text{ で分岐}). \end{cases}$$

ここに, 与えられた条件 P に対してそれが成り立つとき (resp. 成り立たないとき), $\delta(P) = 1$ (resp. 0) とおき,

$$e_p(E) = \begin{cases} -1 & (p \text{ is inert in } E), \\ 0 & (p \text{ ramifies in } E), \\ 1 & (p \text{ splits in } E), \end{cases}$$

とおく.

そして更に $(f, f') \in S_\kappa(D) \times \mathcal{A}_\kappa$ に対して, ヘッケ指標 χ に関するトーラス積分をを導入する.

$$P_\chi(f; h) := \int_{\mathbb{R}_+^\times E^\times \backslash \mathbb{A}_E^\times} f(\iota_\xi(s)h)\chi(s)^{-1} ds, \ \ P_\chi(f'; h') := \int_{\mathbb{R}_+^\times E^\times \backslash \mathbb{A}_E^\times} f(sh')\chi(s)^{-1} ds.$$

ここに $(h, h') \in GL_2(\mathbb{A}) \times B_{\mathbb{A}}^\times$ で, 不変測度 $\mathbb{A}_E^\times$ の不変測度 ds は各有限素点 p に対して

$$\mathrm{vol}(\mathcal{O}_{E_p}^\times) = \mathrm{vol}(E_\infty^{(1)}) = 1$$

と正規化する ($\mathcal{O}_{E_p}$ は E の整数環の p 進完備化を表し, $E_\infty^{(1)}$ は E_∞ のノルム 1 の元の成す乗法群とする). 虚 2 次体 E の類数と 1 の冪根の個数をそれぞれ $\mathbf{h}(E)$, $\mathbf{w}(E)$ と記す.

(2) 主結果とその応用

以上の設定の下, 主結果が以下のように述べられる ([M-N-2, Theorem 5.2.1] 参照).

定理 3.3. 純四元数 $\xi \in B^- \setminus \{0\}$ が原始的であるとする. 更に χ が $(*)$ を満たし各 $p|D$ に対して $\epsilon_p = \epsilon'_p$ を仮定する. このとき次の公式を得る.

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}(f, f')_\xi^\chi \left(g_0 \begin{pmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ 0 & \sqrt{y}^{-1} \end{pmatrix} \right) \\ &= 2^{\kappa-1} N(\xi)^{\kappa/4} \frac{\mathbf{w}(E)}{\mathbf{h}(E)} \cdot \left(\prod_{p<\infty} C_p(f, \xi, \chi) \right) y^{\kappa/2+1} \exp(-4\pi\sqrt{N(\xi)}y)\, \overline{P_\chi(f; \gamma_0)} P_\chi(f'; \gamma'_0). \end{aligned}$$

ここに $y \in \mathbb{R}_+^\times$ であり, $g_0 = (g_{0,p})_{p<\infty} \in G_{\mathbb{A}_f}$ は以下で与える:

$$g_{0,p} := \begin{cases} \mathrm{diag}(p^{i_p(\chi)-\mu_p}, p^{2(i_p(\chi)-\mu_p)}, 1, p^{i_p(\chi)-\mu_p}) & (p \not| d_B), \\ 1_2 & (p | d_B) \end{cases}$$

注意 3.4. フーリエ係数 $\mathcal{L}(f, f')_\xi^\chi$ は $g_0 \begin{pmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ 0 & \sqrt{y}^{-1} \end{pmatrix}$ での値により決まる ([Su, Proposition 2-5] 参照).

この結果の 2 つの応用を述べる．一つ目は荒川リフトのフーリエ係数と L 関数の中心値との関係である．まず Π (resp. Π') を f で生成される $GL_2(\mathbb{A})$ の保型表現 π_f (resp. f' で生成される保型表現 $\pi_{f'}$ のジャッケ-ラングランズ移送) の $GL_2(\mathbb{A}_E)$ 上の保型表現へのベースチェンジリフトとする．Waldspurger [Wa, Proposition 7] は上で導入したトーラス積分について以下を証明している．

$$\frac{||P_\chi(f;\gamma_0)||^2}{\langle f,f\rangle} = C_{f,\chi}\cdot L(\Pi\otimes\chi^{-1},\frac{1}{2}),$$
$$\frac{||P_\chi(f';\gamma_0')||^2}{\langle f',f'\rangle} = C_{f',\chi}\cdot L(\Pi'\otimes\chi^{-1},\frac{1}{2}).$$

ここに $\varphi = f$ 又は f' に対して

$$C_{\varphi,\chi} = \frac{\sqrt{|d_\xi|}}{4\pi}\cdot\frac{\zeta(2)}{2L(\pi_\varphi,\mathrm{Ad},1)}\prod_{v:\text{``bad''}} C_{\varphi,\chi,v}$$

を表し，$L(\pi_\varphi,\mathrm{Ad},\mathrm{s})$ は随伴 L-関数，そして $C_{\varphi,\chi,v}$ は局所周期や局所 L-値で書ける局所定数である．定数 $\frac{\sqrt{|d_\xi|}}{4\pi}$ は $\mathbb{A}_E^\times$ の不変測度についての Waldpurger の正規化と我々のそれとの違いによる．

定理 3.3 と Waldspurger の公式は

$$\frac{||\mathcal{L}(f,f')_\xi^\chi(g_{0,f})||^2}{\langle f,f\rangle\langle f',f'\rangle} = C_{f,f',\chi}L(\Pi\otimes\chi^{-1},\frac{1}{2})L(\Pi'\otimes\chi^{-1},\frac{1}{2}).$$

を意味する．ここに

$$C_{f,f',\chi} := 2^{2(\kappa-1)}N(\xi)^{\frac{\kappa}{2}}\frac{w(E)}{\mathbf{h}(E)}|\prod_{p<\infty}C_p(f,\xi,\chi)|^2\exp(-8\pi\sqrt{N(\xi)})\cdot C_{f,\chi}\cdot C_{f',\chi}.$$

2 つ目の応用は，荒川リフトの非消滅の例である．具体的には次の場合で非消滅性を考える．最初に四元数環 B を $B=\mathbb{Q}+\mathbb{Q}\cdot i+\mathbb{Q}\cdot j+\mathbb{Q}\cdot ij$ ($i^2=j^2=-1$ and $ij=-ji$) で与える．これは $d_B=2$ で B の類数は 1 であることが知られている．このとき $D=1$ または 2 であることを注意する．この四元数環の極大整環は $\mathcal{O}=\mathbb{Z}1+\mathbb{Z}i+\mathbb{Z}j+\mathbb{Z}(1+i+j+k)/2$ で与えられる．純四元数 $\xi=\frac{1}{2}i$ は原始的である．ヘッケ指標 χ は，すべての有限素点で不分岐とする．

命題 3.5. 記号 B, ξ, χ は上述で与えた通りとする．このとき $\kappa \geq \begin{cases} 12 & (D=1) \\ 8 & (D=2)\end{cases}$ 且つ $4|\kappa$ であるとき，以下を満たすヘッケ同時固有形式の組 (f,f') が存在する:

$$\overline{P_\chi(f;\gamma_0)}P_\chi(f';\gamma_0')\neq 0.$$

この命題と定理 3.3 の帰結として次の定理を得る ([M-N-2, Theorem 14.1.1] 参照).

定理 3.6. 命題 3.5 を満たすヘッケ同時固有形式の組 (f,f') に対して，$\mathcal{L}(f,f')\not\equiv 0$ が成り立つ．

References

[Ar-1] T. Arakawa, On automorphic forms of a quaternion unitary group of degree two, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA 28, (1982), 547-566.

[Ar-2] T. Arakawa, On certain automorphic forms of $Sp(1, q)$, Automorphic forms of several variables, Taniguchi Symposium, Katata, (1983).

[G-W] B. Gross and N. Wallach, On quaternionic discrete series representations, and their continuations, J. Reine. Angew. Math., 481 (1996), 73-123.

[H-S] T. Hina and T. Sugano, On the local Hecke series of some classical groups over $\mathfrak{p}$-adic fileds, J. Math. Soc. Japan 35 (1983), 133-152.

[Ku] S. Kudla, On certain arithmetic automorphic forms for $SU(1, q)$, Invent. Math. 52, (1979), 1-25.

[M-N-1] A. Murase and H. Narita, Commutation relations of Hecke operators for Arakawa lifting, Tohoku Math. J., 60 (2008), 227-251.

[M-N-2] A. Murase and H. Narita, Fourier expansion of Arakawa lifting, preprint, 2008.

[M-W] R. Miatello and N. Wallach, Automorphic forms constructed from Whittaker vectors, J. Funct. Anal., 86 (1989), 411-487.

[N-1] H. Narita, Fourier-Jacobi expansion of automorphic forms on $Sp(1, q)$ generating quaternionic discrete series, J. Func. Anal., 239 (2006), 638-682.

[N-2] H. Narita, Theta lifting from elliptic cusp forms to automorphic forms on $Sp(1, q)$, Math. Z., 259 (2008), 591-615.

[O] T.Oda, On modular forms associated with indefinite quadratic forms of signature $(2, n-2)$, Math. Ann., 231 (1977), 97-144.

[Sch] W. Schmid, Homogeneous complex manifolds and representations of simisimple Lie groups, Dissertation, University of California, Berkley (1967). In: Representation theory and harmonic analysis on simisimple Lie groups, Math. Surveys Monogr., 31, Amer. Math. Soc. Providence, RI (1989), 223-286.

[Shim] G. Shimura, On modular correspondence for $Sp(N, \mathbb{Z})$ and their congruence relations, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 49 (1963), 824-828.

[Shin] T. Shintani, On construction of holomorphic cusp forms of half integral weight, Nagaya Math. J., 58 (1975), 83-126.

[Su] T. Sugano, On holomorphic cusp forms on quaternion unitary groups of degree 2, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, Math., 31 (1985), 521-568.

[Y-N] A. Yamauchi and H. Narita, Some vector-valued singular automorphic forms on $U(2,2)$ and their restriction to $Sp(1,1)$, preprint.

[Wa] J. L. Waldspurger, Sur les valeurs de certaines fonctions L automorphes en leur centre de symmetrie, Compositio Math., 54 (1985), 173–242.

[We] A.Weil, Sur la formule de Siegel dans la theorie des groupes classique, Acta Math., 113 (1965), 1-87.