代数多様体の射に関する標準的高さ関数

川口　周

はじめに

本稿は，代数多様体の射に関する標準的高さについて，背景的な事柄も含めてまとめています．1 節で高さの定義と基本的な性質を述べ，2 節で標準的高さについて述べます．3 節では，J. H. Silverman との共同研究に基づき，$\mathbb{P}^N$ の射に関する標準的高さをより詳しく述べます．4 節では，さまざまな射に関する標準的高さとして，非特異射影曲面の正の位相的エントロピーをもつ同型射に関する標準的高さを述べます．

代数学シンポジウムの講演では，関連する話題も含め，さまざまな射に関する標準的高さの大まかなところを捉えて頂けるように努めました．本稿は講演時の原稿をもとに作成しており，講演と同様に細部はかなり省略されています．末尾に参考文献をかなり挙げましたので，詳細についてはそちらをご覧下さい．

1 節以下では,「だ・である」調に変えます．

1　高さ

ここでは，$\mathbb{P}^N(\overline{\mathbb{Q}})$ の元の高さの定義と基本的な性質をまとめる．詳細は，例えば [3], [11], [19] を参照されたい．

1.1　$\mathbb{P}^N(\mathbb{Q})$ の元の高さ

$x \in \mathbb{P}^N(\mathbb{Q})$ が与えられたとき，x の斉次座標 $(x_0 : x_1 : \cdots : x_n)$ を，

$$x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{Z} \quad \text{かつ} \quad \gcd(x_0, \ldots, x_n) = 1$$

をみたすようにとる．このとき，x の高さ（absolute logarithmic height）は

$$h(x) := \log \max\{|x_0|, \ldots, |x_n|\} \tag{1.1}$$

で与えられる．

x の高さは，x の有理点としての「大きさ，複雑さ」を測る量と考えられる．

例 1.1. $x = (1 : 1) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ のとき，$1 \in \mathbb{Z}$ かつ $\gcd(1, 1) = 1$ なので，

$$h(x) = \log \max\{|1|, |1|\} = \log 1 = 0.$$

〒560-0043 豊中市待兼山町 1-1　大阪大学大学院理学研究科数学教室
kawaguch(())math.sci.osaka-u.ac.jp

例 1.2. $x = \left(\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : 1\right) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{Q})$ のとき，$x = (3 : 2 : 6)$ で $3, 2, 6 \in \mathbb{Z}$ かつ $\gcd(3, 2, 6) = 1$ なので，

$$h(x) = \log \max\{|2|, |3|, |6|\} = \log 6.$$

$\mathbb{P}^N(\mathbb{Q})$ の元だけでなく $\mathbb{P}^N(\overline{\mathbb{Q}})$ の元についても高さを定義するために，以下で，高さの定義 (1.1) を $\mathbb{Q}$ のノルムを使って言い換える．

定義 1.3 ($\mathbb{Q}$ のノルム)**.** $x \in \mathbb{Q}$ とする．

(1)（通常のノルム）$|x|_\infty$ を通常の絶対値とする．
(2)（p 進ノルム）p を素数とする．$x \neq 0$ のとき，$x = p^e \dfrac{a}{b}$ （$e \in \mathbb{Z}, a, b, \in \mathbb{Z}$ は p と互いに素）と書いて，$|x|_p := p^{-e}$ と定める．$x = 0$ のときは，$|0|_p := 0$ と定める．

$\mathbb{Q}$ に入る自明でないノルムは，同値なものを除いて，上の (1)(2) のいずれかであることが知られている（Ostrowski）．

例 1.4. $x = 6 = 2 \cdot 3$ のとき，

$$|6|_\infty = 6,\ |6|_2 = 2^{-1},\ |6|_3 = 3^{-1},\ |6|_p = 1\ (p \neq 2, 3).$$

である．

1.2 $\mathbb{P}^N(\mathbb{Q})$ の元の高さ（つづき）

$M_\mathbb{Q} := \{p$ ：素数 $\} \cup \{\infty\}$ とおく．
$v \in M_\mathbb{Q}$，$x = (x_0, \ldots, x_N) \in \mathbb{Q}^{N+1}$ に対し，$\|x\|_v := \max\{|x_0|_v, \ldots, |x_N|_v\}$ とおく．

定義 1.5 ($\mathbb{Q}$ のノルムを使った高さの定義)**.** $x = (x_0 : \cdots : x_N) \in \mathbb{P}^N(\mathbb{Q})$ の高さは次で定められる：

$$h(x) := \sum_{v \in M_\mathbb{Q}} \log \|x\|_v. \tag{1.2}$$

ここで，右辺は，$x = (x_0 : \cdots : x_N)$ となる斉次座標の代表元 $(x_0, \ldots, x_N) \in \mathbb{Q}^{N+1}$ を一つとって定めている．次の補題 (1) から，右辺は斉次座標の代表元のとりかたによらない．

補題 1.6. (1) $c \in \mathbb{Q}$ を 0 でない任意の有理数とするとき，

$$h((cx_0 : \cdots cx_N)) = h((x_0 : \cdots : x_N)).$$

(2) $h(x) = \sum_{v \in M_\mathbb{Q}} \log \|x\|_v$ は (1.1) で定めた高さと一致している．

証明： (1) c を素因数分解すれば，$\sum_{v \in M_\mathbb{Q}} \log |c|_v = 0$（積公式）が成り立つことが分かる．これより，

$$\begin{aligned}
\sum_{v \in M_\mathbb{Q}} \log \|(cx_0 : \cdots : cx_N)\|_v &= \sum_{v \in M_\mathbb{Q}} \log \max\{|cx_0|_v, \ldots, |cx_N|_v\} \\
&= \sum_{v \in M_\mathbb{Q}} (\log |c|_v + \log \max\{|x_0|_v, \ldots, |x_N|_v\}) \\
&= \sum_{v \in M_\mathbb{Q}} \log |c|_v + \sum_{v \in M_\mathbb{Q}} \log \max\{|x_0|_v, \ldots, |x_N|_v\} = \sum_{v \in M_\mathbb{Q}} \log \|(x_0 : \cdots : x_N)\|_v
\end{aligned}$$

を得る．

(2) (1) から，斉次座標 $x=(x_0:\cdots:x_N)$ は $x_0,\dots,x_n\in\mathbb{Z}$ かつ $\gcd(x_0,\dots,x_n)=1$ をみたすとしてよい．p を任意の素数とするとき，$\gcd(x_0,\dots,x_n)=1$ より

$$\max\{|x_0|_p,\dots,|x_N|_p\}=1$$

である．よって，

$$\begin{aligned}\sum_{v\in M_{\mathbb{Q}}}\log\|x\|_v &= \sum_p \log\max\{|x_0|_p,\dots,|x_N|_p\}+\log\max\{|x_0|_\infty,\dots,|x_N|_\infty\}\\ &=\log\max\{|x_0|_\infty,\dots,|x_N|_\infty\}\end{aligned}$$

となり，(1.1) で定めた高さと一致する． □

例 1.7. $x=\left(\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:1\right)\in\mathbb{P}^2(\mathbb{Q})$ とする．例 1.2 で見たように，(1.1) による x の高さは $h(x)=\log\max\{|2|,|3|,|6|\}=\log 6$ である．一方，ノルムを使った定義 (1.2) で x の高さを計算する．x の斉次座標の代表元として，$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},1\right)$ をとると，

$$\begin{aligned}&\log\left\|\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},1\right)\right\|_2=\log 2,\quad \log\left\|\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},1\right)\right\|_3=\log 3\\ &\log\left\|\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},1\right)\right\|_p=0\quad(p\neq 2,3),\quad \log\left\|\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},1\right)\right\|_\infty=\log 1=0\end{aligned}$$

となる．よって，同じく $h(x)=\sum_{v\in M_{\mathbb{Q}}}\log\|x\|_v=\log 2+\log 3=\log 6$ になる．

高さの性質として，Northcott property とよばれる有限性がある．

命題 1.8 (高さの有限性)**.** $M\geq 0$ を任意の実数とするとき，

$$\{x\in\mathbb{P}^N(\mathbb{Q})\mid h(x)\leq M\}$$

は有限集合である．

証明： $x\in\mathbb{P}^N(\mathbb{Q})$ の斉次座標 $(x_0:\cdots:x_N)$ として，$x_0,\dots,x_n\in\mathbb{Z}$ かつ $\gcd(x_0,\dots,x_n)=1$ ととると， $h(x)=\log\max\{|x_0|_\infty,\dots,|x_N|_\infty\}$ だから，

$$h(x)\leq M\quad\Longleftrightarrow\quad |x_i|_\infty\leq\exp(M)\quad(i=0,\dots,N)$$

である．各 x_i は整数なので，各 i に対してこのような x_i は $2\,[\exp(M)]+1$ 個以下しかない．よって，

$$\#\{x\in\mathbb{P}^N(\mathbb{Q})\mid h(x)\leq M\}\leq(2\,[\exp(M)]+1)^{N+1}$$

を得る． □

1.3 $\mathbb{P}^N(\overline{\mathbb{Q}})$ の元の高さ

今まで，$\mathbb{P}^N(\mathbb{Q})$ の元の高さについて述べてきた．以下，$\mathbb{P}^N(\overline{\mathbb{Q}})$ の元の高さについて述べたい．

K を代数体（すなわち $\mathbb{Q}$ 上の有限次拡大体）とし，O_K を K の整数環とする．

定義 1.9 (K のノルム)**.** $x \in K$ とする．

(1) $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ を体の埋め込みとするとき，$|x|_\sigma := |\sigma(x)|_\infty$ で定める．ここで，右辺の $|\cdot|_\infty$ は，$\mathbb{C}$ の通常の絶対値である．
(2) P を O_K の零でない素イデアルとする．$(O_K)_P$ は離散付値環であり，その局所パラメーターを t とする．$x \neq 0$ のとき，$x = t^e u$（$e \in \mathbb{Z}, u \in (O_K)^\times$）と表し，
$$|x|_P := \#(O_K/P)^{-e}$$
と定める．$x = 0$ のときは，$|0|_P := 0$ と定める．

$M_K = \{P \mid P \text{ は } O_K \text{ の零でない素イデアル }\} \cup \{\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C} \mid \text{体の埋め込み }\}$ とおく．
$v \in M_K$, $x = (x_0, \ldots, x_N) \in K^{N+1}$ に対し，$\|x\|_v := \max\{|x_0|_v, \ldots, |x_N|_v\}$. とおく．

定義 1.10. $x = (x_0 : \cdots : x_N) \in \mathbb{P}^N(K)$ の高さは
$$h(x) := \frac{1}{[K : \mathbb{Q}]} \sum_{v \in M_K} \log \|x\|_v$$
で定められる．ここで，右辺は，$x = (x_0 : \cdots : x_N)$ となる斉次座標の代表元 $(x_0, \ldots, x_N) \in K^{N+1}$ を一つとって定めている．補題 1.6(1) と同じように．右辺は斉次座標の代表元のとりかたによらないことがわかる．

L/K を有限次拡大体とするとき，$(x_0 : \cdots : x_N) \in \mathbb{P}^N(K)$ は，$(x_0 : \cdots : x_N) \in \mathbb{P}^N(L)$ の元とも見なせる．このとき，
$$\frac{1}{[L : \mathbb{Q}]} \sum_{v \in M_L} \log \|x\|_v = \frac{1}{[K : \mathbb{Q}]} \sum_{v \in M_K} \log \|x\|_v$$
が成り立つことが確かめられる．

そこで，$x \in \mathbb{P}^N(\overline{\mathbb{Q}})$ に対して，$x \in \mathbb{P}^N(K)$ となる代数体 K をとって，**高さ関数**
$$h : \mathbb{P}^N(\overline{\mathbb{Q}}) \to \mathbb{R}, \qquad h(x) = \frac{1}{[K : \mathbb{Q}]} \sum_{v \in M_K} \log \|x\|_v$$
が定義できる．

命題 1.8 と同様，高さ h は次の有限性をもつ．

命題 1.11 (高さの有限性, Northcott property)**.** D を任意の正の整数, $M \geq 0$ を任意の実数とするとき，
$$\{x \in \mathbb{P}^N(\overline{\mathbb{Q}}) \mid [\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}] \leq D,\ h(x) \leq M\}$$
は有限集合である．ただし，$\mathbb{Q}(x)$ は x の定義体を表す．

2 標準的高さ

2.1 標準的高さとは

K を代数体とし，X を K 上に定義された射影代数多様体とする．X 上の非常に豊富な因子 D によって，X は K 上で射影空間 $\mathbb{P}^N$ に埋め込まれているとする．

高さ関数 $h : \mathbb{P}^N(\overline{K}) \to \mathbb{R}$ の定義域を $X(\overline{K})$ に制限して，$X(\overline{K})$ 上の高さ関数

$$h|_X : X(\overline{K}) \to \mathbb{R}$$

が考えられる．

さらに，射 $f : X \to X$（あるいはより一般に，有理写像 $f : X \dashrightarrow X$）が与えられたとする．このとき，うまく行く場合は，$h|_X$ を少しだけ変えて，f に関してよく振る舞う高さ関数

$$\widehat{h}_f : X(\overline{K}) \to \mathbb{R}$$

を構成できるときがある．このような高さ関数を f に関する標準的高さ関数という．

2.2 Néron-Tate の高さ（Néron, Tate）

A を代数体 K 上に定義されたアーベル多様体とし，非常に豊富で対称な因子 D によって K 上で $A \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ と射影空間に埋め込まれているとする．$[2] : A \to A$ を 2 倍射とする．h を $\mathbb{P}^N(\overline{K})$ の高さ関数とし，その制限 $h|_A : A(\overline{K}) \to \mathbb{R}$ も同じく h で表す．

このとき，$A(\overline{K})$ 上の関数

$$h_{NT} : A(\overline{K}) \to \mathbb{R}$$

で，

(i) ある定数 C が存在して，$\sup_{x \in A(\overline{K})} |h_{NT}(x) - h(x)| \leq C$,

(ii) $h_{NT}([2]x) = 4h_{NT}(x)$

となるものが一意的に存在する（ただし因子 D には依存している）．h_{NT} を *Néron-Tate* **の高さ**（標準的高さ）という．

注意 2.1. (i) は h_{NT} が $h|_A$ を少し変えたもの，(ii) は h_{NT} が [2] 倍射に関して良く振る舞うことをいっている．

Néron-Tate の高さ h_{NT} は, $x \in A(\overline{K})$ に対し,

$$h_{NT}(x) := \lim_{n \to \infty} \frac{1}{4^n} h([2]^n x)$$

で構成される．

h が有界性（命題 1.11）をみたすことと，h と h_{NT} の差は有界であることから，次が成り立つ．

命題 2.2. (1) 任意の $x \in A(\overline{K})$ について，$h_{NT}(x) \geq 0$．さらに

$$h_{NT}(x) = 0 \iff x \text{ はねじれ元}$$

(2) 任意の正の整数 D に対して，$\{x \in A(\overline{K}) \mid x \text{ はねじれ元で } [K(x) : K] \leq D\}$ は有限集合．

2.3 $\mathbb{P}^N$ の射に関する標準的高さ（Call–Silverman [4], S. Zhang [29]）

$f : \mathbb{P}^N \to \mathbb{P}^N$ を代数体 K 上の射で，次数 $\deg(f) = d$ が 2 以上のものとする．つまり，K 上の斉次 d 次多項式 $F_0, \ldots, F_N \in K[X_0, \ldots, X_N]$ が存在して，$f = (F_0 : \cdots : F_N)$ と表されているとする．

このとき，$\mathbb{P}^N(\overline{K})$ 上の関数

$$\widehat{h}_f : \mathbb{P}^N(\overline{K}) \to \mathbb{R}$$

で，

(i) ある定数 C が存在して，$\sup_{x\in\mathbb{P}^N(\overline{K})} \left|\widehat{h}_f(x) - h(x)\right| \leq C$,

(ii) $\widehat{h}_f(f(x)) = d\widehat{h}_f(x)$

となる $\widehat{h}_f$ が一意的に存在に存在する．$\widehat{h}_f$ を $f : \mathbb{P}^N \to \mathbb{P}^N$ に関する**標準的高さ**という．

注意 2.3. (i) は $\widehat{h}_f$ が h を少し変えたもの，(ii) は $\widehat{h}_f$ が f に関して良く振る舞うことをいっている．

標準的高さ $\widehat{h}_f$ は, $x \in \mathbb{P}^N(\overline{K})$ に対し,

$$\widehat{h}_f(x) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{d^n} h(f^n(x))$$

で構成される．

$x \in \mathbb{P}^N(\overline{K})$ が f-**前周期的**（f-preperiodic）であるとは，次をみたすときにいう．

$$0 \leq \exists n < \exists m, \quad f^n(x) = f^m(x).$$

命題 2.4 ([4])**.** (1) 任意の $x \in \mathbb{P}^N(\overline{K})$ について，$\widehat{h}_f(x) \geq 0$．さらに

$$\widehat{h}_f(x) = 0 \iff x \text{ は } f\text{-前周期点}$$

(2) 任意の正の整数 D に対して，$\{x \in \mathbb{P}^N(\overline{K}) \mid x \text{ は } f\text{-前周期点で } [K(x) : K] \leq D\}$ は有限集合．

2.4 Polarized dynamical system

Néron-Tate の高さや，$\mathbb{P}^N$ の射に関する標準的高さは，次の設定で一般化される．この小節の詳細は，例えば，[26], [30] を参照されたい．

定義 2.5. 三つ組 (X, f, D) が体 K 上の *polarized dynamical system* とは，X は K 上の射影代数多様体，$f : X \to X$ は K 上の有限射，D は X 上の豊富な因子で 2 以上の整数 d が存在して $f^*(D) \sim dD$ となるときにいう．（ここで，$\sim$ は線形同値を表す．）

例 2.6. (1) A はアベール多様体，$[2] : A \to A$ は 2 倍射，D は豊富で対称な因子とする．このとき，$[2]^*D \sim 4D$ であるから $(A, [2], D)$ は polarized dynamical system である．

(2) H を $\mathbb{P}^N$ の超平面とする．射 $f : \mathbb{P}^N \to \mathbb{P}^N$（次数は $d \geq 2$）に対して，$f^*H \sim dH$ であるから，$(\mathbb{P}^N, f, H)$ は polarized dynamical system である．

このような三つ組 (X, f, D) は，[4] や [29] などで既に扱われていたが，「polarized dynamical system」という命名は Zhang [30] によると思われる．

Néron-Tate の高さや，$\mathbb{P}^N$ の射に関する標準的高さは，代数体 K 上の polarized dynamical system の設定で一般化される．さらに，$X_{\overline{K}}$ の点 x の標準的高さ $\widehat{h}_f(x)$ だけでなく，$X_{\overline{K}}$ の部分多様体 Y の標準的高さ $\widehat{h}_f(Y)$ も Arakelov 幾何を用いて構成される（[4], [29]）．

注意 2.7. Fakhruddin [7] によって，任意の polarized dynamical system (X, f, D) に対して，$(\mathbb{P}^N, f, H)$ と X の $\mathbb{P}^N$ への埋め込み $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ が存在して， (X, f, D) は $(\mathbb{P}^N, f, H)$ からの引き戻しで得られることが知られている．

アーベル多様体の類似から，$\mathbb{P}^N$ の射に関する代数的あるいは数論的な力学系のさまざまな予想がたてられている．上の Fakhruddin の結果により，$\mathbb{P}^N$ の射に関する予想の中には，アーベル多様体に関する予想を含んでいるものもある．いくつかの予想を紹介したい．

$f : \mathbb{P}^N \to \mathbb{P}^N$ を体 K 上の射とするとき，$\mathrm{PrePer}(f, K) = \{x \in \mathbb{P}^N(K) \mid x$ は f-前周期的 $\}$ とおく．また，$Y \subset \mathbb{P}^N$ を部分代数多様体とするとき，Y が f-**前周期的**とは，次をみたすときにいう：

$$0 \le \exists n < \exists m, \quad f^n(Y) = f^m(Y) \quad \text{（集合として）}.$$

x を $\mathbb{P}^N$ の点とするとき，

$$O_f(x) := \{f^n(x) \mid n \ge 0\}$$

で，x の f に関する軌道（orbit）を表す．

予想 2.8. (1)（力学系 Manin–Mumford 予想 [30]）$f : \mathbb{P}^N \to \mathbb{P}^N$ を $\mathbb{C}$ 上で定義された次数 2 以上の射とする．$Y \subset \mathbb{P}^N$ を部分代数多様体とする．このとき，

$$Y \cap \mathrm{PrePer}(f, \mathbb{C}) \text{ が } Y \text{ で Zariski 稠密} \quad \Longleftrightarrow \quad Y \text{ は } f\text{-前周期的}.$$

(2)（力学系 Bogomlov 予想 [30]）$f : \mathbb{P}^N \to \mathbb{P}^N$ を代数体 K 上で定義された次数 2 以上の射とする．$Y \subset \mathbb{P}^N_K$ を部分代数多様体とする．このとき，

$$\widehat{h}_f(Y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad Y \text{ は } f\text{-前周期的}.$$

（$\widehat{h}_f(Y)$ は Y の f に関する標準的高さである．なお，予想の同値な言い換えがいくつかある．）

(3)（力学系 Mordell–Lang 予想 [10] 参照）$f : \mathbb{P}^N \to \mathbb{P}^N$ を $\mathbb{C}$ 上で定義された次数 2 以上の射とする．$Y \subset \mathbb{P}^N$ を部分代数多様体とする．また，$x \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ を f-前周期的でない点とする．このとき，

$$\#(Y \cap O_f(x)) = \infty \quad \Longrightarrow \quad Y \text{ の正の次元の部分代数多様体 } W \text{ で，} W \text{ が } f\text{-前周期的であるものが存在}.$$

注意 2.9. アーベル多様体のときの Manin–Mumford 予想は Raynaud によって示された．アーベル多様体のときの Bogomolov 予想は Ullmo と Zhang によって示された．アーベル多様体のときの Mordell–Lang 予想は Faltings によって示された．

注意 2.10. 森脇 [21] は $\mathbb{Q}$ 上有限生成な体 K 上で算術的な高さ関数を Arakelov 幾何を用いて導入し，K 上のアーベル多様体のときの Bogomolov 予想を示している．

注意 2.11. Yuan [28] は，Siu の bigness 定理の算術版を証明し，それを用いて polarized dynamical system の設定で，標準的高さの小さい点に関する equidistribution 定理を証明した．

なお，アーベル多様体のときの標準的高さの小さい点に関する equidistribution 定理は，Szpiro–Ullmo–Zhang によって示され，アーベル多様体上の Bogomlov 予想の解決のための重要な一歩となった．

3　$\mathbb{P}^N$ の射に関する標準的高さ

ここでは，$\mathbb{P}^N$ の射に関する標準的高さ（§2.3 参照）を，[16], [17], [18] に基づいて，より力学系の観点から述べたい．

3.1　複素力学系から

$\overline{\mathbb{Q}}$ 上で定義された $f : \mathbb{P}^N \to \mathbb{P}^N$ に関する標準的高さ $\widehat{h}_f$ の性質を調べるのが目的であるが，対比のために複素力学系からの結果を簡単に紹介したい．$\mathbb{P}^N$ の有理写像に関する複素力学系については，例えば Sibony [24] を参照されたい．

$f : \mathbb{P}^N \to \mathbb{P}^N$ を $\mathbb{C}$ で定義された射で，次数 $\deg f = d$ が 2 以上のものとする．f の反復合成に関する振る舞いの違いで，$\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ は Fatou 集合と Julia 集合に分かれる．

定義 3.1.　(1) $x \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ が *Fatou* **集合**の点であるとは，x の開近傍 U が存在して，$\{f^n|_U\}_{n\geq 1}$ が U 上同等連続になるときにいう．Fatou 集合を記号 $\mathcal{F}(f)$ で表す．

(2) $\mathcal{J}(f) := \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) \setminus \mathcal{F}(f)$ を f の *Julia* 集合という．

$\mathbb{C}$ 上で定義された $f = (F_0 : \cdots : F_N) : \mathbb{P}^N \to \mathbb{P}^N$ に対して，

$$F = (F_0, \ldots, F_N) : \mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\}$$

を f の**持ち上げ**（lift）という．

$x = (x_0, \ldots, x_N) \in \mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\}$ に対し，$\|x\|_\infty := \max\{|x_0|_\infty, \ldots, |x_N|_\infty\}$ とおく．

定義–命題 3.2 (Fornaess–Sibony [9] 参照)**.** $x \in \mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\}$ に対し，

$$G_{F,\infty}(x) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{d^n} \log \|F^n(x)\|_\infty$$

は存在する．$G_{F,\infty} : \mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ を F に関する *Green* **関数**（または escape-rate 関数ともいう）という．

注意 3.3. Green 関数 $G_{F,\infty}$ と標準的高さ関数 $\widehat{h}_f$ の類似は次節で述べたい．

Green 関数 $G_{F,\infty}$ を少し変えて，

$$g_{F,\infty}(x) := G_{F,\infty}(x) - \log \|x\|_\infty$$

とおく．$g_{F,\infty}$ は $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 上の関数とみなせる．

定義 3.4. $T = dd^c(g_{F,\infty})$ とおく．T は $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 上の正かつ閉の $(1,1)$-カレントである．T は *Green* **カレント**と呼ばれる．

定理 3.5 ([9])**.** $\mathrm{Supp}(T) = \mathcal{J}(f)$ が成り立つ．言い換えれば，

$$\mathcal{F}(f) = \{x \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) \mid g_{F,\infty} \text{ は } x \text{ の周りで多重調和 }\}.$$

T などを用いて，$f : \mathbb{P}^N \to \mathbb{P}^N$ の反復合成に関する深い性質が調べられている（Bedford, Fornaess, Hubbard, Sibony, Smilie, . . . ）．

3.2 Green 関数 $G_{F,\infty}$，標準的高さ関数 $\widehat{h}_f$，p 進 Green 関数

$\mathbb{P}^N$ の射 f について，今までに出てきた，高さ関数，標準的高さ関数，Green 関数をまとめよう．簡単のため，$f:\mathbb{P}^N\to\mathbb{P}^N$ は $\mathbb{Q}$ 上で定義されているとする．

- $x=(x_0:\cdots:x_N)\in\mathbb{P}^N(\mathbb{Q})$ に対して，通常の高さ $h(x)=\displaystyle\sum_{v\in M_{\mathbb{Q}}}\log\|x\|_v$.
- 標準的高さ $\widehat{h}_f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{d^n}h(f^n(x))$.
- $x=(x_0,\ldots,x_N)\in\mathbb{C}^{N+1}\setminus\{0\}$ に対して，Green 関数 $G_{F,\infty}(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{d^n}\log\|F^n(x)\|_\infty$

これから，次の表が作れる．

	高さ	∞	p
通常	$h(x)$	$\log\|x\|_\infty$	$\log\|x\|_p$
$f:\mathbb{P}^N\to\mathbb{P}^N$	$\widehat{h}_f(x)$	$G_{F,\infty}(x)$	?

この表を眺めると，？には p 進 Green 関数が入ると考えられる．

$\mathbb{Q}_p$ を p 進ノルム $|\cdot|_p$ に関する $\mathbb{Q}$ の完備化とし，$\mathbb{C}_p$ を $\mathbb{Q}_p$ の代数閉包の p 進ノルムに関する完備とする．
$f:\mathbb{P}^N\to\mathbb{P}^N$ を $\mathbb{C}_p$ 上で定義された次数が 2 以上の射とし，その持ち上げ $F:\mathbb{C}_p^{N+1}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}_p^{N+1}\setminus\{0\}$ をひとつ固定する．
$x=(x_0,\ldots,x_N)\in\mathbb{C}_p^{N+1}\setminus\{0\}$ に対し，$\|x\|_p:=\max\{|x_0|_p,\ldots,|x_N|_p\}$. とおく．

定義–命題 3.6. $x\in\mathbb{C}_p^{N+1}\setminus\{0\}$ に対し，

$$G_{F,p}(x):=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{d^n}\log\|F^n(x)\|_p$$

は存在する．$G_{F,p}:\mathbb{C}_p^{N+1}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ を F に関する p **進** *Green* **関数**という．

注意 3.7. $N=1$ のときは，$G_{F,p}$ は Baker-Rumely [2] による．[2] では，$G_{F,p}$ を斉次局所標準的高さ関数と呼んでいる．

よって，上の表は次になる．

	高さ	∞	p
通常	$h(x)$	$\log\|x\|_\infty$	$\log\|x\|_p$
$f:\mathbb{P}^N\to\mathbb{P}^N$	$\widehat{h}_f(x)$	$G_{F,\infty}(x)$	$G_{F,p}(x)$

3.3 p 進 Green 関数と p 進力学系

定義 3.8. $x=(x_0:\cdots:x_N),y=(y_0:\cdots:y_N)\in\mathbb{P}^N(\mathbb{C}_p)$ に対し，

$$d(x,y):=\frac{\max_{i<j}\{|x_iy_j-y_ix_j|_p\}}{\|x\|_p\cdot\|y\|_p}$$

を $\mathbb{P}^N(\mathbb{C}_p)$ の *chordal metric* という．d によって，$\mathbb{P}^N(\mathbb{C}_p)$ は距離空間になる．

$x \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C}_p)$, $\varepsilon > 0$ に対し，

$$U_\varepsilon(x) := \{y \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C}_p) \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

とおく．

定義 3.9. $f : \mathbb{P}^N \to \mathbb{P}^N$ を $\mathbb{C}_p$ 上で定義された次数 $d \geq 2$ の射とする．

(1) $x \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C}_p)$ が p 進 Fatou 集合の点であるとは，x の開近傍 $U_\varepsilon(x)$ が存在して，$\{f^n|_{U_\varepsilon(x)}\}_{n\geq 1}$ が $U_\varepsilon(x)$ 上同等連続になるときにいう．Fatou 集合を $\mathcal{F}(f)$ と書く．

(2) $\mathcal{J}(f) := \mathbb{P}^N(\mathbb{C}_p) \setminus \mathcal{F}(f)$ を f の p 進 Julia 集合という．

注意 3.10. (1) $\mathbb{C}_p$ 上では, $\{f^n|_{U_\varepsilon(x)}\}_{n\geq 1}$ の同等連続性は, 局所一様 Lipshitz 連続性と同値になる ([17]).

(2) $\mathbb{P}^N(\mathbb{C}_p)$ の位相はよくないことを指摘しておかなければならない．p 進力学系を考えるには，$\mathbb{P}^N(\mathbb{C}_p)$ に点を付け加えた Berkovich 空間上で考えるのがよいとされる．しかし，Berkovich $\mathbb{P}^N$（$N \geq 2$）の詳しい描写は知られていないように思われる．

(3) Berkovich $\mathbb{P}^1$ 上では，p 進力学系はいろいろと研究されている（[23] など）．Rivera–Letelier は，Berkovich $\mathbb{P}^1$ の Fatou 集合 $\mathcal{F}_{Berk}(f)$ を以下のように定義している：Berkovich $\mathbb{P}^1$ の点 x が, $\mathcal{F}_{Berk}(f)$ の点であるとは，x の近傍 U が存在して，$\bigcup_{n=1}^\infty f^n(U)$ が Berkovich $\mathbb{P}^1$ の 3 点を通らないようにできるときにいう．なお，$\mathcal{F}_{Berk}(f)$ を $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ に制限すれば，$\mathcal{F}(f)$ と一致している（と思う）．

p 進 Green 関数 $G_{F,p}$ を少し変えて，

$$g_{F,p}(x) := G_{F,p}(x) - \log \|x\|_p$$

とおく．$g_{F,p}$ は $\mathbb{P}^N(\mathbb{C}_p)$ 上の関数とみなせる．

定理 3.11 ([17]).

$$\mathcal{F}(f) = \{x \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C}_p) \mid g_{F,p} \text{ は } x \text{ の周りで局所定数 }\}$$

が成り立つ．

注意 3.12. (1) 上の定理は，$\mathbb{C}$ 上の $\mathcal{F}(f)$ が $g_{F,\infty}$ の多重調和性で特徴づけられることの p 進版と思える．

(2) $\mathbb{C}$ 上では dd^c-作用素があったが，$\mathbb{C}_p$ 上では dd^c-作用素は $\dim N \geq 2$ のとき知られていない．$\dim N = 1$ のときには，Berkovich $\mathbb{P}^1$ 上で dd^c-作用素は定義され研究されている（[6], [8], [27] など）．

3.4 標準的高さが一致するとき

$\overline{\mathbb{Q}}$ 上で定義された $\mathbb{P}^N$ の二つの射 f, g が同じ標準的高さ $\widehat{h}_f \equiv \widehat{h}_g$ をもつときに，何がいえるかを考えよう．

複素力学系では，f と g の Julia 集合が一致するときや，Green 関数が定数の差を除いて一致するときに，何がいえるか調べられている．上の問いはその標準的高さ版とみなせる．

命題 3.13 (大域から局所へ [16]). $f : \mathbb{P}^N \to \mathbb{P}^N$, $g : \mathbb{P}^N \to \mathbb{P}^N$ はともに，代数体 K 上に定義された次数が 2 以上の射とする．f, g の持ち上げ F, G をそれぞれ一つずつ固定する．このとき，$\widehat{h}_f \equiv \widehat{h}_g$ ならば，零でない $a \in \overline{\mathbb{Q}}$ が存在して，

$$G_{F,v}(\cdot) \equiv G_{G,v}(\cdot) + \log |a|_v$$

が任意の $v \in M_K$ について成り立つ.

注意 3.14. Agboola–Pappas [1] が，Rumely の稠密性定理を用いて，より一般的な状況で大域から局所への命題を示している（ことを後で知った）.

定理 3.15 ([16])**.** $f, g \in \overline{\mathbb{Q}}[X]$ が 1 変数の多項式のとき，$\widehat{h}_f \equiv \widehat{h}_g$ となるものは次の 3 種類に分類できる.

(i) $\overline{\mathbb{Q}}$ 上のアフィン写像による共役で，$f(X) = X^n$, $g(X) = \eta X^m$（ただし，η は 1 のべき乗根）となる.
(ii) $\overline{\mathbb{Q}}$ 上のアフィン写像による共役で，$f(X) = \pm T_n(X)$, $g(X) = \pm T_m(X)$ となる．ただし，$T_n(X), T_m(X)$ はチェビシェフ多項式を表す.
(iii) ある多項式 $\varphi(X) \in \overline{\mathbb{Q}}[X]$ が存在して，$f(X) = \eta_1 \varphi^n(X)$, $g(X) = \eta_2 \varphi^m(X)$（ただし，$\eta_1, \eta_2$ は 1 のべき乗根）となる.

上の定理の証明には，命題 3.13 と複素力学系からの結果を用いる.

定理 3.16 ([16])**.** 次の f の場合に $\widehat{h}_f$ と同じ標準的高さ関数 $\widehat{h}_g$ をもつような（あるいはもう少し弱い条件をみたすような）g は特徴づけられる.

(1) $f : \mathbb{P}^N \to \mathbb{P}^N$ が d-th power map のとき
(2) $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ が楕円曲線の準同型から誘導される場合（Lattès の例と呼ばれる場合）

上の定理の証明には，Laurent の定理，Raynaud の定理を用いる.

3.5 f と g の算術的な擬距離

$f, g : \mathbb{P}^N \to \mathbb{P}^N$ が $\overline{\mathbb{Q}}$ 上に定義されているとする．このとき，二つの標準的高さの差

$$\delta(f,g) := \sup_{x \in \mathbb{P}^N(\overline{\mathbb{Q}})} \left| \widehat{h}_f(x) - \widehat{h}_g(x) \right| < \infty$$

は，f と g の算術的な擬距離を与えていると考えられる.

注意 3.17. $\delta(f,g) = 0$ となるのは f と g の標準的高さ関数が一致する場合（§3.4 参照）である.

定理 3.18 ([18])**.** δ は Northcott 型の有限性をみたす．つまり，$\overline{\mathbb{Q}}$ 上に定義された次数 2 以上の射 $f : \mathbb{P}^N \to \mathbb{P}^N$ を固定する．このとき，任意の整数 $e \geq 2$, 任意の整数 $D \geq 1$, 任意の実数 $M \geq 0$ に対して，

$$\left\{ g : \mathbb{P}^N \to \mathbb{P}^N \mid \deg(g) \leq e, \quad [\mathbb{Q}(g) : \mathbb{Q}] \leq D, \quad \delta(f,g) \leq M \right\}$$

は有限集合である.

4 いろいろな射に関する標準的高さ

$f : X \to X$ は polarized dynamical system では**ない**が，f に関して良く振る舞う高さ関数が存在することがある.

(1) 非特異射影曲面の正の位相的エントロピーをもつ同型射 [15]

(2) その他 [12], [13], [14] など．

ここでは，[15] に基づいて，(1) について紹介したい．

4.1 位相的エントロピー

まず，位相的エントロピーの定義を述べる．(X,d) をコンパクトな距離空間とし，$f : X \to X$ を連続写像とする．

$x \in X$, 正の数 ε, 正の整数 n に対し，$B_n(x,\varepsilon) := \{y \in X \mid \max_{0\le i\le n} d(f^i(x), f^i(y)) < \varepsilon\}$ とおく．おおざっぱにいって，

$$y \in B_n(x,\varepsilon) \iff f \text{ で } n \text{ 回まで反復合成しても，} y \text{ は } x \text{ との誤差が } \varepsilon \text{ 未満}$$

である．

次に，$S_n(\varepsilon) := \min\{\#F \mid F \subset X, X = \bigcup_{x\in F} B_n(x,\varepsilon)\}$ とおく．ε を固定すると，おおざっぱにいって，

$$S_n(\varepsilon) \text{ の増大度} \iff f \text{ で } n \text{ 回まで反復合成したとき，誤差がどのくらい拡大するか}$$
$$\sqrt[n]{S_n(\varepsilon)} \iff n \text{ 回反復合成したときの誤差の増大度の 1 回あたり平均}$$

を表している．

定義 4.1. f の位相的エントロピーは

$$h_{top}(f) := \lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log S_n(\varepsilon)$$

で与えられる．

$h_{top}(f)$ の定義はややこしかったが，コホモロジーによる簡明な言い換えがある（こちらを $h_{top}(f)$ の定義と思ってもよい）．一般に，X がコンパクト Kähler 多様体のときに，コホモロジーによる言い換えがあるが，ここでは，X が非特異射影曲面のときに述べる．

X を $\mathbb{C}$ 上に定義された非特異射影曲面とする．射 $f : X \to X$ に対し，

$$\lambda(f) := \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ は } f^* : H^{1,1}(X) \to H^{1,1}(X) \text{ の固有値 }\}$$

とおく．

定理 4.2 (Gromov, Yomdin)**.** $h_{top}(f) = \log \lambda(f)$

ちなみに．X を $\mathbb{C}$ 上に定義された非特異射影曲面のとき，X の同型射で $h_{top}(f) > 0$ をみたすものが存在するという条件は強い条件であることが知られている．

定理 4.3 (Cantat [5])**.** $\mathbb{C}$ 上に定義された非特異射影曲面 X が，$h_{top}(f) > 0$ となる同型射 $f : X \to X$ をもつとする．このとき

(i) X は有理曲面, または

(ii) X は $K3$ 曲面かアーベル曲面か Enriques 曲面に双有理同値である．

例 4.4. E を $\mathbb{C}$ 上の楕円曲線とし，$A = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ を $\mathrm{tr}(A) > 2$ である 2×2 行列とする．

$E \times E$ の同型射

$$\widetilde{f} : E \times E \to E \times E, \quad (x, y) \mapsto (px + qy, rx + sy)$$

を考える．$\widetilde{f}$ は，Kummer 曲面 $\mathrm{Kum}(E \times E)$ の同型射を導く：

$$f : \mathrm{Kum}(E \times E) \to \mathrm{Kum}(E \times E).$$

このとき，$h_{top}(f) = 2 \log \frac{(p+s)+\sqrt{(p+s)^2-4}}{2} > 0$ である．

例 4.5 (Mazur [20] 参照)**.** X を $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の一般の $(2, 2, 2)$-超曲面とする．X は $K3$ 曲面である．このとき，(i, j) 成分への射影

$$\pi_{ij} : X \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1,$$

は $2:1$ の射なので，π_{ij} は対合射 $\sigma_{ij} : X \to X$ を導く．このとき，３つの対合射を合成した

$$\sigma_{12} \circ \sigma_{23} \circ \sigma_{13} : X \to X$$

は，X の同型射で $h_{top}(f) = \log(9 + 4\sqrt{5}) > 0$ をみたす．

この他にも，有理曲面の正の位相的エントロピーをもつ同型射で，興味深い例が知られている（[22] など）．

X を $\mathbb{C}$ 上で定義された非特異射影曲面，$f : X \to X$ を同型射とする．

定義 4.6. X 上の既約曲線 C が f-周期的であるとは，ある正の整数 n が存在して，　$f^n(C) = C$（集合として）となるときにいう．

命題 4.7 ([15])**.** $h_{top}(f) > 0$ のとき，X 上の f-周期曲線は高々有限個である．

そこで，X 上の因子 E を $E := \displaystyle\sum_{C:\ f\text{-周期曲線}} C$ で定める．

$h_{top}(f) = \log \lambda > 0$ とすると，コホモロジーによる言い換えから，

$$f^* D_1 \equiv \lambda D_1, \quad f^{-1*} D_2 \equiv \lambda D_2$$

となる零でない $\mathbb{R}$-因子 D_1, D_2 が存在することが分かる．ただし，$\equiv$ は数値同値を表す．

$D = D_1 + D_2$ とおく．必要なら D_1 を $-D_1$ に D_2 を $-D_2$ に取り替えることで，D はネフかつ巨大な $\mathbb{R}$-因子になる．

4.2 結果

K を代数体とし，$K \subset \mathbb{C}$ を固定する．X を K 上に定義された非特異射影曲面，$f : X \to X$ を K 上の同型射とする．

定理 4.8 ([15])**.** $h_{top}(f) = \log \lambda > 0$ とする．このとき，

$$\exists \quad \widehat{h}_f : X(\overline{K}) \to \mathbb{R}$$

で，

(i) $\widehat{h}_f$ は，ネフかつ巨大な $\mathbb{R}$-因子 D に付随する高さ関数で，
(ii) $\widehat{h}_f(f(x)) + \widehat{h}_f(f^{-1}(x)) = (\lambda + \lambda^{-1})\widehat{h}_f(x)$

をみたすものが一意的に存在する（ただし D には依存する）．

$\widehat{h}_f$ は，$x \in X(\overline{K})$ に対し

$$\widehat{h}_f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda^n} h_{D_1}(f^n(x)) + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda^n} h_{D_2}(f^{-n}(x))$$

で構成される．（ただし，D_1, D_2 に付随する高さ関数 h_{D_1}, h_{D_2} をそれぞれ一つとる．）

定理 4.9 ([15])**.** (1) 任意の $x \in X(\overline{K})$ について，$\widehat{h}_f(x) \geq 0$．さらに

$$\widehat{h}_f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in E(\overline{K}),\ \text{または } x \text{ は } f\text{-周期点}$$

(2) $x \notin E(\overline{K})$ かつ x は f-周期点でないとする．$O_f^+(x) := \{f^n(x) \mid n \geq 0\}$ を x の f に関する前軌道とする．このとき，

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\#\{y \in O_f^+(x) \mid h_H(y) \leq T\}}{\log T} = \frac{1}{\log \lambda}$$

が成り立つ．ここで，H は任意の豊富な因子で h_H は H に付随する高さ関数である．

注意 4.10. Silverman [25] は．2種類の対合射 σ_1, σ_2 をもつある K3 曲面上で，標準的高さ関数 $\widehat{h}_{Sil}$ を構成した．このとき，$\sigma_1 \circ \sigma_2$ は正のエントロピーをもち，$\widehat{h}_{\sigma_1\circ\sigma_2} = \widehat{h}_{Sil}$ が確かめられる．上の定理は，Silverman の結果の一般化と見なせる．

参考文献

[1] A. Agboola and G. Pappas, *Line bundles, rational points and ideal classes*, Math. Res. Lett. **7** (2000), 709–717.

[2] M. Baker and R. Rumely, *Equidistribution of small points, rational dynamics, and potential theory*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **56** (2006), 625–688.

[3] E. Bombieri and W. Gubler, Heights in Diophantine geometry, New Mathematical Monographs 4. Cambridge University Press, 2006.

[4] G. Call and J. H. Silverman, *Canonical heights on varieties with morphisms*, Compositio Math. **89** (1993), 163–205.

[5] S. Cantat, *Dynamique des automorphismes des surfaces projectives complexes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **328** (1999), 901–906.

[6] A. Chambert-Loir, *Mesures et équidistribution sur les espaces de Berkovich*, J. Reine Angew. Math. **595** (2006), 215–235.

[7] N. Fakhruddin, *Questions on self maps of algebraic varieties*, J. Ramanujan Math. Soc. **18** (2003), 109–122.

[8] C. Favre and J. Rivera-Letelier, *Équidistribution quantitative des points de petite hauteur sur la droite projective*, Math. Ann. **335** (2006), 311–361. Corrigendum: **339** (2007), 799–801.

[9] J. E. Fornaess, N. Sibony, *Complex dynamics in higher dimension. II.*, Modern methods in complex analysis (Princeton, NJ, 1992), 135–182, Ann. of Math. Stud. **137**, 1995.

[10] D. Ghioca and T. J. Tucker. *A dynamical version of the Mordell-Lang conjecture for the additive group*, Compositio Math. **144** (2008), 304–316.

[11] M. Hindry and J. H. Silverman, Diophantine geometry, Springer-Verlag, 2000.

[12] S. Kawaguchi, *Canonical heights, invariant currents, and dynamical eigensystems of morphisms for line bundles*, J. Reine Angew. Math. **597** (2006), 135–173.

[13] S. Kawaguchi, *Canonical height functions for affine plane automorphisms*, Math. Ann. **335** (2006), 285–310.

[14] S. Kawaguchi, *Canonical heights for random iterations in certain varieties*, Int. Math. Res. Not. **2007** (2007), Art. ID rnm023, 33 pages.

[15] S. Kawaguchi, *Projective surface automorphisms of positive topological entropy from an arithmetic viewpoint*, Amer. J. Math. **130** (2008), 159–186.

[16] S. Kawaguchi and J. H. Silverman, *Dynamics of projective morphisms having identical canonical heights*, Proc. London Math. Soc. (3) **95** (2007), 519–544. Addendum: **97** (2008), 272.

[17] S. Kawaguchi and J. H. Silverman, *Nonarchimedean Green functions and dynamics on projective space*, to appear, Math. Z. DOI 10.1007/s00209-008-0368-8

[18] S. Kawaguchi and J. H. Silverman, *Canonical heights and the arithmetic complexity of morphisms on projective space*, preprint (ArXiv:0706.2166)

[19] S. Lang, Fundamentals of Diophantine geometry, Springer, 1983.

[20] B. Mazur, *The topology of rational points*, Experiment. Math. **1** (1992), 35–45.

[21] A. Moriwaki, *Arithmetic height functions over finitely generated fields*, Invent. Math. **140** (2000), 101–142.

[22] C. T. McMullen, *Dynamics on blowups of the projective plane*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. No. **105** (2007), 49–89.

[23] J. Rivera-Letelier, *Dynamique des fonctions rationnelles sur des corps locaux*, Geometric methods in dynamics. II. Astérisque No. **287** (2003), xv, 147–230.

[24] N. Sibony, *Dynamique des applications rationnelles de* $\mathbb{P}^k$, in Dynamique et géométrie complexes (Lyon, 1997), 97–185, Soc. Math. France, 1999.

[25] J. H. Silverman, *Rational points on* $K3$ *surfaces: a new canonical height*, Invent. Math. **105** (1991), 347–373.

[26] J. H. Silverman, *The Arithemtic of Dynamical Systems*, GTM **241**, Springer, 2007.

[27] A. Thuillier, *Théorie du potentiel sur les courbes en géométrie analytique non archimédienne. Applications à la théorie d'Arakelov*, Ph. D thesis, Université Rennes, 2005.

[28] X. Yuan, *Big line bundles over arithmetic varieties*, Invent. Math. **173** (2008), 603–649.

[29] S. Zhang, *Small points and adelic metrics*, J. Algebraic Geom. **4** (1995), no. 2, 281–300.

[30] S. Zhang, *Distributions in Algebraic Dynamics, A tribute to Professor S.–S. Chern*, Survey in Differential Geometry, vol **10**, 381-430, International Press 2006.