

完全交叉のレフシェッツ性問題について

(渡辺純三氏・和地輝仁氏との共同研究)

張間忠人

北海道教育大学釧路校

この報告は、渡辺純三先生と和地輝仁氏との共同研究 [2]~ [6] に基づきます。詳しくはそれらを見ていただけると幸いです。

1. 序

体 K 上の次数付アルティン環 $A = \bigoplus_{i=0}^c A_i$ が弱いレフシェッツ性 (WLP) をもつとは、どの g 倍写像 $\times g: A_i \rightarrow A_{i+1}$ も単射または全射になるような A の一次式 g が存在するときに言う。また、 A が強いレフシェッツ性 (SLP) をもつとは、 $d = 1, 2, \dots$ に対して、どの g^d 倍写像 $\times g^d: A_i \rightarrow A_{i+d}$ も単射または全射になるような A の一次式 g が存在するときに言う。このとき、そのような性質をもつ一次式を弱いレフシェッツ元または強いレフシェッツ元と言う。

アルティン環のどのようなクラスがレフシェッツ性をもつか、という問題を考えたい。アルティン環のレフシェッツ性問題は、アルティン環の線形代数の話でもある。すなわち、アルティン環とその元で定まるベキ零行列のジョルダン標準形を決める問題と関係がある。このことについては、次の節で説明する。

例. SLP または WLP をもつ例と持たない例をいくつか紹介する。

- (1) 1 変数多項式環の剰余環 $A = K[x_1]/(x_1^\ell)$ は SLP をもつ。レフシェッツ元は $c\overline{x_1}$ ($c \neq 0$) である。
- (2) 2 変数多項式環の剰余環 $A = K[x_1, x_2]/I$ は SLP をもつ ([1])。
- (3) 単項式で生成される完全交叉 $A = K[x_1, x_2, \dots, x_n]/(x_1^{a_1}, x_2^{a_2}, \dots, x_n^{a_n})$ は SLP をもつ。レフシェッツ元は $c_1\overline{x_1} + c_2\overline{x_2} + \dots + c_n\overline{x_n}$ ($c_1c_2 \cdots c_n \neq 0$) である。これは、次の定理から分かる。

定理 ([9]). (A, g) と (B, h) は SLP をもつとする。体 K の標数は 0 と仮定する。このとき、 $(A \otimes_K B, g + 1 \otimes 1 + h)$ も SLP をもつ。

- (4) 3 変数の完全交叉 $A = K[x_1, x_2, x_3]/(f_1, f_2, f_3)$ は WLP をもつ ([1])。 A が SLP をもつかどうかは未解決である。

- (5) ヒルベルト関数が $1, 4, 10, 10, 4, 1$ であるゴレンスタイン環で SLP を持たない例がある ([8]).

$R = K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ を体 K 上の n 変数多項式環, I を斉次多項式からなる正則列 $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ で生成されたイデアルとし, 完全交叉 $A = R/I$ を考える. 完全交叉が SLP をもつかどうかという問題に興味がある. とくに, 次を予想している.

予想. いま, n 次の置換 $\sigma \in \mathcal{S}_n$ が多項式環の変数の置換として作用している状況を考える. $I = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ がすべての $\sigma \in \mathcal{S}_n$ の作用で不変であると仮定する. このとき, 完全交叉 $A = R/I$ は SLP をもつ.

2. 強いレフシェッツ性とジョルダン分解

(A, m, K) をアルティン局所環で, A はその剰余体 K を含んでいるとする. m の元 y で定まる線形写像 $\times y : A \rightarrow A$ を考えよう. ある自然数 ℓ に対して $y^\ell = 0$ なので, 線形写像を表す行列はベキ零行列である. このベキ零行列のジョルダン標準形を

$$J(\times y) = \begin{bmatrix} J(0, n_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J(0, n_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J(0, n_r) \end{bmatrix}$$

とする (ただし, $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_r$). 明らかに, $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = \dim A$ が成り立つ. いま

$$P(\times y) = n_1 \oplus n_2 \oplus \cdots \oplus n_r$$

とおく. 集合 $\{P(\times y) \mid y \in m\}$ に全順序を定める.

定義. $P(\times y) = n_1 \oplus n_2 \oplus \cdots \oplus n_r$, $P(\times z) = m_1 \oplus m_2 \oplus \cdots \oplus m_s$ に対して,

(1) $r < s$, または

(2) $r = s$, $n_1 = m_1, n_2 = m_2, \dots, n_{j-1} = m_{j-1}, n_j > m_j$

であるとき, $P(\times y) \succ P(\times z)$ と定める.

集合 $\{P(\times y) \mid y \in m\}$ には最大元が存在する. 詳しく言えば,

定理 ([2]). (A, m, K) をアルティン局所環で, A はその剰余体 K を含んでいるとする. また, $\{b_1, b_2, \dots, b_t\}$ を極大イデアル m の生成系 (極小とは限らない), $X_1, X_2, \dots, X_t$ を A 上の不定元とする. $A^* = A[X_1, X_2, \dots, X_t]_{m[X_1, X_2, \dots, X_t]}$, $Y = b_1 X_1 + b_2 X_2 + \cdots + b_t X_t \in A^*$ とおく. このとき, 次が成り立つ.

(1) すべての m の元 y に対して, $P(\times y) \prec P(\times Y)$.

(2) $P(\times Y) = P(\times y)$ をみたす m の元 y が存在する.

定義. $P(\times Y) = P(\times y)$ をみたす m の元 y を A の一般元と言う.

再び, 次数付アルティン環 $A = \bigoplus_{i=0}^c A_i$ (ただし, $A_c \neq (0)$) を考える. いま, A のヒルベルト関数 $h_i = \dim_K A_i$ は unimodal と仮定する. すなわち, $h_0 \leq h_1 \leq \dots \leq h_j \geq h_{j+1} \geq \dots \geq h_c$. このとき:

命題 ([2]). y を A の一般的な一次式, そして $P(\times y) = n_1 \oplus n_2 \oplus \dots \oplus n_r$ とする.

(1) $P(\times y) \preceq$ the dual partition of $h_0 \oplus h_1 \oplus \dots \oplus h_c$.

(2) 次は同値である.

(i) y は弱いレフシェッツ元である.

(ii) $r = \max\{h_0, h_1, \dots, h_c\}$.

(3) 次は同値である.

(i) y は強いレフシェッツ元である.

(ii) $P(\times y) =$ the dual partition of $h_0 \oplus h_1 \oplus \dots \oplus h_c$.

3. ゴレンスタイン環の中心的単純加群

$A = \bigoplus_{i=0}^c A_i$ を次数付アルティン環, $z \in A_1$ を一次式, そして

$$P(\times z) = f_1 \oplus \dots \oplus f_1 \oplus f_2 \oplus \dots \oplus f_2 \oplus \dots \oplus f_s \oplus \dots \oplus f_s$$

とする. ただし, $f_1 > f_2 > \dots > f_s$.

定義. 上の状況で

$$U_i = \frac{(0 : z^{f_i}) + (z)}{(0 : z^{f_{i+1}}) + (z)}$$

とおき, A の z に対する i 番目の中心的単純加群という.

注意. 次のイデアルの列

$$A = (0 : z^{f_1}) + (z) \supset (0 : z^{f_1-1}) + (z) \supset \dots \supset (0 : z) + (z) \supset (z)$$

において, 隣り合うイデアルの商加群を考える. それらの中でゼロ加群でないものの全体が中心的単純加群である.

命題 ([3], [4]). 上の状況で A はゴレンスタインであると仮定する. このとき, どの中心的単純加群のヒルベルト関数も対称的である.

定義. $A = \bigoplus_{i=0}^c A_i$ を次数付アルティン K 代数, $V = \bigoplus_{i=a}^b V_i$ を次数付 A 加群であって, 各 V_i は体 K 上の有限次元線形空間とする. ただし $V_a \neq (0)$, $V_b \neq (0)$ である.

- (1) $\frac{a+b}{2}$ を V のヒルベルト関数 $(\dim_K V_a, \dim_K V_{a+1}, \dots, \dim_K V_b)$ の折り返し次数という.
- (2) V が弱いレフシェッツ性 (WLP) をもつとは, どの g 倍写像 $\times g : V_i \rightarrow V_{i+1}$ も単射または全射になるような A の一次式 g が存在するときに言う.
- (3) V が強いレフシェッツ性 (SLP) をもつとは, $d = 1, 2, \dots$ に対して, どの g^d 倍写像 $\times g^d : V_i \rightarrow V_{i+d}$ も単射または全射になるような A の一次式 g が存在するときに言う.

定理 ([3], [4]). 上の状況で A はゴレンスタイン環, 体 K の標数はゼロとする. このとき, 次は同値である.

- (i) A は強いレフシェッツ性をもつ.
- (ii) ある一次式 $z \in A_1$ に対する, すべての中心的単純加群が強いレフシェッツ性をもつ.

上の定理の仮定において, A のゴレンスタイン性をとると次のようになる.

定理 ([3], [4]). 上の状況で体 K の標数はゼロとする. このとき, 次は同値である.

- (i) A は強いレフシェッツ性をもつ.
- (ii) ある一次式 $z \in A_1$ に対する, すべての中心的単純加群が強いレフシェッツ性を持ち, かつ $U_i \otimes_K K[t]/(t^{f_i})$ のヒルベルト関数の折り返し次数は A のそれと一致する.

定理 ([2], [4]). 体 K の標数はゼロとする. A を次数付アルティン K 代数, その極大イデアルを m , B を A 上の有限平坦 K 代数とする. いま, A と B/mB は強いレフシェッツ性をもつと仮定する. このとき, B も強いレフシェッツ性をもつ.

命題 ([2], J. Herzoh and D. Popescu). A を強いレフシェッツ性をもつ次数付アルティン環とする. $h \in A[t]$ を A 係数のモニック多項式とし, $B = A[t]/(h)$ とおく. このとき, B は強いレフシェッツ性をもつ.

例. 体 K の標数はゼロとし, $R = K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ とおく.

- (1) $f_1, f_2, g_3, \dots, g_n \in R$ を任意の斉次式からなる正則列, ただし $\deg(g_j) = 1$ ($j = 3, \dots, n$), $d_3, \dots, d_n$ を正の整数, $I = (f_1, f_2, g_3^{d_3}, \dots, g_n^{d_n})$ とおく. このとき, R/I は強いレフシェッツ性をもつ.

- (2) $p_j \in R$ を次数 j のベキ和多項式とする. すなわち, $p_j = x_1^j + x_2^j + \cdots + x_n^j$. $I = (p_a, p_{a+1}, \dots, p_{a+n-1})$ とおく. このとき, R/I は完全交叉であって, 強いレフシェッツ性をもつ.
- (3) $h_j \in R$ を次数 j の完全対称式とする. すなわち, h_j は次数 j のすべての単項式の和である. $I = (h_a, h_{a+1}, \dots, h_{a+n-1})$ とおく. このとき, R/I は完全交叉であって, 強いレフシェッツ性をもつ.
- (4) $e_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$ を次数 j の基本対称式, r, s を正の整数とし, $f_j = e_j(x_1^r, \dots, x_{n-1}^r, x_n^s)$, $I = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ とおく. いま, $s < r$ または s は r の倍数とする. このとき, R/I は完全交叉であって, 強いレフシェッツ性をもつ.
- (5) $\{f_2, f_3, \dots, f_n, f_d\}$ を斉次対称式からなる正則列とする. ただし f_j の次数は j である. $I = (f_2, f_3, \dots, f_n, f_d)$ とおく. いま, $d > n$ であって d は素数と仮定する. このとき, 完全交叉 R/I は強いレフシェッツ性をもつ.

4. k 階レフシェッツ性とジェネリックイニシャルイデアル

$R = K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ ($\deg(x_i) = 1$) を体 K 上の n 変数多項式環, I をそのアルティン斉次イデアルとし, $A = R/I$ とおく. k を n 以下の正の整数とする.

定義. アルティン環 A が k -SLP をもつとは, 次の条件をみたす A の k 個の一次式 $g_1, g_2, \dots, g_k$ が存在するときに言う.

- A は SLP をもち, g_1 はレフシェッツ元の一つである.
- $j = 2, 3, \dots, k$ に対して, $A/(g_1, \dots, g_{j-1})$ は SLP をもち, g_j はレフシェッツ元の一つである.

例. I を R のアルティン almost revlex イデアルで, $I \subset (x_1, x_2, \dots, x_n)^2$ とする. R/I は n -SLP をもつ.

正の整数からなる数列 $h : h_0, h_1, h_2, \dots$ に対して, 新しい数列 $\Delta h : (\Delta h)_0, (\Delta h)_1, (\Delta h)_2, \dots$ を $(\Delta h)_i = \max\{h_i - h_{i-1}, 0\}$ で定める. 以下同様に, $k = 2, 3, \dots$ に対して, $\Delta^k h = \Delta(\Delta^{k-1} h)$ を定める.

命題 ([6]). 正の整数からなる有限数列 $h = (h_0, h_1, \dots, h_c)$ に対して, 次は同値である.

- R/I のヒルベルト関数が h となるような R の almost revlex イデアルが存在する.
- h は n -SLP をもつアルティン環のヒルベルト関数である.

- (iii) $k = 0, 1, \dots, n$ に対して, $\Delta^k h$ は O-sequence, すなわち, あるアルティン環のヒルベルト関数になっている.

注意. I と J を almost revlex イデアルとする. R/I と R/J が同じヒルベルト関数をもてば $I = J$ である.

$h = (h_0, h_1, \dots, h_c)$ を unimodal な有限数列とする. $h_b = \max\{h_i\}$ とおく. どの h_j ($j > b$) に対しても $h_j = h_a$ となる $a \leq b$ があるとき, 数列 h は quasi-symmetric であるという.

定理 ([6]). $R = K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ ($\deg(x_i) = 1$) を体 K 上の n 変数多項式環, I をそのアルティン斉次イデアルとする. 体 K の標数はゼロと仮定する. いま, R/I は n -SLP とし, $k = 0, 1, \dots, n-4$ に対して $\Delta^k h$ は quasi-symmetric とする. このとき, $\text{gin}(I)$ は R/I のヒルベルト関数で一意的に決まる almost revlex イデアルである.

例 ([6], [7]). 体 K の標数はゼロとし, $R = K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ とする. 以下の環 R/I は n -SLP をもつ. ゆえに, $\text{gin}(I)$ は R/I のヒルベルト関数で一意的に決まる almost revlex イデアルに一致する.

- (1) $f_1, f_2, g_3, \dots, g_n \in R$ を任意の斉次式からなる正則列, ただし $\deg(g_j) = 1$ ($j = 3, \dots, n$), $d_3, \dots, d_n$ を正の整数で $d_j \geq d_1 + \dots + d_{j-1} - j + 2$ ($j = 3, \dots, n$) とする. $I = (f_1, f_2, g_3^{d_3}, \dots, g_n^{d_n})$ とおく.
- (2) $f_i \in K[x_i, \dots, x_n]$ は変数 x_i に関するモニック多項式とする. $d_j \geq d_1 + \dots + d_{j-1} - j + 2$ ($j = 3, \dots, n$) と仮定する. ただし $d_i = \deg(f_i)$ とする. $I = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ とおく.
- (3) a, b, c, d は正の整数であり, 少なくとも一つは 2 である. $I = (x_1^a, x_2^b, x_3^c, x_4^d)$ とおく.

参考文献

- [1] T. Harima, J. C. Migliore, U. Nagel and J. Watanabe, The weak and strong Lefschetz properties for Artinian K-algebras, J. Algebra 262, 99–126, 2003.
- [2] T. Harima and J. Watanabe, The finite free extension of Artinian K-algebras with the strong Lefschetz property, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 110, 119–146, 2003.
- [3] T. Harima and J. Watanabe, The central simple modules of Artinian Gorenstein algebras, J. Pure Appl. Algebra 210, 447–463, 2007.

- [4] T. Harima and J. Watanabe, The strong Lefschetz property for Artinian algebras with non-standard grading, *J. Algebra* 311, 511–537, 2007.
- [5] T. Harima and J. Watanabe, The commutator algebra of a nilpotent matrix and an application to the theory of commutative Artinian algebras, *J. Algebra* 319, 2545–2570, 2008.
- [6] T. Harima and A. Wachi, Generic initial ideals, graded Betti numbers and k-Lefschetz properties, to appear in *Comm. Algebra*.
- [7] T. Harima, S. Sakaki and A. Wachi, Generic initial ideals of some monomial complete intersections in four variables, preprint.
- [8] H. Ikeda, Results on Dilworth and Rees numbers of Artinian local rings, *Japan J. Math.* 22, 147–158, 1996.
- [9] J. Watanabe, The Dilworth number of Artinian rings and finite posets with rank function, *Adv. Stud. Pure Math.* 11, 303–312, 1987.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, HOKKAIDO UNIVERSITY OF EDUCATION (KUSHIRO CAMPUS), KUSHIRO HOKKAIDO 085-8580, JAPAN
E-mail address: harima@kus.hokkyodai.ac.jp