リジッド幾何学の概説

加藤文元

2008 年度代数学シンポジウムでの筆者の講演に基づいて報告致します.

1. はじめの一歩

歴史的には，リジッド幾何学は**非アルキメデス的付値体上の解析幾何学**としてスタートした.

1.1. キーワード. 以下の記述に現れるキーワードの中から，特に注目するべきものを 4 つ挙げる.

- **非アルキメデス的付値**
  - ここから非アルキメデス的函数論が自然に生じる
  - 特にその**解析接続**をどのように考えるかが重要.
- **やや大域化された局所**の考え方
  - リジッド空間の局所的建築資材である *affinoids* の構成のために，極めて重要な考え方.
  - 「リジッド」という名前の由来にもなっている.
- **解析的還元**（analytic reduction）
  - ここからリジッド空間の**形式モデル**というものが生じる.
  - 形式スキームの幾何学とリジッド幾何学を橋渡す Raynaud の視点につながる.
- **視覚化**（visualization）
  - *Zariski-Riemann* **空間**によるリジッド空間の視覚化
  - リジッド幾何学の**双有理幾何的アプローチ**という比較的新しいプログラムへつながる.

1.2. 非アルキメデス的函数論. 非アルキメデス的付値にまつわる数学は，1905 年の K. Hensel による p-進数の発見，及び 1918 年の A. Ostrowski による $\mathbb{Q}$ の付値の分類により創始されたとしてよいと思われる．これを踏まえて，すでに 1930 年に W. Schöbe が非アルキメデス的付値体上の函数論を試みている.

しかし，非アルキメデス的函数論の本格的な進展は，1940 年代からの M. Krasner の仕事により始まったとしてよいだろう．その一番の理由は，ここにおいて非アルキメデス的函数論における解析接続の理論が考察されたことにある.

この点は，複素解析の場合と本質的に異なる点である．簡単な例で見てみよう.

- K = 完備非アルキメデス的付値体，代数的に閉
- $f(x) \in K[\![x]\!]$：正の収束半径（$= r$）を持つべき級数

としよう．$f(x)$ は原点中心半径 r の開円盤 $D = D^{-}(0, r)$ 上の「正則」函数を定義する．$a \in D$ を任意に取り，$f(x)$ を a 中心で展開し直す．すると，得られたべき級数の収束円は，残念ながら D に一致してしまう．ここには「空でない交わりを持つ二つの開円盤の間には必ず包含関係がある」という，非アルキメデス的距離特有の現象が反映されている．

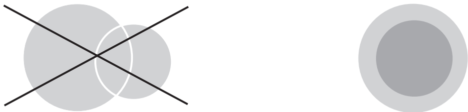

FIGURE 1. 円盤の交わり方

このようなわけで，非アルキメデス的函数論においては，複素函数論の場合とは本質的に異なった解析接続の理論を展開する必要がある．そして，この点がリジッド幾何学における二つ目のキーワード「やや大域化された局所」という考え方につながっていくポイントなのである．

1.3. 非アルキメデス的距離空間. ここで非アルキメデス的距離について簡単に復習しておきたい．

空間 X 上の距離函数 $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が**非アルキメデス的**とは，

$$d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\}$$

という不等式（超距離三角不等式）が任意の $x, y, z \in X$ について成立することである．このような距離空間 (X, d) には，以下のような（多少奇妙な）性質がある．

- 開円盤は閉である．また，閉円盤は開である．つまり，これらは開かつ閉（clopen）な集合である．
- 空でない交わりを持つ二つの（開または閉）円盤の間には必ず包含関係がある（既出）．
- 円盤上の任意の点はその円盤の中心（非アルキメデス的ユートピア）．
- 人は大概「円の半径より直径の方が大である」と思っているが，それは間違い．ここでは円の直径は半径以下．

そして最も重要なことは：

定理 1.1. 非アルキメデス的距離空間 (X, d) において，X の距離位相は全不連結（*totally disconnected*），つまり 2 点以上からなる部分集合は必ず不連結である．

この「全不連結性」には，次の二つの側面がある：

- **位相が細か過ぎる．**
  - 例えば円盤のように，開かつ閉な集合が過剰に存在している．
  - そのため，開被覆の細分も過剰に取れてしまう（この点は X 上で層の貼り合わせを考える際の障害となりやすい）．
- **点が少な過ぎる．**

– 例えば，全不連結な位相空間の代表例として，有理数全体 $\mathbb{Q}$ に実直線 $\mathbb{R}$ からの部分空間位相を入れたものを挙げることができる（$\mathbb{Q}$ を「完備化」することで，$\mathbb{R}$ のような「連続な」空間を得ることができるが，$\mathbb{Q}$ のままでは点が少ないというわけ）．

非常に大雑把に言って，この二点が非アルキメデス的函数論を安直に展開しようとする際の，本質的な障害となる．リジッド幾何学という学問は，まさにこれらの障害を乗り越えるところから始まったと言ってよい．

2. リジッド幾何学の出発点

2.1. 歴史. 1961 年の Harvard 大学における J. Tate のセミナーにおいて，初めてリジッド幾何学のアイデアが紹介された．このセミナーノートは Tate 本人の承諾なしに回覧され，Inventiones から出版までされてしまった．この内容を踏まえて，Grauert-Remmert が 1966 年に非アルキメデス的函数論に Tate のアイデアを導入する．ここでは Weierstrass の準備定理の非アルキメデス版といった，函数論を展開する上での基本的な理論が展開されている．また，今日でも使われている ‘affinoid’ という用語を初めて用いたのも彼らである．1969 年に Gerritzen-Grauert が affinoid の構造について精査し，有名な定理を示した．R. Kiehl（1967）においては，定理 A や定理 B，さらには有限性定理といった幾何学をする上でのコホモロジー論的基礎付けを行う．そして 1972 年 M. Raynaud による新たな視点の開拓に到る．

2.2. Tate 曲線. 先を急ぐ前に，Tate によるアイデアの根幹をスケッチしようと思う．Tate による「リジッド解析幾何学」のそもそもの動機には，今日 *Tate curve* と呼ばれる，ある種の楕円曲線の話がある．

平面 3 次曲線

$$E : y^2 + xy - x^3 + b_2x + b_3 = 0 \quad (\Delta = b_3 + b_2^2 + 72b_2b_3 - 432b_3^2 + 64b_2^3 \neq 0),$$

を考えよう．とりあえず，これを複素数体 $\mathbb{C}$ 上で考えると，我々は E が一意化

$$\mathbb{C}^\times \xrightarrow{/\mathbb{Z}} E(\mathbb{C})^{\mathrm{an}}$$

を持つことを知っている．$\mathbb{C}^\times$ の座標 w によって，この一意化写像を書くと，次のようになる：

$$\begin{aligned} x(w) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{q^m w}{(1-q^m w)^2} - 2\sum_{m\geq 1} \frac{q^m}{(1-q^m)^2}, \\ y(w) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{(q^m w)^2}{(1-q^m w)^3} + \sum_{m\geq 1} \frac{q^m}{(1-q^m)^2}. \end{aligned}$$

ただし，ここでパラメーター q と係数 b_2, b_3 との関係は次の通り：

$$b_2 = b_2(q) = 5\sum_{n\geq 1} \frac{n^3 q^n}{1-q^n} = 5q(1 + 9q + 28q^2 + \cdots),$$

$$b_3 = b_3(q) = \sum_{n\geq 1} \frac{(7n^5 + 5n^3)q^n}{12(1-q^n)} = q(1 + 23q + 154q^2 + \cdots).$$

Tate はこの一意化が，$\mathbb{C}$ を $\mathbb{C}_p$ に代わっても，意味を持つことを観察した．（ここで $\mathbb{C}_p$ は、$\mathbb{Q}_p$ の代数閉包の p-進完備化.）これを見るために，Tate は簡単な恒等式を用いて，上の式を次のように変形する：

$$\begin{aligned} x(w) &= \frac{w}{(1-w)^2} + \sum_{m\geq 1}\left(\frac{q^m w}{(1-q^m w)^2} + \frac{q^m w^{-1}}{(1-q^m w^{-1})^2} - 2\frac{q^m}{(1-q^m)^2}\right) \\ y(w) &= \frac{w^2}{(1-w)^3} + \sum_{m\geq 1}\left(\frac{q^{2m} w^2}{(1-q^m w)^3} - \frac{q^m w^{-1}}{(1-q^m w^{-1})^3} + \frac{q^m}{(1-q^m)^2}\right) \end{aligned}$$

こうすると，これらの無限和は

$$r_1 \leq |w| \leq r_2, \quad |w - q^m| \geq \varepsilon, \quad |w^{-1} - q^m| \geq \varepsilon \quad (m \in \mathbb{Z})$$

で定義される領域 $R(r_1, r_2, \varepsilon)$ 上で一様収束していることがわかる（.

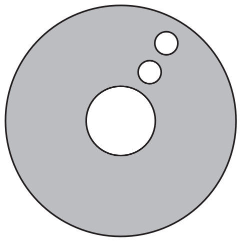

Figure 2. 領域 $R(r_1, r_2, \varepsilon)$

これによって Tate は，$x = x(w)$ や $y = y(w)$ を $\mathbb{C}^\times$ 上 $w = q^m$（$m \in \mathbb{Z}$）に極を持つ有理型函数であると見なす．ここで参考にするべきは，複素函数論における有名な Runge の定理である：$\mathbb{C}$ の領域 D における正則函数は，D で極を持たない有理函数列の広義一様収束先として書ける．のみならず，$\mathbb{C}$ 上の時と同様にこれらの函数は $q^{\mathbb{Z}}$ の作用に関する保形函数となっており，これによって写像

$$\pi\colon (\mathbb{G}_{m,K})^{\mathrm{cl}} \longrightarrow E^{\mathrm{cl}}$$

が得られる（$\cdot^{\mathrm{cl}}$ は「閉点全体」を表す）．Tate はこれが $q^{\mathbb{Z}}$ の作用に関する商写像（特に全射）であることを示し，$\mathbb{C}_p$ 上でも $\mathbb{C}$ 上の場合と同様な一意化写像が存在することを示した．

ここにおいて問題となってくるのは，では，この「一意化」はいかなる幾何的枠組みに属するものなのだろうか，というものである．この写像は無限次の商写像なのであるから，代数幾何で捉えられるものではなく，何らかの意味で「解析的」なものであるはずである．

つまり，こうなる：$K = \mathbb{C}_p$ 上の解析幾何学の理論があるはずだ．そしてその理論においては：

- K 上の代数多様体 X について，それに付随した解析空間 X^{an} なるものが存在し，その点全体は X^{cl} となる，つまり

$$X^{\mathrm{an}} \text{ の点} = X \text{ の閉点}$$

となるはずだ,

- 上で構成した π は，この解析幾何の意味での一意化写像の underlying sets の写像となっているはずだ，つまり π は

$$\pi\colon (\mathbb{G}_{m,K})^{\mathrm{an}} \longrightarrow E^{\mathrm{an}}$$

という解析空間の射に延びるはずだ．

2.3. 「やや大域化された局所」. 以上のような動機から，Tate は彼の言う「リジッド解析幾何学」を構築する．もちろん，そこには Krasner 以来の「解析接続」についての技術的な問題があるわけだが，Tate はスキーム論などの幾何学的視点を背景に，これを克服する．以下にそのアイデアをスケッチするが，その基本思想には「やや大域化された局所」の考え方がある．

前述のように，非アルキメデス的距離空間においては，開集合や開被覆が細かく存在し過ぎており，これが本質的な災いとなって解析接続の理論が困難になっていた．Tate の考え方は，大雑把に言って，この位相的状況を改善し，局所をやや大域化する，つまり位相を剛化（rigidify）する．「リジッド」幾何学という名前も，ここから生まれている．

この点はなかなか説明が難しく，リジッド幾何学に初学者が接近する上での障害ともなっている．とりあえず，この「やや大域化された局所」の一つのわかりやすい現れとして，以下のものを挙げる：代数幾何学，複素解析幾何学，そしてリジッド解析幾何学における「最も基本的な」空間とは何か？

- 代数幾何学においては，それはアフィン直線 $\mathbb{A}^1_k = \operatorname{Spec} k[T]$ であり，
- 複素解析幾何学においては，単位開円盤 $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ であろう．
- リジッド解析幾何学において，それは**単位閉円盤**

$$\mathbb{D}^1_K = \{z \in K \mid |z| \leq 1\}.$$

である（前述の通り，これは開集合でもあることに注意）．

このような空間の取り方にも，複素解析的状況と代数幾何的状況との間の「中間的な」局所の概念を持つ幾何学という，リジッド幾何学特有のあり方が現れている．ただし，ここで大事な（そして技術的に難しい）ことは，ここで言う単位閉円盤には，単なる距離位相とは異なる位相を考えているということである．これについては，なぜ「閉」円盤を考えるのが自然なことなのか，ということも含めて，以下で説明を試みる．

3. 単位閉円盤

というわけで，Tate による古典的なリジッド幾何学の基本的なアイデアについて，特に単位閉円盤という対象を通して説明しよう．

3.1. 点. 古典的な代数幾何学においては，代数多様体の点について，いわゆる「Hilbert の零点定理」が基本的な状況を示していた：

定理 3.1. k を体とするとき，写像

$$k \ni a \longmapsto (X - a) \in \operatorname{Spec} k[X]$$

は単射である．k が代数的閉であるとき，これは $\operatorname{Spec} k[X]$ の閉点（つまり $k[X]$ の極大イデアル）全体への全単射である．

次にリジッド的状況を考えるために，K を完備非アルキメデス的付値体とする．これは K に非アルキメデス的付値 $|\cdot|$ が入っており，それから決まる距離位相について K が完備であるということ．

$$V = \{a \in K \mid |a| \leq 1\}, \quad \mathfrak{m}_V = \{a \in K \mid |a| < 1\}$$

はそれぞれ K の付値環であり，その極大イデアルである．このとき V は高さ 1 の付値環であり，$0 \neq a \in \mathfrak{m}_V$ なる任意の a について a-進完備である．逆に V が $0 \neq a \in \mathfrak{m}_V$ なる何らかの a について a-進完備な高さ 1 の付値環であれば，$K = V[\frac{1}{a}]$ はその商体であり，K は完備非アルキメデス的付値体となる．

多項式環 $V[X]$ を考え，これの a-進 Zariski 化 $V[X]^{\mathrm{Zar}}$ を，$V[X]$ の積閉集合 $1 + aV[X]$ についての局所化として定義する．

定理 3.2. 写像

$$\mathbb{D}^1_K \ni a \longmapsto (X - a) \in \operatorname{Spm} V[X]^{\mathrm{Zar}} \otimes_V K = \operatorname{Spm} V[X]^{\mathrm{Zar}}[\tfrac{1}{a}],$$

は単射である．K が代数的閉であれば，これは全単射である．（ここで Spm は極大イデアル全体の集合を表す.）

3.2. 函数環. 上で点の選びに古典的な代数幾何を参照したのは，前節での

$$X^{\mathrm{an}} \text{ の点 } = X \text{ の閉点}$$

という考察と両立させるためであった．

しかし，函数環は本質的に代数幾何とは異なるものでなければならないだろう．前節で参照した Runge の定理を参考にすると，これは $V[X]$ の a-進 Zariski 化よりむしろ，a-進完備化を考えるべきだということになる：

$$V\langle\langle X\rangle\rangle = \varprojlim_{n \geq 0} V[X]/a^n V[X].$$

これの一般ファイバー，つまり $K\langle\langle X\rangle\rangle = V\langle\langle X\rangle\rangle[\frac{1}{a}]$ が求める函数環である．実際にその元を書いてみると，次のようになる：

$$K\langle\langle X\rangle\rangle = \left\{ \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \,\middle|\, a_n \in K,\ |a_n| \to 0 \right\}.$$

この代数 $K\langle\langle X\rangle\rangle$ は（一変数）Tate 代数というもので，Tate のリジッド解析幾何学において，代数幾何学の多項式環のような最も基本的な役割を演じる環である．その最初の性質は：

- $K\langle\langle X\rangle\rangle$ は，半径 1 の閉円盤 $\mathbb{D}^1_K$ 上で一様に絶対収束するべき級数全体に一致する，
- $K\langle\langle X\rangle\rangle$ は $V[X]^{\mathrm{Zar}}[\frac{1}{a}]$ 上忠実平坦で，極大イデアル全体及びそれらの剰余体は一致する．

従って，特に

$$\mathbb{D}^1_K = \operatorname{Spm} V[X]^{\mathrm{Zar}}[\tfrac{1}{a}] = \operatorname{Spm} K\langle\langle X\rangle\rangle$$

となるわけで，このことからも $K\langle\langle X\rangle\rangle$ が考えるべき函数環として相応しいものであることがわかる．

3.3. 問題点. 以上のことから，人は次のような局所環付空間を考えようとするだろう：

$$\mathbb{D}^1_K = (\mathrm{Spm}\, K\langle\!\langle X\rangle\!\rangle, \text{距離位相}, \mathscr{O})$$

ここで $\mathscr{O}$ は次のようにして定義される前層である：開集合 U について，$\mathscr{O}(U) =$ U 内に極を持たない有理函数全体の一様収束位相関する完備化.

この最後の函数環の定義は，Runge の定理をヒントとして，上の Tate 代数の場合の成功例という基盤に立って自然に導入されるものである．これはまた，前出の Krasner による解析接続の理論においても採用された函数の取り扱い方である．

しかし，これでは問題があるのだ：

問題点．$\mathscr{O}$ が層にならない．

ここに非アルキメデス的函数論における解析接続の難しさが，最も端的に現れている．実際，$\mathscr{O}$ が層にならないことの理由の一つに，開集合が多すぎること，あるいは開被覆の細分がとれ過ぎることが挙げられる（開被覆が多ければ多いほど，層になるための条件（貼り合わせ条件）の適用が多くなるので，前層は層になりにくくなる）．安直に層化をとってしまうと，大域切断が飛躍的に増えて，Tate 代数のような「正しい」函数環ではなくなってしまう．

つまり，距離位相が細か過ぎるので，局所的条件だけで函数を定義してしまうと，大域的な函数環が巨大になり，幾何的に意味のある代数にならなくなってしまうというところに，最も重要な困難があるのである．

この「点・位相・函数」による三位一体の調和を崩しているのは，もちろん距離位相である．これを修正することで，本来あるべき調和を回復する，というのが Tate のアプローチであった．

3.4. 解析的還元. そのアイデアをスケッチするために，冒頭に挙げた三つ目のキーワード「解析的還元」の考え方が有効である．ここでも簡単のため，単位閉円盤の場合に限ってこれを説明しよう．

$\mathbb{D}^1_K$ の点，つまり $K\langle\!\langle X\rangle\!\rangle$ の極大イデアル $\mathfrak{m}$ をとり，それと $V\langle\!\langle X\rangle\!\rangle$ との交わりを考えると，これは $V\langle\!\langle X\rangle\!\rangle$ の $\mathfrak{m}_V\langle\!\langle X\rangle\!\rangle$ を含んだ素イデアルである．ところで，$V\langle\!\langle X\rangle\!\rangle$ に属するべき級数の係数は，次数が高くなるにつれて a（$\in \mathfrak{m}_V$）で割り切れるる回数が増える．よって特に，

$$V\langle\!\langle X\rangle\!\rangle/\mathfrak{m}_V\langle\!\langle X\rangle\!\rangle \cong k[X]$$

（剰余体上の多項式環）ということになる．従って，くだんの素イデアルを $\mathfrak{m}_V\langle\!\langle X\rangle\!\rangle$ で割ると，多項式環 $k[X]$ の素イデアルが得られる．これによって写像

$$\mathrm{red}\colon\ \mathrm{Spm}\, K\langle\!\langle X\rangle\!\rangle \ni \mathfrak{m} \longmapsto (\mathfrak{m} \cap V\langle\!\langle X\rangle\!\rangle \bmod \mathfrak{m}_V\langle\!\langle X\rangle\!\rangle) \in \mathrm{Spec}\, k[X]$$

が得られた．この写像を（Tate 代数の）解析的還元写像という．

例えば K が代数的閉であれば，これは次のように簡単に書ける写像である：$\mathbb{D}^1_K$ は $\mathbb{P}^1(K)$ の中の $|z| \leq 1$ なる点の集合と同一視される．そこで普通の還元写像

$$\mathbb{P}^1(K) = \mathbb{P}^1(V) \ni (x : y) \longmapsto (\overline{x} : \overline{y}) \in \mathbb{P}^1(k)$$

（ただし $\overline{x} = (x \bmod \mathfrak{m}_V)$）を考える．上の解析的還元という写像は，これを $\mathbb{D}^1_K$ に制限したものである．この還元写像による閉点のファイバーは，まさに半径

1 の開円盤である．例えば，∞（無限遠点）のファイバーは，無限遠点を中心とした半径 1 の開円盤なのであるから，その補集合である $\mathbb{D}^1_K$ が $\mathbb{A}^1_k = \mathrm{Spec}\, k[X]$ に写像されるというわけ.

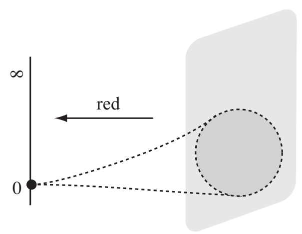

Figure 3. 解析的還元

さて，この解析的還元写像の連続性が問題である．もちろん，これは $\mathbb{D}^1_K = \mathrm{Spm}\, K\langle\langle X\rangle\rangle$ に距離位相を考えれば連続になるのは明らかである．しかし，上にも見たように，中心ファイバーの閉点の引き戻しまでもが開円盤になっている．これは $\mathbb{D}^1_K$ の距離位相が非常に細かい（細か過ぎる）ということの，もう一つの端的な現れであると見なせる．

還元写像が連続であることを要請するのは自然なことだと思われるから，よって，これが連続になるような最弱の位相を考えるのも一興だろう．しかし，それでは本質的に中心ファイバーの Zariski 位相と変わらないから，位相が粗過ぎる．

ここで何も $K\langle\langle X\rangle\rangle$ という環の V 上のモデルとして $V\langle\langle X\rangle\rangle$ ばかりを考える必然性はないということに気付く．それの閉点でのブローアップなどでも，同様に還元写像が考えられる．

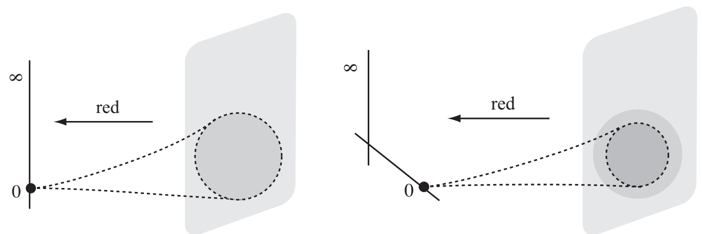

Figure 4. モデルの取り替えと解析的還元

モデルを取り替えることで，開集合となるべき集合が増える．ところが，今度は開集合が多過ぎる．実際，これで位相を生成させると，もとの距離位相に逆戻りとなる．

帯に短し襷に長しといった感じだが，ここで普通の意味での位相を考えないで，Grothendieck 位相の考え方を導入したところが初期リジッド幾何学の賢かったところだ．Grothendieck 位相を導入することで「中間くらい」の細かさをもつ位相，つまり「やや大域化された局所」の概念が柔軟に得られる．

3.5. Tate の acyclicity. こうして，単位閉円盤 $\mathbb{D} = \mathbb{D}^1_K$ という空間として考えるべきデータは

- 点：$K\langle\langle X\rangle\rangle$ の極大イデアル,
- 位相（Grothendieck 位相）$\tau_{\mathbb{D}}$：
  - 開集合：何らかのモデルの Zariski 開集合の red による引き戻し,
  - 開被覆：何らかのモデルの Zariski 開被覆の red による引き戻し,
- 函数環：以前と同様に定義された前層 $\mathscr{O}_{\mathbb{D}}$,

ということになった．ここで言う「モデル」とは，形式スキーム $\mathrm{Spf}\, V\langle\langle X\rangle\rangle$ の認容ブローアップ（admissible blow-up），つまり a を含むような有限生成イデアルを中心としたブローアップによって得られるものを指す（というか、それらを考えれば十分である）.

古典的リジッド幾何学の勃興にとって決定的だったのは，Tate によって初めて見出された次の事実である：

定理 3.3 (Tate acyclicity). 前層 $\mathscr{O}$ は層である.

4. リジッド幾何学

前節では，リジッド解析幾何学における「単位閉円盤」

$$\mathbb{D} = \mathbb{D}^1_K = (\mathrm{Spm}\, K\langle\langle X\rangle\rangle, \tau_{\mathbb{D}}, \mathscr{O}_{\mathbb{D}})$$

の構成について述べた.

実を言うと，ここで紹介した単位閉円盤の構成は，歴史的に見ると Tate による構成とは異なっている（数学的には本質的に同じだが）．Tate や彼による最初のセミナーノートの内容を引き継いだ人々による構成では，特に Grothendieck 位相 $\tau_{\mathbb{D}}$ の構成のところが，今から見ると多少複雑なことをやっている．後に Gerritzen-Grauert の仕事によって，実は上に与えたような，より見通しのよい位相の構成が可能となった．初期のリジッド空間の構成において位相の構成が非常に複雑なものであったという歴史的事実の背景には，草創期のリジッド幾何学においては，解析的還元による形式スキームとの関連があまり重用しされていなかったということがあるのだと思われる．歴史的に見て，この関連の重要性に最初に気付いたのは Raynaud であり，彼の 1972 年論文の中の定理によって，リジッド幾何学は新たな局面を迎えることとなった.（そもそも我々は Tate による初期のリジッド空間の構成を忠実には再現しないので，この歴史的なパラダイムチェンジの意義を適切に述べることはできないのであるが.）

4.1. Raynaud の定理. 前出の通り，以下の状況で考える：

- K：完備非アルキメデス的付値体,
- V：その付値環.

このとき V はその極大イデアル $\mathfrak{m}_V$ の任意の零でない元 $0 \neq a \in \mathfrak{m}_V$ による a 進位相で完備である．K と V の導入の順序を逆にするなら，最初に考えるべき対象は，高さ 1 の a 進完備付値環 V であり，その商体としての $K = \mathrm{Frac}(V) = V[\frac{1}{a}]$ である.

前節では単位閉円盤の場合に，その位相が本質的には形式モデルの Zariski 位相から誘導されるものであること，そして形式モデルを取り替えることで,

適度に細かい位相を得られることを見た．非常に大雑把に言って，Raynaud の定理はこのことがより一般のリジッド空間においても同様であることを述べているものである：

定理 4.1 (Raynaud 1972). いわゆる ‘rig’ 函手 $X \rightsquigarrow X^{\mathrm{rig}}$ により圏同値

$$\left\{\begin{matrix}\text{coherent } V\text{-formal}\\ \text{schemes of finite type}\end{matrix}\right\} \Big/ \left\{\begin{matrix}\text{admissible}\\ \text{blow-ups}\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\sim} \left\{\begin{matrix}\text{coherent rigid}\\ \text{spaces over } K\end{matrix}\right\}$$

が得られる．ここに coherent（連接）とは，準コンパクト（quasi-compact）かつ準分離的（quasi-separated）なることを意味する．

この報告では，リジッド空間の真面目な定義を与えてないので，初めての方には多少無意味かもしれない．とりあえず，この定理における圏同値の左辺によってリジッド空間が定義されているものと考えられてもよい．逆に言えば，そのような形式スキーム論によるリジッド幾何学へのアプローチを可能にしたという点も，Raynaud の定理の意義である．それによれば，リジッド幾何学は「形式スキームの（一種の）双有理幾何学なのだ」という見方ができるわけだ．また，左辺の圏をいろいろと他の圏（例えばヘンゼルスキームなど）に置き換えることで，様々の新しいリジッド幾何学を考えることができる．藤原一宏と筆者によるアプローチは，この考え方をもとにしている．

4.2. 様々なアプローチ. 以上は，いわゆる Tate-Raynaud による古典的なリジッド解析幾何学というものの，非常にラフはスケッチであるが，この他にも非アルキメデス的な付値体の上で展開される（解析的）幾何学のアプローチはいろいろある．代表的なところを箇条書きにすると，次のようになる：

(C) Tate-Raynaud のリジッド解析幾何学,
(H) R. Huber による adic 空間,
(Z) Zariski-Riemann 空間によるアプローチ（双有理的アプローチ）,
(B) Berkovich 幾何学.

(Z) は藤原一宏と筆者が取っている立場である．これらのうち，最初の三つは（少なくとも実際的な状況では）本質的に同等な理論を与えているが，(B) だけが多少異なっている．その一番の理由は，最初の三つの理論が扱う位相（Grothendieck 位相や，通常の位相である場合も含めて）は同等である（同値なトポスを導く）のに対して，Berkovich 空間の位相はこれとは異なっているいるからである．詳しく，Berkovich 空間の位相は，その他の理論における位相の（自明でない）商位相になっている：

$$\mathbf{Top}\,(\,(\mathrm{C}),(\mathrm{H}),(\mathrm{Z})\,) \quad \twoheadrightarrow \quad \mathbf{Top}\,(\,(\mathrm{B})\,).$$

4.3. Berkovich 幾何学. Berkovich 幾何学についても簡単に触れておこう．

Tate-Raynaud のリジッド幾何学では，affinoid 代数（Tate 代数 $K\langle\langle X_1, ldots, X_n\rangle\rangle$ の商）A に対して，その極大イデアル全体 $\mathrm{Spm}\,A$ を点集合としていた．Berkovich 空間のアイデアでは，これを A 上の有界かつ乗法的な半ノルム全体の集合 $\mathscr{M}(A)$ で置き換える．こうすることで，$\mathrm{Spm}\,A$ よりも飛躍的に点を増やすことができるのである．

また，この点集合には「半ノルムを連続的にズラす」という感じ操作により，非常に直観的に優れた位相が入る．これを例えば射影直線 $\mathbb{P}^1_K$ の場合に見てみると，次のようになる．

- 位相空間としては Berkovich 幾何の $\mathbb{P}^1$ は，非常に繁茂した樹木（tree）であり，その「端点」として Tate-Raynaud による古典的な点が回復されている．
- 樹木の点を形成するのは，$\mathbb{P}^1_K$ 内の開円盤の生成点である．

この最初の点によれば，Tate-Raynaud のリジッド幾何による点（つまり $\mathbb{P}^1_K$ の閉点）は，それらだけでは全不連結なのであるが，新しい点を通ることによって樹木の枝による道で（最短なら一意的に）結ばれる．

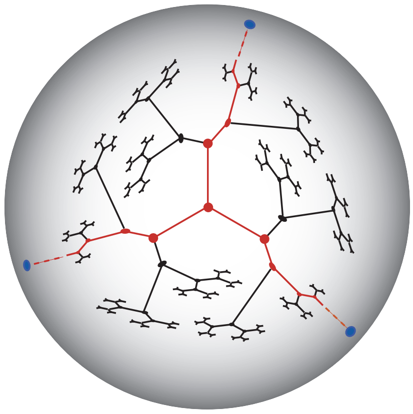

FIGURE 5. Berkovich 幾何による射影直線

Berkovich 幾何学は，それが扱う空間が非常に綺麗なものなので，多くの人々によって愛好されているようである．しかしこの空間には，先にも述べたような問題点がある（つまり，位相がリジッド幾何学の自然なものとは異なり，商位相になっているということ）．

4.4. 視覚化. Berkovich 幾何学のそもそもの動機は，Grothendieck 位相のような多少直観的な取り扱いが難しい空間を可視化したいということにあった．つまり「目に見える」空間に置き換えることによって，リジッド幾何学へのアプローチを簡単なものにしようという目論見だったわけである．その目論見はある程度は達成されたので，現在では Berkovich 空間がリジッド空間の本当の姿だと思っている人々も少なくない．しかし，前述のような位相の根本的な違いがあるので，Berkovich の当初の目論見そのものは，完全に達せられたとは言えない．

この「視覚化（visualization）」の問題に答えるのが Huber の adic 空間の理論であり，また我々の Zariski-Riemann 空間によるアプローチなのである．後者について，少々説明しよう．

視覚化において一番本質的なのは，位相の問題であることは，もはや明らかであると思う．そもそもリジッド空間の構成において，最も難しかったのが位相の構成であった．逆に言えば位相だけが本質的な問題なのであるから，

実は問題を簡明に定式化することができる．すなわち，視覚化とは「リジッド空間の位相（トポス）を位相空間で実現することができるか」という問題なのだ．トポスの一般論から，そのような（sober な）位相空間は，存在すれば位相同型を除いて一意的に定まる．

ここで重要となる事実は，上で解析的還元を用いて説明したように，リジッド空間の位相は形式モデルの Zariski 位相の還元射による引き戻しを，形式モデルを取り替えて生成させたものであったことである．これに従えば，求めるべき位相空間は coherent なリジッド空間 $\mathscr{X}$ に対して，

$$\langle \mathscr{X} \rangle := \varprojlim \text{（すべての形式モデル）}$$

という逆極限で与えられるべきだということになる．実際には与えられた coherent リジッド空間 $\mathscr{X}$ に対して，その形式モデル全体の中で，一つ固定した形式モデルの認容ブローアップ全体が cofinal な部分をなしているので，その部分だけを考えればよい．このことから，上のような極限の存在を保証することができる．

それだけではなく，Zariski による古典的な双有理幾何学においてもそうであったように，このようにして得られた空間 $\langle \mathscr{X} \rangle$ は，また準コンパクトであることがわかる．この事実は，この空間を用いて様々な幾何学的命題を証明する上で，極めて重要な役割を果たす．

この空間を中心に据えてリジッド幾何学を展開しようというのが，藤原一宏と筆者が現在書いている本の骨子である．このアプローチでは，Raynaud の視点に加えて，Zariski による双有理幾何学のテクニックを導入する点が重要である．

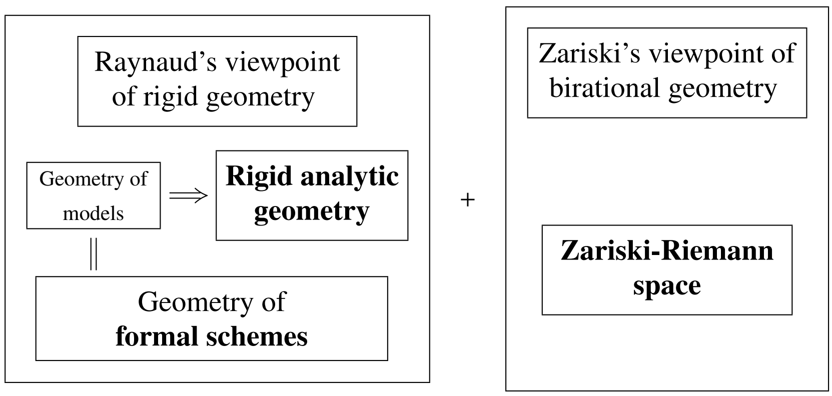

FIGURE 6. リジッド幾何学への双有理的アプローチ

京都大学大学院理学研究科数学教室、〒 606-8502 京都市左京区北白川追分町
E-mail address: kato@math.kyoto-u.ac.jp