

バーンサイド環による群の特徴付け

飯寄信保 (Iiyori, Nobuo), 山口大学教育

1 可換半群のバーンサイド環

G を有限群、 O を次の条件を満たす可換モノイドとする：

- (O1) O の単位元は、 X 、
- (O2) 任意の $a \in O$ は、 $a^2 = a$ (即ち、べき等元)、
- (O3) O は零元 1 を持つ (即ち、任意の $a \in O$ に対して、 $a \cdot 1 = 1$)、
- (O4) O は G -モノイドである。

このモノイド O の半群環 $\mathbb{Z}[O]$ は、 O が G -モノイドであることにより自然に G の作用を持っている。

- (O5) つぎの性質をもつ重み関数 (ここでは p -関数と呼ぶことにする) がある：
 O 上の関数 $w : O \rightarrow \mathbb{Z}$ は、 $\{w(x) \sum_{t \in G/G_x} x^t \mid x \in O / \sim_G\}$ により生成される加法群は、 $\mathbb{Z}[O]$ の部分環である (ここで、 $\sim_G$ は、 G の O 上への作用による自然な同値関係である)。

以上を満たす三つ組 (O, G, w) を O -集合三つ組と呼び、 $[x] = w(x) \sum_{t \in G/G_x} x^t$ とおく。(O5) で定義される $\mathbb{Z}[O]$ の部分環 $\{w(x) \sum_{t \in G/G_x} x^t \mid x \in O / \sim_G\}$ を $B(O, G, w)$ で表し、これを (O, G, w) のバーンサイド環と呼ぶことにする。

O -集合三つ組 (O, G, w) において $a \cdot b = a$ ならば $a \leq b$ として半順序 $\leq$ を定義することができる。今回は、我々は、更につぎの条件も満たす O -集合三つ組を考える：

- (O6) 任意の $a, b \in O$ に対し、 $\{x \in O \mid a \leq x, b \leq x\}$ は最小元 $a * b$ を持つ。

この条件より、 $(O, *)$ は (O1) ~ (O4) を満たす半群になる。更に (O6) で定義される $*$ に関する順序 $\leq_*$ について任意の 2 元 $a, b \in O$ に対する $\{x \in O \mid a \leq_* x, b \leq_* x\}$ は元の半群の積 ab になっていることがわかる。(残念なことに条件 (O5) は元の O -集合三つ組のものを採用して成立させることが一般にできない。)

以上の定義は、特殊な G -束として捉えたほうが良いかもしれないが、ここでは、条件 (O5) 等を半群環の言葉で記述するために以上のような体裁をとっている。

O が有限集合であるような O -集合三つ組 (O, G, w) について、つぎの基本事項が成立する。

(B1) 環として $\mathbf{Z}[O] \simeq \bigoplus^{|O|} \mathbf{Z}$ が成立する.

(B2) 加群間の写像 $\text{Tr}_G : \mathbf{Z}[O] \rightarrow \mathbf{Z}[O]$ を

$$\text{Tr}_G(x) = \sum_{g \in G} x^g$$

と定義し、 Tr_G を $\text{End}(\mathbf{Z}[O])$ の要素、 $\mathbf{Z}[O]$ の要素を左からかける作用で $\mathbf{Z}[O]$ を $\text{End}(\mathbf{Z}[O])$ の部分集合と見た場合、 Tr_G 及び $\mathbf{Z}[O]$ で生成される $\text{End}(\mathbf{Z}[O])$ の部分環 A は、 $A \otimes \mathbf{Q}$ は半単純である。

(B3) $a \in O$ に対し、 $\chi_a : O \rightarrow \mathbf{Z}$ を

$$\chi_a(x) = \frac{|\{g \in G | x^g \cdot a = x^g\}|w(a)}{|G_a|}$$

とおくと、 $\{\chi_a | a \in O / \sim_G\}$ で生成される $\text{Map}(O, \mathbf{Z})$ の部分加群は、 $B(O, G, w)$ と同形な部分環となる。

2 群の部分群束とその部分束

この O -集合三つ組 (O, G, w) のモデルは、(1) 有限群の部分群束やその群論的な性質に関連する部分束、(2) 無限群の有限指数部分群束の部分束である。例えば、有限群 G の冪零部分群族に G を加えたものや、素数の集合 π に対し、有限群 G の π -部分群族に G を加えたもの等である。つまり有限群論に現れる重要な群の性質を満たす部分群族を考え、半群の演算を集合の共通分をとる演算 $\cap$ を考えることによって O -集合三つ組を得ることができる。(但し、その性質は、共通部分をとる操作、 G -共役をとる操作について閉じていなければならない、また、最小の部分群をもっていなければならない。) このとき、多くの場合に p -関数として $w(x) = (N_G(x) : x)$ をとることができる。ここで重要なことは、群の部分群束 (本稿ではこれを全部分群束といい、部分群からなるほかの束と区別する場合がある) に対応する $B(O, G, w)$ は通常のバーンサイド環に自然に同型であるということで、上記に記した三つ組に対するバーンサイド環は、その部分環として現れる場合がおい。これらのバーンサイド環 $B(O, G, w) \cdot$ 半群環 $\mathbf{Z}[O]$ 等は群の性質をいろいろな形で含んでいる。

例 1 素数グラフとは、群 G の有限位数の元の位数を割り切る素数全体の集合 V を頂点集合とし、 V の 2 つの異なる素数 p, q が辺で結ばれる条件を「 G の有限位数の元で pq で割り切れるものが存在する」で定義したグラフである。このグラフは、有限群の構造を調べる上で非常に役に立つもので詳細に研究されている。非可解有限群に対しこのグラフが非連結であれば $G \supseteq N \supseteq M$ で N/M は単純群、 $G/N, M$ は可解群となる正規部分群 N, M が存在することが知られている。

O を群 G の冪零部分群族に G を加えたもの、 p -関数として上記のものとし O -集合三つ組を考えれば、 $[1] \mathbf{Z}$ は $B(O, G, w)$ のイデアルである。このとき、 G の素数グラフが非連結である必要十分条件は、次の条件を満たすイデアル I, J が存在することである：

$$I + J + [G] \mathbf{Z} = B(O, G, w) \text{ かつ } I \cap J \subseteq [1] \mathbf{Z}.$$

この命題の必要条件は、 O -集合三つ組の形状から直ちに出てくるが十分条件は $[1], [G]$ を決めている以外は、抽象代数としての構造から G の構造を導くもので自明ではない。

例2 G を有限非可換単純群とする。 O として全部分群族に G を加えたもの、 p -関数として $w(x) = (N_G(x) : x)$ をとると O -集合三つ組 $B(O, G, w)$ が得られる。逆にある群 H から同様にして得られた O -集合三つ組 (O', H, w') が $B(O, G, w)$ と同形であるとする。

このとき、(B2) で説明した $\text{End}(\mathbb{Z}[O'])$ の部分環 A は、 O' の G -共役類を $K_i (i \in I)$ とした時、(B1) を用いて $A \otimes \mathbb{Q} \simeq M_{|K_i|}(\mathbb{Q})$ となる (実際は A 自体を求めることができる。)。これより、 $|N_H(x)|, |x|$ の集合を求めることができる。このことより、 $|H| = |G|$ 、 H が単純群などが得られ、 $H \simeq G$ 、即ち、 $(\mathbb{Z}[O], B(O, G, w), \text{Tr}_G)$ と同じ構造を与える群は G に限ることがわかる。このように、 G が単純群のような十分「豊かな」構造を持つ場合群の構造は、 O -集合三つ組の構造により特徴付けることができる。

例3 O を有限群 G の全部分群族とする。 $R_0 = \bigoplus_{H \in O} \mathbb{Z}[\text{Irr}(H)]$ とおく。この加法群上に次の積構造を入れる： $H, K \in O, \theta \in \text{Irr}(H), \tau \in \text{Irr}(K)$ に対し、 $\theta \cdot \tau = \theta_{H \cap K} \cdot \tau_{K \cap H}$ 。このとき、 R_0 は可換環になる。この部分代数として各 $\mathbb{Z}[\text{Irr}(H)]$ より 1_H を選び出しその集合を O^* であらわせば、 O^* は今定義した積により半群構造を持ち、 O と同型であることがわかる。よって、生成される部分加群は、 R_0 の部分代数になっている。このことより、 $B(O, G, w)$ および $\mathbb{Z}[O]$ は、 R_0 の部分代数と捉えられるし R_0 をそれらの環の表現と捉えることができる。 R_0 の基底として $\bigcup_{H \in O} \text{Irr}(H)$ を固定した場合、 $\chi \in \text{Irr}(H)$ に対し 1_K をかける作用は、 χ を $H \cap K$ に制限することと同じになる。 1_K のこの作用における固有値・固有ベクトル (即ち、 H と K の間のブラッテリー図形の隣接行列の固有ベクトル固有値) は、部分群たちの指標の値から求めることができる。以上からわかるように多くの場合、 $\mathbb{Z}[O]$ 加群 R_0 より群の元の融合具合が計算できる。

以上は、群 G の G -共役を要として得られたものであるが、 G の部分群 H をとり H -共役として考えることができる。例えば、 O として H -共役、共通分をとる操作で閉じており含有関係で最小元が存在するような G の部分群の集合とする。 O は、共通部分をとる操作を二項演算として半群になる。この O が半群の積に関して単位元を持ったとする。このとき多く場合 $w(x) = (N_H(x) : X \cap H)$ とおくと (O, H, w) は、 O -集合三つ組になる。例えば、 O として G の部分群全体、冪零 (可換、可解、基本) 部分群全体に G を加えたものなどである。 $H = G$ の場合、これらの O からできるバーンサイド環を $B(G), B_n(G) (B_a(G), B_s(G), B_e(G))$ で表すものとする。

3 双対束からられるバーンサイド環

G を有限群とする。以下、 S で G の部分群全体と G を加えた族、 S_n で G の冪零部分群全体と G を加えた族、 S_a の可換部分群全体と G を加えた族、 S_s の可解部分群全体と G を加えた族、そして群の性質 P について S_P の P -部分群全体と G を加えた族を表すものとする。また、 G を明示したい場合は $S(G), S_P(G)$ のように書くことにする。但し、群の性質 P は、 $(S_P, \cap)$ が G -半群であるようなものとする。また、 G の部分群 H に対し、 S

から $\mathbb{Z}$ への写像 w_H 及び w_H^* を

$$w_H(x) = (N_H(x) : x \cap H), \quad w_H^*(x) = (N_H(x) : C_H(x))$$

($x \in S$) で定義し、混乱が起きない場合その制限達も同じ記号で表すものとする。

第一章で定義した O -集合の双対を群部分群束の場合に考えてみる。群の性質 P について S_P は、仮定により G -半群になっている。今、有限群の部分群束に限っているので (O6) の条件を満たしているなのでその (束としての) 双対 S_P^* を一章のように定めることができる。もちろんこれも G -半群になっており、積はつぎのようにになっている： $x, y \in S_P$ に対し、

$$x * y = \begin{cases} \langle x, y \rangle & \text{もし } \langle x, y \rangle \in S_P \\ G & \text{それ以外。} \end{cases}$$

上において $\langle x, y \rangle$ は x と y で生成される部分群を表すものとする。この S_P^* に p -関数として w_H^* が取れる場合、 (S_P^*, G, w_H^*) を前双対束 P -バーンサイド環と呼ぶことにする。

$S(G)^*$ から $S(H)$ への最も自然な準同形として $C_H : x \mapsto C_H(x)$ を考えることができる。部分群束には、部分群の共通部分に関するデータと部分群達によって生成されるデータが同等に含まれているわけであり、我々はそれぞれ S 、 $S(G)^*$ という半群構造によってそれらを扱っている。この写像 C_H は、部分群の生成による積と共通部分による積を対比させる重要な写像である。写像 C_G が、 $S_P(H)^*$ から $S(G)$ への G -準同形になっている場合、 $B(S_P(H)^*, H, w_H^*)$ を (G, H) -双対 P -部分群束バーンサイド環、または単に双対 P -部分群束バーンサイド環と呼ぶことにする。このとき、 C_H を自然に $\mathbb{Z}[S(H)^*]$ から $\mathbb{Z}[S(G)]$ への写像と考えることができるので、 $B(S_P(H)^*, H, w_H^*)$ から $B(S(G), H, w_H)$ への準同形写像になっている。

有限群 G に対し双対 P -部分群束バーンサイド環のなかでいつも定義可能なものは P を群であると性質にした場合に得られる (G, G) -双対部分群束バーンサイド環である。次に (定義可能であるかは定かではないが) (G, G) -双対 P -部分群束バーンサイド環であろう。これらは、 $B(G)^*$ 、 $B_P(G)$ で表すものとする。以上のような設定をすると群論の重要な概念 (信号関手理論等) がバーンサイド環の言葉で表現できるようになるがここでは立ち入らないことにし、 S 、 $S(G)^*$ という半群構造についてもう少し詳しく見ていくことにする。

以下 A, B を有限群 G の部分群とすし、 $S(A)$ 、 $S(B)$ 、 $C_A S(B)$ 及び $C_B S(A)$ の関係について観察する。このとき、つぎの半群準同形がある。

$$C_B : S(A)^* \rightarrow S(B), \quad C_A : S(B)^* \rightarrow S(A)$$

今 $\alpha = C_A C_B$ 、 $\beta = C_B C_A$ とおけば、これらはそれぞれ $S(A)$ 、 $S(B)$ 上の自分自身への集合としての写像となる。 $C_B : S(A) \rightarrow S(B)^*$ は一般には半群準同形でないことに注意する。

命題 $x, y \in S(A)$, $u, v \in S(B)$ とする。

- (1) $C_A = C_A C_B C_A$, $C_B = C_B C_A C_B$
- (2) $\alpha(x * y) = \alpha(\alpha(x) * \alpha(y))$, $\beta(u * v) = \beta(\beta(u) * \beta(v))$
- (3) $C_A(S(B)) = \alpha(S(A))$, $C_B(S(A)) = \beta(S(B))$

(4) $x, y \in C_A(\mathcal{S}(B))$ に対して $x *_{(A,B)} y = \alpha(x * y)$ とおき、 $u, v \in C_B(\mathcal{S}(A))$ に対して $u *_{(B,A)} v = \beta(u * v)$ とおく。また、 $x \cap_{(A,B)} y = C_A(C_B(x) *_{(B,A)} C_B(y))$, $u \cap_{(B,A)} v = C_B(C_A(u) *_{(A,B)} C_A(v))$ とおくと、これらの二項演算は半群構造を与える。

Proposition

$$\begin{aligned} (C_A(\mathcal{S}(B)), *_{(A,B)}) &\simeq (C_B(\mathcal{S}(A)), \cap_{(B,A)}) \\ (C_B(\mathcal{S}(A)), *_{(B,A)}) &\simeq (C_A(\mathcal{S}(B)), \cap_{(A,B)}) \end{aligned}$$

これらの命題からわかるように、 $\mathcal{S}(A)$, $\mathcal{S}(B)$ は、お互いに相手の双対構造の影を内部に持っている。特に、 $A = B = G$ の場合を考えると、 $\mathcal{S}(G)$ と $\mathcal{S}(G)^*$ の中には同形な半群構造を隠し持っていることがわかる。この隠された半群構造 $(C_G(\mathcal{S}(G)), \cap_{(G,G)})$ を G の b -骨格と仮に呼ぶことにする。また群の性質 P -に関して $C_G(\mathcal{S}_\Xi(G)) \subseteq \mathcal{S}_\Xi(G)$ を満たす場合同様にして得られる得られる $(C_G(\mathcal{S}_\Xi(G)), \cap_{(G,G)})$ を G の P - b -骨格と呼ぶことにする。また、 $PB(G) = C_G(B(G)^*)$ と書くことにする（この考察においてバーンサイド環の主要部分と思われるので $B(G)$ に P を添えて表した。）。また、一般に $(C_G(\mathcal{S}(G)), *_{(G,G)}) \simeq (C_G(\mathcal{S}(G)), \cap_{(G,G)})$ であるが決して “=” でないことに注意していただきたい。

定義 $b.r.(G) = \text{rank} PB(G)$ とおく。これは $|C_G(\mathcal{S}_\Xi(G)) / \sim_G|$ と一致する（ $\sim_G$ は G 共役による同値関係）。

この章を終えるにあたって次のことを注意しておく。（B3）で注意したように $\{\chi_a | a \in \mathcal{S}(G) / \sim_G\}$ で生成される $\text{Map}(\mathcal{S}(G), \mathbb{Z})$ の部分加群は、 $B(\mathcal{S}(G), G, w)$ と同形な部分環となる。よって $S = (\chi_a(b))_{a,b \in \mathcal{S}(G) / \sim_G}$ は $B(\mathcal{S}(G), G, w)$ の情報をすべて含んでいることになる。 (G, G) -双対部分群束バーンサイド環 $B(\mathcal{S}(G)^*, G, w)$ に対しても同様に $T = (\chi_a^*(b))_{a,b \in \mathcal{S}(G) / \sim_G}$ を作ることができる。但し、「 χ 」を区別するために双対部分束バーンサイド環のそれには「 $*$ 」をつけて表している。このとき、 $D = (\delta_{a,b} | a|)_{a,b \in \mathcal{S}(G) / \sim_G}$, $D^* = (\delta_{a,b} | C_G(a)|)_{a,b \in \mathcal{S}(G) / \sim_G}$ とおくと $T = D^{-1} D^* T D$ が成立する。

4 双対部分群束バーンサイド環による群の特徴付け

この章でも引き続き G を有限群とする。まず $b.r.(G)$ の小さい群についてその構造考えてみたい。

命題

- (1) $b.r.(G) = 1$ である必要十分条件は G が可換群であることである。
- (2) $b.r.(G) \neq 2, 3$.
- (3) $b.r.(G) = 4$ であるならば、 $G/Z(G) \simeq E(p^n) : q$ である。但し、この q の $E(p^n)$ への作用は既約である。

簡単な $S_3, 7 : 3, E(2^2) : 3$ 等のフロベニウス群やその拡大 $Q_8 : 3$ 等は $b.r.(G) = 4$ を満たす群

であり、 $b.r(G) = 4$ を満たせば単純な構造を持つことがわかる。 $b.r(G) > 4$ の場合は、たとえば $b.r(G) = 5$ の場合であっても群の構造決定は難しくなる。例えば、 $G = PSL_2(2^n)$ ($n \geq 2$) とすれば、 $PB(G) = \text{span}\{1, E(2^n), C(2^n - 1), C(2^n + 1), G\}$ となるので、 $b.r(G) = 5$ である。 $b.r(G) = 5$ の場合は、 $Z(G) = 1$ という条件の下では、鈴木通夫氏の (CA)-群の研究がありそれを応用することができ、 G の分類が可能ではあるが、 $Z(G) = 1$ という条件をはずして考えると大まかな分類は可能であるが、未だ満足するレベルの分類は完了していない。

例 位数が素数 p の 3 乗であるような非可換群 G は、 $b.r(G) = 3+p$ である。実際、このような群の中心の位数は p であり、位数 p^2 の部分群の中心化群はそれ自身に一致する。また、位数 p^2 の部分群は正規部分群であるので位数 p^2 の部分群 H に対して $\{H\} \in C_G(S_\Xi(G))/\sim_G$ となる。位数 p^2 の部分群の総数は $p+1$ であるので、 $Z(G)$ と G に対する共役類を数えて $b.r(G) = 3+p$ となる。 $p = 2$ のとき、 $b.r(G) = 5$ が得られる。

この例に現れる群の $PB(G)$ の構造は $C_G(S_\Xi(G))/\sim_G = \{Z(G), A_1, A_2, \dots, A_m, G\}$ としたとき、 $A_i A_i = A_i$ ($i = j$ の時)、 $A_i \neq A_j = Z(G)$ ($i \neq j$ の時) となっている。 $Z(G) = 1$ を満たしている群に限定すれば、そのような群は (CA)-群であることがわかり、鈴木通夫氏の (CA)-群の分類を用いることができる。よってつぎを得る

命題

有限群 G の b -骨格がある素数 p があって、 $S(E(p^2))$ の部分半群に同形であり $Z(G) = 1$ を満たすならば、 $G \simeq PSL_2(2^n)$ or フロベニウス群が成立する。

また別の視点からの群のバーンサイド環による特徴づけを考えてみる。双対 P -部分群束バーンサイド環を応用する上で基本的な事柄をある程度おさえておくほうが良いと考えられるので、基本的写像 $C_G : B_P(G)^* \rightarrow B(G)$ が単射な場合を考えたい。その中でもっとも基本的なものとして、像 $C_G : B(G)^* \rightarrow B(G)$ が単射である場合が考えられるわけであるが、これは直ちに群束とその双対束が C_G により同形であることわかる。[5] によればそのような群は、素数 p, q によるフロベニウス群 $p : q$ という位数が素数二つの積になっているようなフロベニウス群であって互いに位数が素であるようなもの $F_1, \dots, F_m$ の直積である。

次に重要と思われるのは、指標環との関係を踏まえ、 P が冪零部分群である場合について考えることにする。このとき、有限群 G は、(CN)-群であることがわかる。(CN) については、鈴木通夫先生による分類定理があり G の候補は次のどれかになることがわかる：

- (1) 冪零群,
- (2) フロベニウス補部分群は巡回群もしくは、巡回群と一般四元数群の直積であるようなフロベニウス群
- (3) 3 ステップ群

(4) G は正規 2-部分群 N を持ち G/N は次のどれかとなる :

$$\begin{aligned} & PSL_2(p) \text{ (} p \text{ はフェルマー素数またはメルセンヌ素数),} \\ & PSL_2(2^n) \text{ (} n \geq 2), \quad Sz(q), \\ & PSL_2(9), \quad PSL_3(4), \quad PSL_2(9).2_3. \end{aligned}$$

これらの群について調べていけばよいのであるがそのときにつぎの事実が役に立つ。

命題 G の一般フィッティング部分群を含む部分群のなす O -集合三つ組を $S(G)_{F^*(G)}$ とすれば、

$$S(Z(F^*(G)))^* \longrightarrow_{C_G} S(G)_{F^*(G)} \simeq S(G/F^*(G)) \quad (X \mapsto C_G(X)/F^*(G)).$$

は、準同形である。

この命題によって、一般フィッティング部分群の部分群束の構造から $G/F^*(G)$ のその構造の情報がわかることになる。例えば、 $S(Z(F^*(G)))^*$ の部分構造が連結であれば、対応する $G/F^*(G)$ も連結である等である。実際には、この視点から $G/F^*(G)$ の p -部分群の束の構造と $S(Z(F^*(G)))^*$ の部分構造を照らし合わせて分類作業を進めていくことになる。このようなことから計算をこなしてゆけば次の定理を得る。

定理 $C_G : B_n(G)^* \rightarrow B(G)$ が単射であれば G は単位群、位数が二つの素数の積であるようなフロベニウス群、或いは、 $PSL_2(7)$ に同形である。

この命題に出て来る $PSL_2(7)$ は、非常に不思議な群である。素数グラフの視点から観察すると他の群とは明らかに違いが観察することができる。以前筆者は、素数グラフの一般化の応用例としてホール部分群による群の p -可解性との関係について調べたことがある。その時も $p = 3$ の場合を除外しなければならない本質的な原因となり、多少すっきりしない結果になってしまった (Communication in Algebra 30, 1679-1691 を参照のこと)。しかし、 $PSL_2(7)$ は、ホール部分群であるような 2-Frobenius 群をもつ最小位数の単純群であり、ホール 2-Frobenius 部分群を持つ群が、表現論的にも狭義の閉鎖的な群論的にも非常に重要であるという事実を実感させてくれたありがたい群でもある。

参考文献

- [1] S. Abe, and N. Iiyori, *A generalization of prime graphs of finite groups*. *Hokkaido Math. J.* **29** (2000), 391–407.
- [2] J. H. Conway *et al*, *Atlas of Finite Groups*, Oxford Univ. Press(Cleandon), London/New York 1985.
- [3] D. Gorenstein, *Finite Groups*, Harper & Row, New York/ Evanston/London 1968.
- [4] N. Iiyori, *Burnside rings and a characterization of $PSL_2(7)$* preprint.

- [5] S. E. Stonehewer and G. Zacher, , *Dualities of groups*, *Ann. Mat. Pura. Appl.*, **170** 1 (1996) 23–55.
- [6] M. Suzuki, *Finite groups with nilpotent centralizers*, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **99**(1961), 425–470.
- [7] M. Suzuki, *Group Theory I, II*. Springer, Berlin-Heidelberg- New York, 1982.