

Lie 群上の球関数と保型 L 関数

石井 卓 (成蹊大・理工)

Introduction

保型 L 関数を積分表示によって調べる Rankin-Selberg 法は, Hecke の楕円保型形式に付随するスタンダード L 関数の仕事 (解析接続, 関数等式, 逆定理), その後の Rankin, Selberg による 2 つの楕円保型形式のペアに対する L 関数 ($GL(2) \times GL(2)$ のスタンダード L 関数) の研究に始まり, 今日でも L 関数の解析的性質を研究するための二大手法の一つとして盛んに研究されている.

Rankin-Selberg 法の最初のステップは積分表示を発見し, 保型形式の Fourier 展開などを用いて, 大域的な球関数 (=Fourier 係数) の積分変換 (=ゼータ積分) として表す ‘Basic identity’ を導くことである. 大域的な球関数が局所的な球関数の積に分解されるとき, ゼータ積分も局所ゼータ積分の積に分解し, 次なるステップは局所ゼータ積分の解析である.

不分岐素点においては, 球関数の明示公式を用いて, 局所ゼータ積分と局所 L 因子の一致が示される. しかしながら, 分岐素点, アルキメデス素点での取り扱いが難しく, 今日まで多くのゼータ積分が発見されているものの, これら悪い素点での解析が行われている例は少ない. 我々はアルキメデス素点における解析を行うために, まず (実)Lie 群 G 上の球関数 (= G の表現の, ある誘導表現の空間における具体的実現を G 上の特殊関数として記述したもの) を明示的に決定する. そしてその球関数の積分変換であるアルキメデスゼータ積分を直接計算する. このような動機などから, 15 年ほど前から, 2 次シンプレクティック群 $Sp(2, \mathbb{R})$ 上の球関数の研究が織田孝幸氏の周辺で進められ, 多くの明示公式が与えられた. さらにスピノール L 関数への応用もなされてきた.

また, $GL(n, \mathbb{R})$ のクラス 1 主系列表現に対する Whittaker 関数の研究は Bump, Stade らによって進められ, アルキメデスゼータ積分の計算も行われてきた. 本稿では, その拡張として主系列表現に付随する Whittaker 関数の明示公式, ならびにその応用について得られているいくつかの結果を紹介する.

1 $GL(n)$ の Whittaker 関数

1.1 Whittaker 関数

$\mathbb{A}$ を有理数体 $\mathbb{Q}$ のアデール環, $\pi = \otimes'_v \pi_v$ を $GL(n, \mathbb{A})$ の保型カスプ表現, $\varphi \in \pi$ をカスプ形式とする. $\mathbb{Q} \backslash \mathbb{A}$ の非自明な指標 ψ を固定し, $GL(n)$ の極大ベキ部分群を $N =$

$N_n = \{(x_{ij}) \mid x_{ii} = 1, x_{ij} = 0 (i > j)\}$ とするとき, 同じ記号 ψ で $N(\mathbf{Q}) \backslash N(\mathbf{A})$ の指標を $\psi(x) = \psi(x_{12} + x_{23} + \cdots + x_{n,n-1})$, $x = (x_{ij}) \in N(\mathbf{A})$ によって定める. このとき大域的 Whittaker 関数 $W_{\varphi, \psi}$ を

$$W_{\varphi, \psi}(g) = \int_{N(\mathbf{Q}) \backslash N(\mathbf{A})} \psi(n g) \psi^{-1}(n) dn, \quad g \in GL(n, \mathbf{A})$$

によって定義する. $W_{\varphi, \psi}(n g) = \psi(n) W_{\varphi, \psi}(g)$ ($n \in N(\mathbf{A})$) が成り立つ. Shalika による Fourier 展開は

$$\varphi(g) = \sum_{\gamma \in N_{n-1}(\mathbf{Q}) \backslash GL(n-1, \mathbf{Q})} W_{\varphi, \psi} \left(\begin{pmatrix} \gamma & \\ & 1 \end{pmatrix} g \right)$$

である. $\mathcal{W}(\pi, \psi) = \{W_{\varphi, \psi} \mid \varphi \in \pi\}$ とおくと, $GL(n, \mathbf{A})$ はこの空間に右移動で作用する. $\mathcal{W}(\pi, \psi)$ を π の Whittaker 模型という.

局所体 $GL(n, \mathbf{Q}_v)$ の認容表現 π_v の Whittaker 模型についても同様である. $\mathbf{Q}_v$ の非自明な加法指標 ψ_v を $N(\mathbf{Q}_v)$ の指標に延長し, $\mathcal{W}(\psi_v) = \{W : GL(n, \mathbf{Q}_v) \rightarrow \mathbf{C} \text{ smooth} \mid W(n g) = \psi_v(n) W(g)\}$ とおくと, この空間に $GL(n, \mathbf{Q}_v)$ は右移動で作用する. 非自明な絡作用素 $\pi_v \hookrightarrow \mathcal{W}(\psi_v)$ の像を $\mathcal{W}(\pi_v, \psi_v)$ とかき, π_v の Whittaker 模型という. また, $\xi_v \in \pi_v$, $\Psi \in \mathcal{W}(\pi_v, \psi_v)$ に対して, $\Psi(\xi_v) =: W_{\xi_v}$ をベクトル ξ_v に対する Whittaker 関数という.

1.2 主系列表現

以下, $v = \infty$ とする. $G = SL(n, \mathbf{R})$ で考える. $N = N_n(\mathbf{R})$, $A = \{a = \text{diag}(a_1, \dots, a_n) \mid a_i > 0, \prod a_i = 1\}$, $K = SO(n)$ とおくと岩澤分解 $G = NAK$ が成り立つ. $M = Z_K(A) = \{\text{diag}(m_1, \dots, m_n) \in A \mid m_i \in \{\pm 1\}\}$ とおき, $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$ に対して, M の指標 σ_I を $\sigma_I(m) = \prod_{i \in I} m_i$ ($m = \text{diag}(m_1, \dots, m_n) \in M$) で定義する. $\sigma_I = \sigma_{I^c}$ (I^c は $\{1, \dots, n\}$ における I の補集合) なので $h := \sharp(I) \leq [n/2]$ としてよい. $\nu \in \text{Lie}(A)_{\mathbf{C}}^*$ に対して, $\nu_i = \nu(E_{ii} - E_n/n)$ とおき, ν と $(\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbf{C}^n$ ($\sum_i \nu_i = 0$) を同一視する. このとき誘導表現 $\pi_{I, \nu} = C^\infty\text{-Ind}_{MAN}^G(\sigma_I \otimes \exp(\nu + \rho) \otimes 1_N)$ を主系列表現という. ここに ρ は制限正ルートの半分和. また, $I = \emptyset$ のとき, $\pi_{I, \nu}$ をクラス 1 主系列表現という.

主系列表現の Whittaker 模型の空間の次元は $n!$ であり, さらに像を緩増加な関数にすればその次元は 1 になることが知られている. 以下では, 主系列表現 $\pi_{I, \nu}$ の極小 K -type に属するベクトルに対して, $n!$ 個の Whittaker 関数 (第 2 種 Whittaker 関数と呼ぶことにする) と, 緩増加な Whittaker 関数 (第 1 種 Whittaker 関数) の明示公式を与える. $\mathbf{R}^n$ を列ベクトルの空間とすると, G は $\mathbf{R}^n$ に左から乗法で作用しその K への制限を st と書くと, 主系列表現 $\pi_{I, \nu}$ の極小 K -type は $\wedge^h st$ である. $\mathbf{R}^n$ の i 番目の標準基底を v_i とし, ${}_n C_h = \{A = \{a_1, \dots, a_h\} \mid 1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_h \leq n\}$ とおくと, $\{\xi_A \mid A \in {}_n C_h\}$ は $\wedge^h st$ の基底となる. Whittaker 関数 $\{W_{\xi_A} \mid A \in {}_n C_h\}$ を考える. なお, 岩澤分解 $G = NAK$ により, Whittaker 関数は A への制限 (A -動径成分という) で決まる. そこで A の座標として次を用いる: $\text{diag}(a_1, \dots, a_n) \in A$ に対して, $y_i = a_i/a_{i+1}$, $y = (y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathbf{R}_+^{n-1}$.

1.3 クラス 1 Whittaker 関数

クラス 1 主系列表現 $\pi_{\emptyset, \nu}$ の球ベクトル ξ_0 に対する Whittaker 関数 W_{ξ_0} は $W_{\xi_0}(ngk) = \psi_{\infty}(n)W(g)$ ($n \in N, g \in G, k \in K$) を満たす. 特に右 K 不変. さて緩増加 Whittaker 関数には Jacquet による積分表示がある. クラス 1 主系列表現の場合には,

$$\int_N a(wng)^{\nu+\rho} \psi_{\infty}^{-1}(n) dn.$$

ここで $g = n(g)a(g)k(g)$ ($n(g) \in N, a(g) \in A, k(g) \in K$) は岩澤分解. w は Weyl 群 $\mathfrak{S}_n$ の最長元. しかし, この Jacquet 積分はアルキメデスゼータ積分を具体的に計算するのに適した形ではないため, 別の積分表示が必要になる.

$G = SL(2, \mathbf{R})$ のときを思い出す. $W_{\xi_0}|_A(y) = \sqrt{y}K_{\nu}(2\pi y)$ であるが, K -Bessel 関数 $K_{\nu}(2\pi y)$ は次のような積分表示があった.

$$\begin{aligned} (a) \quad & y^{\nu} \int_{\mathbf{R}} (x^2 + y^2)^{-\nu+1/2} \exp(2\pi\sqrt{-1}x) dx, \\ (b) \quad & \int_0^{\infty} \exp\{-\pi y(t + t^{-1})\} t^{\nu} \frac{dt}{t}, \\ (c) \quad & \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s-\nu}{2}\right) (\pi y)^{-s} ds. \end{aligned}$$

ここに, (a) は Jacquet 積分を書き下したもので, (b) は K -Bessel 関数の定義, (c) は Mellin-Barnes 型と呼ばれる積分表示である. この Mellin-Barnes 型の積分表示がアルキメデスゼータ積分の計算には都合がよい. また, (b) と (c) は公式 $\int_0^{\infty} \exp(-ax)x^{s-1}dx = a^{-s}\Gamma(s)$ を用いることで簡単に結び付けられる.

(b), (c) 型の積分表示は, $n = 3$ における Vinogradov-Takhtadzhyan [12], Bump [1] の研究に始まり, Stade [9], [10] は $SL(n, \mathbf{R})$ と $SL(n-2, \mathbf{R})$ の間の帰納的な式を導いた. これらはいずれも Jacquet 積分を変形していくという方針であるが, その計算は容易ではない. その後, Stade の結果に基づき, Stade と筆者 [4] は $SL(n, \mathbf{R})$ と $SL(n-1, \mathbf{R})$ の間のより自然な関係式を見出した.

Theorem 1.1. $W_{\nu}^n(y) = y^{\rho} \widetilde{W}_{\nu}^n(y)$ を $\widetilde{W}_{\nu}^2(y) = K_{\nu}(2\pi y)$,

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{\nu}^n(y) = & \int_{\mathbf{R}_+^{n-1}} \widetilde{W}_{(\nu_1, \dots, \nu_{n-1})}^{n-1} \left(y_2 \sqrt{\frac{t_2}{t_1}}, \dots, y_{n-1} \sqrt{\frac{t_{n-1}}{t_{n-2}}} \right) \\ & \cdot \prod_{i=1}^{n-1} \exp\left\{ -(\pi y_i)^2 t_i - \frac{1}{t_i} \right\} \cdot \prod_{i=1}^{n-1} (\pi y_i)^{\frac{(n-i)\nu_1}{n-1}} \prod_{i=1}^{n-1} t_i^{\frac{n\nu_1}{2(n-1)}} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{dt_i}{t_i}. \end{aligned}$$

によって定義すると, $W_{\nu}^n(y)$ は $SL(n, \mathbf{R})$ のクラス 1 Whittaker 関数の動径成分となる. ここで, $\tilde{\nu} = (\nu_2 + \nu_1/(n-1), \dots, \nu_n + \nu_1/(n-1))$.

また, $\widetilde{W}_{\nu}^n(y)$ の多重 Mellin 変換

$$V_{\nu}^n(s) \equiv V_{\nu}^n(s_1, \dots, s_{n-1}) = \int_{\mathbf{R}_+^{n-1}} \widetilde{W}_{\nu}^n(y) \prod_{i=1}^{n-1} (\pi y_i)^{s_i} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{dy_i}{y_i}$$

に対して,

$$V_\nu^n(s) = \frac{2^{1-n}}{(2\pi i)^{n-2}} \int_{z_1, \dots, z_{n-2}} V_\nu^{n-1}(z_1, \dots, z_{n-2}) \cdot \prod_{i=1}^{n-1} \Gamma\left(\frac{s_i - z_{i-1}}{2} + \frac{(n-i)\nu_1}{2(n-1)}\right) \Gamma\left(\frac{s_i - z_i}{2} - \frac{i\nu_1}{2(n-1)}\right) \prod_{i=1}^{n-2} dz_i. \quad (1.1)$$

ここで積分路は, 各 z_i について虚軸に平行な直線 $\sigma_i - i\infty \rightarrow \sigma_i + i\infty$ で, 非積分関数の極を左に見るように $\sigma_i \in \mathbb{R}$ をとる.

さて, Whittaker 関数 W_{ξ_0} は $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ の普遍包絡環の中心の元の同時固有関数になっており, $W_{\xi_0}(ngk) = \psi_\infty(n)W_{\xi_0}(g)$ という性質とあわせて, 動径成分 $W_{\xi_0}(y)$ の満たす偏微分方程式系を書き下すことができる. Hashizume [2] は Harish-Chandra が両側 K 不変な球関数に対して行った研究と同様にして, この偏微分方程式系の $y = 0$ のまわりでの級数解 (=第2種 Whittaker 関数) の構成を行った. 例えば, $SL(n, \mathbb{R})$ のときは以下ようになる. $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1}$ に対して $C_{\mathbf{m}}^n(\nu) \in \mathbb{C}$ を $C_0^n(\nu) = 1$,

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n-1} m_i^2 - \sum_{i=1}^{n-2} m_i m_{i+1} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\nu_i - \nu_{i+1}}{2} m_i \right\} C_{\mathbf{m}}^n(\nu) = \sum_{i=1}^{n-1} C_{\mathbf{m} - \mathbf{e}_i}^n(\nu) \quad (1.2)$$

(ここで, $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^{n-1}$ は i 番目の標準基底) という漸化式によって定義する. ただし, $\nu \in \mathbb{C}^n$ は一般の位置にあるとする. このとき,

$$M_\nu^n(y) = y^{\nu+\rho} \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{n-1}} C_{\mathbf{m}}^n(\nu) \prod_{i=1}^{n-1} (\pi y_i)^{2m_i}$$

とおくと, $\{M_{w\nu}^n(y) \mid w \in \mathfrak{S}_n\}$ が偏微分方程式系の基本解になる. ここで, Weyl 群 $\mathfrak{S}_n$ は $\nu \in \mathbb{C}^n$ に置換として作用. さらに第1種 Whittaker 関数を第2種 Whittaker 関数の線形結合で表す「展開公式」は

$$W_\nu^n(y) = \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} w \left[\prod_{-1 \leq i < j \leq n} \Gamma\left(\frac{-\nu_i + \nu_j}{2}\right) \cdot M_\nu^n(y) \right] \quad (1.3)$$

となる. この第2種球関数の明示公式 (つまり漸化式 (1.2) の解) も, Bump, Stade, 筆者による研究を経て, [4] において次のような Theorem 1.1 と compatible な表示が得られた.

Theorem 1.2.

$$C_{\mathbf{m}}^n(\nu) = \sum_{\{k_1, \dots, k_{n-2}\}} \frac{C_{(k_1, \dots, k_{n-2})}^{n-1}(\nu_1, \dots, \nu_{n-1})}{\prod_{i=1}^{n-1} \{(m_i - k_i)! (\nu_i - \nu_n + 1)_{m_i - k_{i-1}}\}}.$$

ここで, $(a)_n = \Gamma(a+n)/\Gamma(a)$ (Pochhammer 記号), $\{k_1, \dots, k_{n-2}\}$ は $0 \leq k_i \leq m_i$ を満たすように走る. また $C_{k_1}^2(\nu) = 1/k_1!(\nu_1 + 1)_{k_1}$.

この定理の証明は、上の漸化式 (1.2) を n についての帰納法で確認するだけなので難しい。また k_i での和を取ると、 $n = 3$ のときはガンマ関数の積商、 $n = 4$ のときは一般超幾何級数 ${}_4F_3(1)$ で表される。

Theorem 1.1 の証明は、Stade による Jacquet 積分の変形から得られる $SL(n, \mathbf{R})$ と $SL(n-2, \mathbf{R})$ の間の関係式がもとになっているが、この第 2 種 Whittaker 関数を使う別証明を与えることができる：Theorem 1.1 の右辺の W_ν^{n-1} に展開公式を適用したあと、 t での積分を実行すると、ベキ級数の線形結合で書ける。このうちいくつかは相殺しあい、残ったものは Theorem 1.2 を使うと、 $M_{w\nu}^n(y)$ であることがわかる。従って展開公式から、右辺が W_ν^n であると結論付けることができる。

1.4 一般の主系列表現の Whittaker 関数

一般の主系列表現に対する Whittaker 関数はベクトル値になり、クラス 1 のときと比べてその様子はかなり複雑である。Whittaker 関数 $\{W_{\xi_A} \mid A \in {}_n\mathcal{C}_h\}$ の満たす微分差分方程式系を書き下すところから始める。クラス 1 の場合には Casimir 元で特徴付けることができたが、今度は Whittaker 関数の K -type を動かすような 1 階の微分差分作用素 (Dirac-Schmid 作用素と呼ばれる) が必要になる。この偏微分方程式系を解き、Theorem 1.2 のような第 2 種 Whittaker 関数の明示式を求め、その形から緩増加 Whittaker 関数の明示公式を予想し、上に述べたように展開公式を援用して証明する。 $n = 3$, $n = 4$ の研究を経て、織田孝幸氏との共同研究 [5] で以下を得た。

Theorem 1.3. $I = \{i_1, \dots, i_h\} \in {}_n\mathcal{C}_h$ に対して、 $I_0 = \{i_2-1, \dots, i_h-1\} \in {}_{n-1}\mathcal{C}_{h-1}$ とおく。 $\{W_{A,\nu}^{n,I}(y) = y^\rho \widetilde{W}_{A,\nu}^{n,I}(y) \mid A = \{a_1, \dots, a_h\} \in {}_n\mathcal{C}_h\}$ を、 $h = 0$ のときは、 $W_{\emptyset,\nu}^{n,\emptyset}(y) = W_\nu^n(y)$ (=クラス 1 Whittaker 関数) とおき、

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{A,\nu}^{n,I}(y) = & \sum_{B < A} \int_{\mathbf{R}_+^{n-1}} \widetilde{W}_{B,\tilde{\nu}}^{n-1,I_0} \left(y_2 \sqrt{\frac{t_2}{t_1}}, \dots, y_{n-1} \sqrt{\frac{t_{n-1}}{t_{n-2}}} \right) \\ & \cdot \prod_{p=1}^{n-1} \exp \left\{ -(\pi y_p)^2 t_p - \frac{1}{t_p} \right\} \\ & \cdot \prod_{p=1}^{n-1} (\pi y_p)^{\frac{n-p}{n-1} \nu_{i_1} + \alpha(p)} t_p^{\frac{n}{2(n-1)} \nu_{i_1} + \frac{1}{2}(\alpha(p) - \beta(p))} \prod_{p=1}^{n-1} \frac{dt_p}{t_p}. \end{aligned}$$

と (n, h) について帰納的に定義する。ここで、 $A = \{a_1, \dots, a_h\}$ に対して、 $\sum_{B < A}$ は $B = \{b_1, \dots, b_{h-1}\} \in {}_{n-1}\mathcal{C}_{h-1}$ が $(1 \leq) a_1 \leq b_1 < a_2 \leq \dots < a_{n-1} \leq b_{n-1} < a_n (\leq n)$ を満たすものの全体を走ることを意味する。また、 α, β はそれぞれ、 $\cup_{t=1}^h [b_{t-1}, a_t - 1]$, $\cup_{t=1}^h [a_t, b_t - 1]$ の特性関数。このとき、 $W_{\xi_A} = \sqrt{-1}^{\sum_{i \in I} a_i} W_{A,\nu}^{n,I}$ 。

1.5 アルキメデスゼータ積分の計算

$GL(n) \times GL(m)$ ($n \geq m$) のスタンダード L 関数のゼータ積分を思い出す。 π_1, π_2 をそれぞれ $GL(n, \mathbf{A}), GL(m, \mathbf{A})$ の保型カスプ表現とし、 $\varphi_i \in \pi_i$ ($i = 1, 2$) をカスプ形式とす

る. $n > m$ のときの大域的ゼータ積分は

$$Z(s, \varphi_1, \varphi_2) = \int_{GL(m, \mathbf{Q}) \backslash GL(m, \mathbf{A})} (\mathbf{P}\varphi_1) \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1_{n-m} \end{pmatrix} \varphi_2(g) |\det(g)|^{s-1/2} dg.$$

ここで, $\mathbf{P}$ は ' $GL(m+1)$ への射影' で

$$\mathbf{P}\varphi_1(h) = |\det(h)|^{(m-n+1)/2} \int_{X_{n,m}(\mathbf{Q}) \backslash X_{n,m}(\mathbf{A})} \varphi_1 \left(x \begin{pmatrix} h & \\ & 1_{n-m-1} \end{pmatrix} \right) \psi^{-1}(x) dx.$$

ただし, $X_{n,m}$ は分割 $(m+1, 1, \dots, 1)$ に対応する $GL(n)$ の放物部分群のベキ単根基. するとゼータ積分の関数等式 $Z(s, \varphi_1, \varphi_2) = \tilde{Z}(1-s, \varphi_1^\vee, \varphi_2^\vee)$ を得る. ここに $\varphi_i^\vee(g) = \varphi_i({}^t g^{-1}) = \varphi(g^t) \in \pi_i^\vee$ (反傾表現),

$$\tilde{Z}(s, \varphi_1, \varphi_2) = \int_{GL(m, \mathbf{Q}) \backslash GL(m, \mathbf{A})} (\tilde{\mathbf{P}}\varphi_1) \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1_{n-m} \end{pmatrix} \varphi_2(g) |\det(g)|^{s-1/2} dg.$$

ただし $\tilde{\mathbf{P}} = \iota \circ \mathbf{P} \circ \iota$. Shalika の Fourier 展開を用いてこのゼータ積分を unfold すると, Basic identity:

$$Z(s, \varphi_1, \varphi_2) = \int_{N_m(\mathbf{A}) \backslash GL(m, \mathbf{A})} W_{\varphi_1} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1_{n-m} \end{pmatrix} W_{\varphi_2}(g) |\det(g)|^{s-(n-m)/2} dg$$

を得る. $\varphi_i = \otimes_v \xi_{i,v}$ (decomposable) ならば, Whittaker 模型の一意性より, 大域的 Whittaker 関数は局所 Whittaker 関数の積に分解し, ゼータ積分の Euler 積分分解

$$Z(s, \varphi_1, \varphi_2) = \prod_v Z_v(s, W_{\xi_{1,v}}, W_{\xi_{2,v}}), \quad \tilde{Z}(s, \varphi_1^\vee, \varphi_2^\vee) = \prod_v \tilde{Z}_v(s, W_{\xi_{1,v}}^\vee, W_{\xi_{2,v}}^\vee)$$

を得る. ここに局所ゼータ積分は,

$$\begin{aligned} Z_v(s, W_1, W_2) &= \int_{N_m(\mathbf{Q}_v) \backslash GL_m(\mathbf{Q}_v)} W_1 \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1_{n-m} \end{pmatrix} W_2(g) |\det(g)|^{s-(n-m)/2} dg, \\ \tilde{Z}_v(s, W_1, W_2) &= \int_{M_{n-m-1,m}(\mathbf{Q}_v)} \int_{N_m(\mathbf{Q}_v) \backslash GL_m(\mathbf{Q}_v)} \\ &\quad W_1 \begin{pmatrix} g & & \\ x & 1_{n-m-1} & \\ & & 1 \end{pmatrix} W_2(g) |\det g|^{s-(n-m)/2} dx dg. \end{aligned}$$

従って, しかるべき局所 L 因子 $L_v(s, \pi_{1,v}, \pi_{2,v})$ と局所 ε 因子 $\varepsilon(s, \pi_{1,v}, \pi_{2,v}, \psi_v)$ に対して, 局所関数等式

$$\frac{\tilde{Z}_v(1-s, W_1^\vee, W_2^\vee)}{L_v(1-s, \pi_{1,v}^\vee, \pi_{2,v}^\vee)} = \varepsilon(s, \pi_{1,v}, \pi_{2,v}, \psi_v) \cdot \frac{Z_v(s, W_1, W_2)}{L_v(s, \pi_{1,v}, \pi_{2,v})}$$

を示せば、大域ゼータ積分の関数等式により、大域関数等式

$$L(s, \pi_1, \pi_2) = \varepsilon(s, \pi_1, \pi_2) L(1-s, \pi_1^\vee, \pi_2^\vee)$$

を得る。ここで、 $L(s, \pi_1, \pi_2) := \prod_v L_v(s, \pi_{1,v}, \pi_{2,v})$, $\varepsilon(s, \pi_1, \pi_2) := \prod_v \varepsilon(s, \pi_{1,v}, \pi_{2,v}, \psi_v)$.

なお、 $n = m$ のときの大域ゼータ積分は、 φ_1, φ_2 と $GL(n)$ の Eisenstein 級数をかけて $GL(n, \mathbb{Q}) \backslash GL(n, \mathbb{A})$ 上で積分したもので、関数等式は Eisenstein 級数の関数等式に帰着される。

不分岐素点においては、 $A_{\pi_{1,v}} \in GL(n, \mathbb{C})$, $A_{\pi_{2,v}} \in GL(m, \mathbb{C})$ を不分岐主系列表現 $\pi_{i,v}$ の Satake パラメータとすると、Shintani の公式 [8] を用いて、局所ゼータ積分と局所 L 因子 $L_v(s, \pi_{1,v}, \pi_{2,v}) := \det(1 - A_{\pi_{1,v}} \otimes A_{\pi_{2,v}} q_v^{-s})^{-1}$ の一致が示される。

以下、 $v = \mathbf{R}$, $\pi_{i,\infty}$ がクラス 1 主系列表現に同型になる場合を考える。 $\pi_{1,\infty} \cong \pi_{\emptyset, \nu=(\nu_1, \dots, \nu_n)}$, $\pi_{2,\infty} \cong \pi_{\emptyset, \mu=(\mu_1, \dots, \mu_m)}$ とする。球ベクトル $\xi_{0,i} \in \pi_{i,\infty}$ に対する Whittaker 関数 (= クラス 1 Whittaker 関数) を W_i とすれば、計算すべきアルキメデスゼータ積分 $I_{\nu,\mu}^{n,m}(s) := Z_\infty(s, W_1, W_2)$ は

- $n > m$ のとき $\int_{\mathbf{R}_+^m} \widetilde{W}_\nu^n(y_1, \dots, y_m, 1, \dots, 1) \widetilde{W}_\mu^m(y_1, \dots, y_{m-1}) \prod_{i=1}^m y_i^{is} \frac{dy_i}{y_i},$
- $n = m$ のとき $\Gamma_{\mathbf{R}}(ms) \int_{\mathbf{R}_+^{m-1}} \widetilde{W}_\nu^n(y_1, \dots, y_{m-1}) \widetilde{W}_\mu^m(y_1, \dots, y_{m-1}) \prod_{i=1}^{m-1} y_i^{is} \frac{dy_i}{y_i}.$

ここで $\Gamma_{\mathbf{R}}(s) = \pi^{-s/2} \Gamma(s/2)$. Stade [10], [11] は以下を示した。

Theorem 1.4. $m = n, n-1$ のとき、

$$I_{\nu,\mu}^{n,m}(s) = L_\infty(s, \pi_{1,\infty}, \pi_{2,\infty}) := \prod_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \Gamma_{\mathbf{R}}(s + \nu_i + \mu_j)$$

$m = n, n-1$ の場合、 $\widetilde{Z}_\infty(s, W_1^\vee, W_2^\vee)$ の計算も全く同様なので、 ε 因子 = 1 として局所関数等式を得る。Stade の証明は $GL(n, \mathbf{R})$ と $GL(n-2, \mathbf{R})$ のクラス 1 Whittaker 関数の間の Mellin-Barnes 型の関係式を用いるものであったが、(1.1) を利用すると、もう少し見通しのよい証明が得られるので、以下その要点を述べる。Mellin-Barnes 型の積分表示を用いてゼータ積分を計算する際の Key Lemma は Barnes の補題 ($= I_{\nu,\mu}^{2,2}(s)$ の計算):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma(a+s) \Gamma(b+s) \Gamma(c-s) \Gamma(d-s) ds = \frac{\Gamma(a+c) \Gamma(a+d) \Gamma(b+c) \Gamma(b+d)}{\Gamma(a+b+c+d)}$$

である。(1.1) と Barnes の補題を繰り返し用いて次を示すことができる。

Lemma 1.5. $z_0 = 0, z_1, \dots, z_{n-1}, \lambda \in \mathbb{C}$ に対して、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi i)^{n-1}} \int_{s_1, \dots, s_{n-1}} \prod_{j=1}^{n-1} \Gamma\left(\frac{js - s_j - z_j}{2}\right) \Gamma\left(\frac{js - s_j - z_{j-1} + \lambda}{2}\right) \cdot V_\nu^n(s_1, \dots, s_{n-1}) \prod_{j=1}^{n-1} ds_j \\ &= 2^{n-1} \frac{\prod_{j=1}^n \Gamma\left(\frac{s+\nu_j+\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{ns-z_{n-1}+\lambda}{2}\right)} \cdot V_\nu^n(s - z_1, 2s - z_2, \dots, (n-1)s - z_{n-1}). \end{aligned}$$

この補題により,

$$I_{\nu,\mu}^{n,n}(s) = \frac{1}{\Gamma(\frac{ns}{2})} \prod_{j=1}^n \Gamma\left(\frac{s + \mu_1 + \nu_j}{2}\right) \cdot I_{\nu,\tilde{\mu}}^{n,n-1}\left(s - \frac{\mu_1}{2(n-1)}\right)$$

$$I_{\nu,\mu}^{n,n-1}(s) = \Gamma\left(\frac{(n-1)s - \nu_1}{2}\right) \prod_{j=1}^{n-1} \Gamma\left(\frac{s + \nu_1 + \mu_j}{2}\right) \cdot I_{\tilde{\nu},\mu}^{n-1,n-1}\left(s - \frac{\nu_1}{2(n-1)}\right)$$

が示される. ここで $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ のとき, $\tilde{\mu} = (\mu_2 + \mu_1/(m-1), \dots, \mu_m + \mu_1/(m-1))$. したがって, $GL(n) \times GL(m)$ ($m = n, n-1$) の計算は, すべて $GL(2) \times GL(2)$ の計算に帰着され所望の結果を得る.

Remark 1. $n - m > 1$ のときには, 局所ゼータ積分と局所 L 因子の一致は期待できない. $m = n - 2$ の場合に, このゼータ積分を計算すると,

$$I_{\nu,\mu}^{n,n-2}(s) = \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n-2}} \Gamma_{\mathbf{R}}(s + \nu_i + \mu_j) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma(w + \nu_i)}{\prod_{j=1}^{n-2} \Gamma(s + w - \mu_j)} \pi^{(n-2)s/2-w} dw$$

となる. $\tilde{Z}_{\infty}(s, W_1^{\vee}, W_2^{\vee})$ は unipotent 積分 (x での積分) を含み, その計算は難しくなるが, $m = n - 2$ ならば, その次元が小さいため実際に計算できて, 局所関数等式を得ることができる.

Remark 2. 一般の主系列表現の場合, 局所関数等式を成立させるベクトルの選び方が重要な問題である. 極小 K -type だけでは不十分で, その周辺のベクトルに対する Whittaker 関数の明示式が必要になると思われる.

2 クラス 1 Whittaker 関数の明示公式

古典群, 例外群の場合にこれまでに得られた結果と, その応用について述べる.

2.1 $SO(2n+1, \mathbf{R}) = SO(n+1, n, \mathbf{R})$

$SL(n, \mathbf{R})$ の場合に Jacquet 積分を用いない別証として述べたように, 第 2 種 Whittaker 関数, 展開公式を利用するという方針で明示公式を求める. クラス 1 主系列表現のパラメータを $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbf{C}^n$, 動径方向の座標を $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{R}_+^n$ とすると第 2 種 Whittaker 関数の動径成分 $M_{\nu}^n(y)$ を

$$M_{\nu}^n(y) = y^{\nu+\rho} \sum_{\mathbf{m}=(m_1, \dots, m_n) \in \mathbf{N}^n} C_{\mathbf{m}}^n(\nu) \prod_{i=1}^n (\pi y_i)^{2m_i}$$

と表したとき, 係数 $C_{\mathbf{m}}^n(\nu)$ は $C_0(\nu) = 1$ および

$$\begin{aligned} & \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} m_i^2 + \frac{1}{2} m_n^2 - \sum_{i=1}^{n-1} m_i m_{i+1} + \sum_{i=1}^{n-1} (\nu_i - \nu_{i+1}) m_i + \nu_n m_n \right\} C_{\mathbf{m}}^n(\nu) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} C_{\mathbf{m}-\mathbf{e}_i}^n(\nu) + \frac{1}{2} C_{\mathbf{m}-\mathbf{e}_n}^n(\nu), \end{aligned}$$

という漸化式によって特徴付けられる.

Theorem 2.1. $\tilde{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_{n-1}) \in \mathbf{C}^{n-1}$ とおくと, n に関する帰納的な関係式

$$\begin{aligned} C_{\mathbf{m}}^n(\nu) &= \sum_{\substack{\{l_1, \dots, l_{n-1}\} \\ \{k_1, \dots, k_{n-1}\}}} \frac{C_{(k_1, \dots, k_{n-1})}^{m-1}(\tilde{\nu})}{\prod_{i=1}^{n-1} (m_i - l_i)! \cdot (m_n - k_{n-1})! \prod_{i=1}^{n-1} (l_i - k_i)!} \\ &\quad \cdot \frac{1}{\prod_{i=1}^n (\nu_i + \nu_n + 1)_{m_i - l_{i-1}} \prod_{i=1}^{n-1} (\nu_i - \nu_n + 1)_{l_i - k_{i-1}}} \end{aligned}$$

が成り立つ. ここに, $\{k_i, l_i\}$ は $0 \leq k_i \leq l_i \leq m_i$ ($1 \leq i \leq n-1$), $0 \leq k_{n-1} \leq m_n$ を満たすように走り, $k_0 = l_0 = 0$ とする.

Theorem 2.2. $W_{\nu}^n(y) = y^{\rho} \widetilde{W}_{\nu}^n(y)$ を $\widetilde{W}_{\nu}^1(y) = K_{\nu}(2\pi y)$,

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{\nu}^n(y) &= \int_{\mathbf{R}_+^n} \int_{\mathbf{R}_+^{n-1}} \prod_{i=1}^n \exp\left\{-(\pi y_i)^2 t_i - \frac{1}{t_i}\right\} \prod_{i=1}^{n-1} \exp\left\{-(\pi y_i)^2 u_i - \frac{t_i}{t_{i+1}} \frac{1}{u_i}\right\} \\ &\quad \cdot \widetilde{W}_{\tilde{\nu}}^{n-1}\left(y_2 \sqrt{\frac{t_1 u_2}{t_2 u_1}}, \dots, y_{n-1} \sqrt{\frac{t_{n-2} u_{n-1}}{t_{n-1} u_{n-2}}}, y_n \sqrt{\frac{t_{n-1}}{u_{n-1}}}\right) \\ &\quad \cdot \left\{ \left(\prod_{i=1}^n y_i \right) \left(\prod_{i=1}^{n-1} \sqrt{t_i u_i} \right) t_n \right\}^{\nu_n} \prod_{i=1}^n \frac{dt_i}{t_i} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{du_i}{u_i} \\ &= c \int_{\mathbf{R}_+^{n-1}} \prod_{i=1}^n K_{\nu_n} \left(2\pi y_i \sqrt{(1+u_{i-1})(1+u_i^{-1})} \right) \\ &\quad \cdot \widetilde{W}_{\tilde{\nu}}^{n-1} \left(y_2 \sqrt{\frac{u_1}{u_2}}, \dots, y_{n-1} \sqrt{\frac{u_{n-2}}{u_{n-1}}}, y_n \sqrt{u_{n-1}} \right) \prod_{i=1}^{n-1} \frac{du_i}{u_i}. \end{aligned}$$

によって定めると, $\widetilde{W}_{\nu}^n(y)$ は $SO(2n+1, \mathbf{R})$ のクラス 1Whittaker 関数の動径成分.

2.2 $Sp(n, \mathbf{R}), SO(2n, \mathbf{R})$

Ginzburg, Rallis, Soudry はテータリフト $\mathcal{A}_0(SO(2n)) \rightarrow \mathcal{A}_0(Sp(n)) \rightarrow \mathcal{A}_0(SO(2n+2))$ の大域的 Fourier-Whittaker 係数を計算している. この計算のアルキメデスパートを取り出すことで, $Sp(n, \mathbf{R})$ と $SO(2n, \mathbf{R})$ のクラス 1Whittaker 関数の関係式を導くことができる.

$(\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbf{C}^n$ を $Sp(n, \mathbf{R}), SO(2n, \mathbf{R})$ の主系列表現のパラメータ, $(\nu_1, \dots, \nu_{n+1}) \in \mathbf{C}^{n+1}$ を $SO(2n+2, \mathbf{R})$ の主系列表現のパラメータとし, $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}_+^n$, $b =$

$(b_1, \dots, b_{n+1}) \in \mathbf{R}_+^{n+1}$, $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbf{R}_+^n$ をそれぞれ $SO(2n, \mathbf{R})$, $SO(2n+2, \mathbf{R})$, $Sp(n, \mathbf{R})$ の動径方向の座標とする.

Theorem 2.3. $W_\nu^{Sp_n}(t) = t^\rho \widetilde{W}_\nu^{Sp_n}(t)$, $W_\nu^{SO_{2n}}(a) = a^\rho \widetilde{W}_\nu^{SO_{2n}}(a)$ をそれぞれクラス 1 Whittaker 関数の動径成分とすると,

$$\widetilde{W}_{(\nu_1, \dots, \nu_n)}^{Sp_n}(t) = \int_{\mathbf{R}_+^n} \widetilde{W}_{(\nu_1, \dots, \nu_n)}^{SO_{2n}}(a) \cdot L_{D_n}^{C_n}(a, t) \prod_{i=1}^n \frac{da_i}{a_i}, \quad (2.1)$$

$$\widetilde{W}_{(\nu_1, \dots, \nu_n, 0)}^{SO_{2n+2}}(b) = \int_{\mathbf{R}_+^n} \widetilde{W}_{(\nu_1, \dots, \nu_n)}^{Sp_n}(t) \cdot L_{C_n}^{D_{n+1}}(t, b) \prod_{i=1}^n \frac{dt_i}{t_i}. \quad (2.2)$$

ここに,

$$L_{D_n}^{C_n}(a, t) = \exp \left[-\pi \left\{ \left(\frac{t_1^2}{a_1^2} + \frac{a_1^2}{t_2^2} \right) + \dots + \left(\frac{t_{n-1}^2}{a_{n-1}^2} + \frac{a_{n-1}^2}{t_n^2} \right) + \left(\frac{t_n^2}{a_n^2} + t_n^2 a_n^2 \right) \right\} \right],$$

$$L_{C_n}^{D_{n+1}}(t, b) = \exp \left[-\pi \left\{ \frac{b_1^2}{t_1^2} + \left(\frac{t_1^2}{b_2^2} + \frac{b_2^2}{t_2^2} \right) + \dots + \left(\frac{t_{n-1}^2}{b_n^2} + \frac{b_n^2}{t_n^2} \right) + \left(\frac{t_n^2}{b_{n+1}^2} + b_{n+1}^2 t_n^2 \right) \right\} \right].$$

Remark 3. これらはいずれも $SO(2n+1, \mathbf{R})$ のときと同様に, 第 2 種 Whittaker 関数, 展開公式を利用することで証明される. なお, (2.1) で $n = 2$ の場合は Niwa [7] による (証明の方針は異なる). また, (2.2) を拡張する形で, $\widetilde{W}_{(\nu_1, \dots, \nu_{n+1})}^{SO_{2n+2}}(b)$ を $\widetilde{W}_{(\nu_1, \dots, \nu_n)}^{Sp_n}(t)$ で表すことは無理ではないかと思われる. しかし, $\widetilde{W}_{(\nu_1, \dots, \nu_{n+1})}^{SO_{2n+2}}(b)$ と $\widetilde{W}_{(\nu_1, \dots, \nu_n)}^{SO_{2n}}(a)$ の間の関係式は予想でき, その第 2 種 Whittaker 関数版の関係式は証明できている.

2.3 $G_2(\mathbf{R})$

例外群 $G_2(\mathbf{R})$ の第 2 種 Whittaker 関数の動径成分を

$$M_{\nu=(\nu_1, \nu_2)}^{G_2}(y) = y^{\nu+\rho} \sum_{(m_1, m_2) \in \mathbf{N}^2} C_{(m_1, m_2)}^{G_2}(\nu) (\pi y_1)^{2m_1} (\pi y_2)^{2m_2}$$

と書くと, 係数 $C_{(m_1, m_2)}^{G_2}(\nu)$ は漸化式

$$(m_1^2 + 3m_2^2 - 3m_1 m_2 + \nu_1 m_1 + \nu_2 m_2) C_{m_1, m_2}^{G_2}(\nu) = C_{m_1-1, m_2}^{G_2}(\nu) + 3C_{m_1, m_2-1}^{G_2}(\nu).$$

で特徴付けられている. これを解いて以下を得る.

Theorem 2.4. ([3])

$$C_{(m_1, m_2)}^{G_2}(\nu) = \sum_{\substack{0 \leq n_1 + n_2 \leq m_1 \\ 0 \leq n_4 \leq n_3 \leq n_2 \leq m_2}} \frac{1}{(m_1 - n_1 - n_2)! (m_2 - n_2)! n_1! (n_2 - n_3)! (n_3 - n_4)! n_4!} \\ \cdot \frac{1}{(\nu_1 + \nu_2 + 1)_{m_1 - n_3} (\nu_2 + 1)_{m_2 - n_1} (\nu_1 + 1)_{n_1 - n_4}} \\ \cdot \frac{1}{(\nu_1 + 2\nu_2 + 1)_{n_2} (2\nu_1 + 3\nu_2 + 1)_{n_3} (\nu_1 + 3\nu_2 + 1)_{n_4}}.$$

さらに, $M_{(\nu_1, \nu_2)}^{G_2}(y)$ と $SL(3, \mathbf{R})$ の第 2 種 Whittaker 関数は次のような関係がある.

$$M_{(\nu_1, \nu_2)}^{G_2}(y) = y_1^4 y_2^2 \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} (\pi^3 y_1^2 y_2)^{2(k_1+k_2+2\nu_1+3\nu_2)/3} C_{(k_1, k_2)}^{SL_3}(\nu_1 + \nu_2, \nu_2, -\nu_1 - 2\nu_2) \\ \cdot M_{((k_1+k_2+2\nu_1+3\nu_2)/3, (-2k_1+k_2-\nu_1)/3, (k_1-2k_2-\nu_1-3\nu_2)/3)}^{SL_3}(y).$$

上の結果に基づき, クラス 1 Whittaker 関数の積分表示を予想し, 展開公式により示した.

Theorem 2.5. ([3]) $W_{\nu}^{G_2}(y) = y_1^5 y_2^3 \widetilde{W}_{\nu}^{G_2}(y)$, $W_{\nu}^{SL_3}(y) = y_1 y_2 \widetilde{W}_{\nu}^{SL_3}(y)$ をそれぞれクラス 1 Whittaker 関数の動径成分とすると,

$$\widetilde{W}_{(\nu_1, \nu_2)}^{G_2}(y) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \exp \left\{ -(\pi y_1)^2 t_1 - (\pi y_2)^2 t_2 - (\pi y_2)^2 t_3 - \frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_3} \frac{t_2}{t_1} \right\} \\ \cdot \widetilde{W}_{(\nu_1+\nu_2, \nu_2, -\nu_1-2\nu_2)}^{SL_3} \left(y_1 y_2 \sqrt{t_1 t_3}, y_1 \sqrt{\frac{t_2}{t_3}} \right) \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \frac{dt_3}{t_3}.$$

2.4 $SO(2n+1) \times GL(m)$ のスタンダード L 関数

$SO(2n+1) \times GL(m)$ のスタンダード L 関数のゼータ積分は Gelbart, Piatetski-Shapiro によって構成された. $GL(n) \times GL(m)$ と同様に, unipotent 積分が出てこないような $n = m, m-1$ の場合から考える. アルキメデスパートがクラス 1 主系列表現の場合には計算すべきアルキメデスゼータ積分は,

$$I_n(s) = \int_{(\mathbf{R}^{\times})^n} \widetilde{W}_{(\nu_1, \dots, \nu_n)}^{SO_{2n+1}}(y_1, \dots, y_n) \widetilde{W}_{(\mu_1, \dots, \mu_n)}^{SL_n}(y_1, \dots, y_{n-1}) \cdot (y_1 y_2^2 \cdots y_n)^s \prod_{i=1}^n \frac{dy_i}{y_i}, \\ J_n(s) = \int_{(\mathbf{R}^{\times})^n} \widetilde{W}_{(\nu_1, \dots, \nu_n)}^{SO_{2n+1}}(y_1, \dots, y_n) \widetilde{W}_{(\mu_1, \dots, \mu_{n+1})}^{SL_{n+1}}(y_1, \dots, y_n) \cdot (y_1 y_2^2 \cdots y_n)^s \prod_{i=1}^n \frac{dy_i}{y_i}.$$

すると次が期待できる.

Conjecture 2.6.

$$I_n(s) = \frac{\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n \Gamma_{\mathbf{R}}(s + \nu_i + \mu_j) \Gamma_{\mathbf{R}}(s - \nu_i + \mu_j)}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} \Gamma_{\mathbf{R}}(2s + \mu_i + \mu_j)}, \\ J_n(s) = \frac{\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{n+1} \Gamma_{\mathbf{R}}(s + \nu_i + \mu_j) \Gamma_{\mathbf{R}}(2s - \nu_i + \mu_j)}{\prod_{1 \leq i < j \leq n+1} \Gamma_{\mathbf{R}}(2s + \mu_i + \mu_j)}.$$

Remark 4. (1.1), Lemma 1.5 を用いると $I_n(s)$ の計算が $J_{n-1}(s)$ に帰着できることがわかる. 現時点で予想が示されているのは I_n に対しては, $n = 2$ (Niwa [7]), 3, 4, 5, J_n に対しては, $n = 2, 3, 4$ までである.

参考文献

- [1] D. Bump, Automorphic forms on $GL(3, \mathbf{R})$, Lect. Note Math. **1083**, Springer-Verlag, 1984.
- [2] M. Hashizume, Whittaker functions on semisimple Lie groups, Hiroshima Math. J. **12** (1982), 259–293.
- [3] T. Ishii, Whittaker functions on real semisimple Lie groups of rank two, Canad. J. Math. (to appear).
- [4] T. Ishii and E. Stade, New formulas for Whittaker functions on $GL(n, \mathbf{R})$, J. Funct. Anal. **244** (2007), 289–314.
- [5] T. Ishii and T. Oda, Calculus on principal series Whittaker functions on $SL(n, \mathbf{R})$, preprint.
- [6] H. Manabe, T. Ishii and T. Oda, Principal series Whittaker functions on $SL(3, \mathbf{R})$, Japan. J. Math. **30** (2004), 183–226.
- [7] S. Niwa, Commutation relations of differential operators and Whittaker functions on $Sp_2(\mathbf{R})$, Proc. Japan Acad. **71** Ser A.(1995), 189–191.
- [8] T. Shintani, On an explicit formula for class-1 "Whittaker functions" on GL_n over P -adic fields, Proc. Japan Acad. **52** (1976), no. 4, 180–182.
- [9] E. Stade, On explicit integral formulas for $GL(n, \mathbf{R})$ -Whittaker functions, Duke Math. J. **60** (1990), no. 2, 313–362.
- [10] E. Stade, Mellin transforms of $GL(n, \mathbf{R})$ Whittaker functions, Amer. J. Math. **123** (2001), 121–161.
- [11] E. Stade, Archimedean L -factors on $GL(n) \times GL(n)$ and generalized Barnes integrals, Israel J. Math. **127** (2002), 201–220.
- [12] I. Vinogradov and L. Tahtajan, Theory of the Eisenstein series for the group $SL(3, \mathbf{R})$ and its application to a binary problem, J. of Soviet Math. **18** (1982), 293–324.

FACULTY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY, SEIKEI UNIVERSITY, 3-3-1 KICHIJOJI-KITAMACHI,
MUSASHINO, TOKYO, 180-8633, JAPAN
E-mail address: ishii@st.seikei.ac.jp