

The structure of Sally modules of rank one

後藤四郎（明治大学・理工学部）

目次

1	はじめに	1
2	Sally 加群の性質	3
3	Sally の定理	5
4	主定理	7
5	応用	13
6	例	14

1 はじめに

この報告は、千葉大学大学院自然科学研究科准教授の西田康二さん、私の学生である明治大学大学院理工学研究科基礎理工学専攻数学系後期課程3年の大関一秀君との二つの共同研究 [GNO1, GNO2] に基づきます。とくに [GNO2] における大関君の寄与には、特筆すべき大きなものがあり、私はこのことを非常に嬉しく思います。

さてこれから私は、階数1の Sally 加群の構造を解明したいと思います。Sally 加群は Hilbert 関数の補正項を記述するような次数付加群なのですが、Sally 加群とは何かということと研究の目的や動機が何かということをお話するには、多少の記号を用意しなければなりません。そこで以下、 $(A, \mathfrak{m})$ は次元 $d > 0$ の Cohen-Macaulay 局所環とし、 I は環 A 内の $\mathfrak{m}$ -準素イデアルとします。

そうすると、イデアル I の Hilbert 函数 $\ell_A(A/I^{n+1})$ は十分大きい整数 $n \gg 0$ に対し n に関する d 次の多項式であって、整数 $\{e_i(I)\}_{0 \leq i \leq d}$ を用いて次のように

$$\ell_A(A/I^{n+1}) = e_0(I) \binom{n+d}{d} - e_1(I) \binom{n+d-1}{d-1} + \cdots + (-1)^i e_i(I) \binom{n+d-i}{d-i} + \cdots + (-1)^d e_d(I)$$

($\forall n \gg 0$) 記述されることがよく知られています。ここで $e_i(I)$ の符号を適当に変えているのは、それらが非負であることを期待しているからです。実際、 $e_0(I)$ はイデアル I の重複度と呼ばれる不変量であって必ず $e_0(I) > 0$ ですし、 $e_1(I)$ と $e_2(I)$ が非負整数であることも知られて久しい ([Na]) のですが、一方で $d = 3$ の時、 $e_3(I) = -1$ となるようなイデアル I の様々な例が構成されていて (例えば、定理 5.1, 例 6.1), $e_i(I)$ は $i \geq 3$ の範囲では一般には非負ではありません。重要なことは、Hilbert 函数の挙動にはイデアル I の性質が忠実に反映されているだけでなく、基礎環 A の構造も非常に深く反映されていて、局所環 A の構造解明に手がかりと指標を与え、尽きぬ興味の対象であるということです。

Sally 加群の話に入るために、 $Q = (a_1, a_2, \dots, a_d)$ は環 A の巴系イデアルとし、とくに Q はイデアル I の節減 (reduction) になっている、すなわち I は Q 上で整である (あるいは、同値な条件ですが、等式 $I^{n+1} = QI^n$ が十分大なるすべての整数 $n \gg 0$ に対して成り立つ) と仮定します。このとき、多項式環 $A[t]$ 内で二つの A -部分代数

$$T = \mathcal{R}(Q) := A[Qt] \subseteq R = \mathcal{R}(I) := A[It] \subseteq A[t]$$

(すなわちイデアル Q, I の Rees 代数) を考え

定義 1.1 (Vasconcelos [V]). $S = S_Q(I) := IR/IT$

とおき、これをイデアル I の Q に関する Sally 加群と呼びます。イデアル Q が I の節減であるため、環 R は環 T の加群として有限生成な次数付拡大になりますから、 IR も IT も有限生成次数付 T -加群であり、従って S も有限生成次数付 T -加群となります。簡単に確かめることができますが、十分大な整数 $\ell \gg 0$ を見つけて $\mathfrak{m}^\ell \cdot S = (0)$ が成り立つようにできますから、Sally 加群 S の次元は高々 d であり、函数 $\ell_A(S_n)$ は n について高々 $d-1$ 次であることが分かります。

この報告の目的は、等式

$$e_1(I) = e_0(I) - \ell_A(A/I) + 1$$

を満たすようなイデアル I の Sally 加群の構造を解析し、その作業を通してイデアル I の Hilbert 関数を決定することにあります。先行する結果がどのようなものであるかを説明し、なぜこのようなイデアルに関心があるのか、得られた結果がどのような価値を持つかを説明するには、まず Sally 加群の基本的な性質をお話しなければなりません。

2 Sally 加群の性質

次の二つの結果は、Vasconcelos [V] によります。

補題 2.1. (1) Sally 加群 S の斉次成分 $\{S_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ は、下記によって与えられる。

$$S_n \cong \begin{cases} (0) & \text{if } n \leq 0, \\ I^{n+1}/IQ^n & \text{if } n \geq 1. \end{cases}$$

(2) $S = (0)$ なるための必要十分条件は、 $I^2 = QI$ である。

(3) $S \neq (0)$ とし $V = S/MS$ とおく。ただし $M = \mathfrak{m}T + T_+$ とする。 $\{V_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ により体 T/M 上の次数付ベクトル空間 V の斉次成分を表し、 $\Lambda = \{n \in \mathbb{Z} \mid V_n \neq (0)\}$ 、 $q = \max \Lambda$ とおく。すると $\Lambda = \{1, 2, \dots, q\}$ 、 $r_Q(I) = q + 1$ が成り立つ。ただし $r_Q(I) = \min\{n \geq 0 \mid I^{n+1} = QI^n\}$ である。

(4) $S = TS_1$ なるための必要十分条件は、 $I^3 = QI^2$ である。

この補題 2.1 (3) は、Sally 加群の極小斉次生成系の次数は gap 無しに連続していることを示しています。

以下 $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}T$ 、 $B = T/\mathfrak{p}$ とおきます。 $B = (A/\mathfrak{m})[X_1, X_2, \dots, X_d]$ は、環 A の剰余体 $A/\mathfrak{m}$ 上の d 変数の多項式環ですから、イデアル $\mathfrak{p}$ は環 T の高さ 1 の次数付素イデアルです。

$$G(I) := R/IR \cong \bigoplus_{n \geq 0} I^n/I^{n+1}$$

とおきます。

命題 2.2. (1) $\text{Ass}_T S \subseteq \{\mathfrak{p}\}$ である。従って、 $S \neq (0)$ である限り、 $\dim_T S = d$ となる。

(2) すべての整数 $n \geq 0$ について等式

$$\ell_A(A/I^{n+1}) = e_0 \binom{n+d}{d} - (e_0 - \ell_A(A/I)) \cdot \binom{n+d-1}{d-1} - \ell_A(S_n)$$

が成り立つ。

(3) $e_1 = e_0 - \ell_A(A/I) + \ell_{T_p}(S_p)$ である。従って、 $e_1(I) = e_0(I) - \ell_A(A/I) + 1$ であるための必要十分条件は、 $\mathfrak{m} \cdot S = (0)$ かつ $\text{rank}_B S = 1$ である。

(4) $S \neq (0)$ と仮定し、 $s = \text{depth}_T S$ とおく。このとき、 $s < d$ なら、 $\text{depth } G(I) = s - 1$ である。 S が Cohen-Macaulay T -加群であるための必要十分条件は、 $\text{depth } G(I) \geq d - 1$ が成り立つことである。

$S \neq (0)$ なら、函数 $\ell_A(S_n)$ の次数は $d - 1$ であって、 $d - 1$ 次の項の係数が補題 2.2 (1) によって $\ell_{T_p}(S_p)$ に等しいことに注意すれば、命題 2.2 (3) が従います。

補題 2.1 (2) と命題 2.2 (3) を組み合わせることによって直ちに、Northcott [No] と Huneke [H] による次の古典的な結果が得られることに注意しましょう。

系 2.3 ([H, No]). 一般に不等式 $e_1(I) \geq e_0(I) - \ell_A(A/I)$ が成り立つ。ここで等号

$$e_1(I) = e_0(I) - \ell_A(A/I)$$

が成立するための必要十分条件は、等式 $I^2 = QI$ が成り立つことである。このとき必ず $e_i(I) = 0$ ($2 \leq \forall i \leq d$) となる。

等式 $I^2 = QI$ が成り立てば、イデアル I の随伴次数環 $G(I)$ も fiber cone $F(I) = \bigoplus_{n \geq 0} I^n / \mathfrak{m} I^n$ も Cohen-Macaulay 環であり、 $d \geq 2$ なら、さらに Rees 代数 $R = \mathcal{R}(I)$ も Cohen-Macaulay 環であることが Huneke-Sally によって知られています。最近のことですが、与えられた Cohen-Macaulay/Gorenstein 局所環内にこのようなイデアル I が大量に含まれていることが、Corso-Polini や Corso-Polini-Vasconcelos [CP, CPV]、Wang [W] や後藤 - 松岡 - 高橋 [GMT] によって発見されています。

ですから、当然ながら次の興味は等式

$$e_1(I) = e_0(I) - \ell_A(A/I) + 1$$

が成り立つようなイデアル I の構造解析に移って行きます。次節で述べるように、この問題に関する最初の注目すべき結果は、J. Sally によって 1992 年に与えられました。

3 Sally の定理

Sally の定理を述べましょう。この定理の中で、 $B(-1)$ は、加群としては環 B そのものであるが、 $\{[B(-1)]_n = B_{n-1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ によって次数付けした（次数を -1 シフトした）次数付 B -加群を表しています。

定理 3.1 (Sally [S], Vasconcelos [V]). 次の 3 条件は互いに同値である。

- (1) 次数付 T -加群として $S \cong B(-1)$ である。
- (2) $e_1(I) = e_0(I) - \ell_A(A/I) + 1$ であって、 $d \geq 2$ なら $e_2(I) \neq 0$ である。
- (3) $I^3 = QI^2$ であって $\ell_A(I^2/QI) = 1$ である。

このとき以下の主張が正しい。

- (i) $d \geq 2$ なら $e_2(I) = 1$ である。
- (ii) $e_i(I) = 0$ ($3 \leq \forall i \leq d$) である。
- (iii) $\text{depth } G(I) \geq d - 1$ である。

この定理の証明の粗筋を述べて置きましょう。

証明. (1) $\Rightarrow$ (3) $S = TS_1$ であるから、補題 2.1 (4) より等式 $I^3 = QI^2$ が得られ、 $S_1 \cong B_0$ より $\ell_A(I^2/QI) = \ell_A(S_1) = 1$ が従う。 $\text{depth}_T S = d$ であるので、 $\text{depth } G(I) \geq d - 1$ である（命題 2.2 (4)）。 $d \geq 2$ と仮定しよう。すると

$$\ell_A(S_n) = \ell_A(B_{n-1}) = \binom{n+d-2}{d-1} = \binom{n+d-1}{d-1} - \binom{n+d-2}{d-2}$$

であるから、命題 2.2 (2) より、等式

$$\ell_A(A/I^{n+1}) = e_0(I) \binom{n+d}{d} - (e_0(I) - \ell_A(A/I) + 1) \binom{n+d-1}{d-1} + \binom{n+d-2}{d-2}$$

がすべて整数の $n \geq 0$ に対して成り立ち、 $e_2(I) = 1$ が従う。

(3) $\Rightarrow$ (1) $S = TS_1$ であって $\ell_A(S_1) = 1$ であるから、 $\mathfrak{m} \cdot S = (0)$ であり、全射 $\varphi: B(-1) \rightarrow S$ の存在が従う。 $\dim S = d$ であるので、 φ は同型である。

(2) $\Rightarrow$ (3) $m \cdot S = (0)$ であって $\text{rank}_B S = 1$ である。 $S_1 \neq (0)$ で $S_n = (0)$ ($n < 1$) であるので, $d = 1$ なら, S が B -free であることから, $S \cong B(-1)$ が従う。 $d = 2$ とする。 S は torsionfree B -加群 (cf. 命題 2.2 (1)) であって $S_1 \neq (0)$ であるので, 単射 $0 \rightarrow B(-1) \rightarrow S$ が得られる。これを短完全列

$$(E) \quad 0 \rightarrow B(-1) \rightarrow S \rightarrow C \rightarrow 0$$

に拡張し, 等式

$$\begin{aligned} \ell_A(S_n) &= \ell_A(B_{n-1}) + \ell_A(C_n) \\ &= (n+1) - (1 - \ell_A(C_n)) \end{aligned}$$

を得る。 $\dim_B C \leq 1$ であるから, $\ell_A(C_n)$ が十分大なる整数 $n \gg 0$ に対し定数 $\ell_A(C_n) = c$ であることに注目すれば, 命題 2.2 (2) から

$$\ell_A(A/I^{n+1}) = e_0(I) \binom{n+2}{2} - (e_0(I) - \ell_A(A/I) + 1) \binom{n+1}{1} + (1-c)$$

が得られ, $e_2(I) = 1 - c$ であることが従う。序文に述べたように, 成田によって $e_2(I) \geq 0$ であることが知られていて, 我々の場合には $e_2(I) \neq 0$ と仮定しているので, $1 - c > 0$ であり, $c = 0$ が直ちに従う。故に, B -加群 C は長さ有限であるが, depth を計算することより, 短完全列 (E) から $C = (0)$ が従う。故に $B(-1) \cong S$ である。

$d \geq 3$ とし, $d-1$ まで Sally の定理は正しいと仮定しよう。 $a = a_1$ はイデアル I の上表元になるように選びなおし (必要なら, 剰余体 $A/\mathfrak{m}$ を膨らませて, $A/\mathfrak{m}$ が無限体になるようにしておくことにしよう),

$$\bar{A} = A/(a), \quad \bar{I} = I/(a), \quad \bar{Q} = Q/(a)$$

とおくと, 上表元の性質より, 等式 $e_i(\bar{I}) = e_i(I)$ が $0 \leq i \leq d-1$ に対し成り立つ。故に

$$e_1(\bar{I}) = e_0(\bar{I}) - \ell_{\bar{A}}(\bar{A}/\bar{I}) + 1, \quad e_2(\bar{I}) \neq 0$$

が環 $\bar{A}$ 上でも成り立ち, 帰納法の仮定により等式 $\bar{I}^3 = \bar{Q} \cdot \bar{I}^2$ と $\ell_{\bar{A}}(\bar{I}^2/\bar{Q} \cdot \bar{I}) = 1$ が従う。一方で, やはり帰納法の仮定より, $\text{depth } G(\bar{I}) \geq (d-1) - 1 = d-2 > 0$ である。ここで登場するのが, Sally の technique と呼ばれる手法であって, 「 $\text{depth } G(\bar{I}) > 0$ であるから元 a は

super-regular (すなわち, 元 a のイデアル I に関する initial form $a^* = a \bmod I^2$ は $G(I)$ -正則) であり ([S], 証明は [HM, Lemma 2.2] 参照), 従って

$$\text{depth } G(I) \geq 2, \quad G(I)/a^*G(I) \cong G(\bar{I})$$

が成り立つという主張である。このいささか信じがたい (しかし正しい) 事実を用いると, 等式 $I^3 = QI^2$ と同型 $I^2/QI \cong \bar{I}^2/\bar{Q}\cdot\bar{I}$ が同時にかつ容易に従い, 主張 (3) が得られる。□

この証明には鍵が二つあって, 一つは $e_2(I) \geq 0$ という成田の結果であり, もう一つは Sally の technique です。どちらかといえば, 私には成田の結果の方がより重い役割を果たしているように思えますが, いかがでしょうか。

さて, それでは $e_2(I) = 0$ の時は何が起きているかということはその後多くの研究者の興味を引き, 沢山の関連する論文が書かれていますが, 16 年間に渡って未解決のままであって, [GNO1, GNO2] がこの問題に最終的な決着をつけたとすることができます。

4 主定理

では [GNO1, GNO2] の定理を述べましょう。

定理 4.1 ([GNO2]). 次の 3 条件は互いに同値である。

- (1) $e_1(I) = e_0(I) - \ell_A(A/I) + 1$ である。
- (2) $\mathfrak{m} \cdot S = (0)$ であって $\text{rank}_B S = 1$ である。
- (3) 次数付 T -加群として $S \cong (X_1, X_2, \dots, X_c)B$ である。ただし, $0 < c \leq d$ であって, $\{X_i\}_{1 \leq i \leq c}$ は 1 次独立な B_1 の元である。

このとき, 等式 $c = \ell_A(I^2/QI)$, $I^3 = QI^2$ が成り立ち, さらに次の主張が正しい。

- (i) $\text{depth } G(I) \geq d - c$ であって, $\text{depth}_T S = d - c + 1$ である。
- (ii) $c \geq 2$ なら, $\text{depth } G(I) = d - c$ である。

(iii) $c < d$ とする。このとき、すべての整数 $n \geq 0$ について等式

$$\ell_A(A/I^{n+1}) = e_0(I) \binom{n+d}{d} - e_1(I) \binom{n+d-1}{d-1} + \binom{n+d-c-1}{d-c-1}$$

が成り立つ。故に

$$e_i(I) = \begin{cases} 0 & \text{if } i \neq c+1, \\ (-1)^{c+1} & \text{if } i = c+1 \end{cases}$$

($2 \leq \forall i \leq d$) である。

(iv) $c = d$ とせよ。このとき、すべての整数 $n \geq 1$ について等式

$$\ell_A(A/I^{n+1}) = e_0(I) \binom{n+d}{d} - e_1(I) \binom{n+d-1}{d-1}$$

が成り立つ。故に $e_i(I) = 0$ ($2 \leq \forall i \leq d$) である。

例えば、 $e_1(I) = e_0(I) - \ell_A(A/I) + 1$ であって $e_2(I) \neq 0$ という Sally の定理 3.1 は、定理 4.1 の記号でいえば、 $d = 1$ であるかまたは $c = 1 < d$ の場合を議論していることになり、 $S \cong X_1 B \cong B(-1)$ 、 $d \geq 2$ なら $e_2(I) = 1$ であり、 $\text{depth } G(I) \geq d-1$ であることが分かります。

この定理の証明は二つに分解されます。一つは

定理 4.2 ([GNO1]). 次の 2 条件は互いに同値である。

- (1) $\mathfrak{m} \cdot S = (0)$ であって $\text{rank}_B S = 1$ である。
- (2) 多項式環 B 内に次数付イデアル $\mathfrak{a}$ ($\neq (0)$) が存在して、次数付 T -加群として $S \cong \mathfrak{a}$ である。

であり、もう一つは

定理 4.3 ([GNO2]). $e_1(I) = e_0(I) - \ell_A(A/I) + 1$ なら、等式 $I^3 = QI^2$ が成り立つ。

です。実際、この二つの主張が正しいことを認めれば、 $e_1(I) = e_0(I) - \ell_A(A/I) + 1$ のとき、Sally 加群 S は多項式環 B 内のイデアル $\mathfrak{a}$ と同型であり (定理 4.2)、そのイデアル $\mathfrak{a}$ は必ず 1 次式で生成される (補題 2.1 (4)、定理 4.3) からです。1 次式で生成されたイデアル $\mathfrak{a}$ に対し函数 $\ell_A(\mathfrak{a}_n)$ は非常に具体的に記述されますから、定理 4.1 の残りの部分が容易に従います。

定理 4.2 と 4.3 の証明を記録しておきます。ここで述べる定理 4.3 の証明は、大関君の努力により、原論文 [GNO2] の証明よりかなり簡単になっています。

定理 4.2 の証明. (1) $\Rightarrow$ (2) S が B -free なら, $S \cong B(-1)$ であるから, イデアル $\mathfrak{a}$ としては, $\mathfrak{a} = X_1 B$ と取ればよい. S は B -free ではないと仮定する. このとき, S は torsion-free B -加群 (cf. 命題 2.2 (1)) で $\text{rank}_B S = 1$ であるから, ある整数 $m \in \mathbb{Z}$ と環 B の次数付イデアル $\mathfrak{a}$ を見つけて, 次数付 B -加群として

$$S(-m) \cong \mathfrak{a}$$

となるようにすることができる. ここで S は B -free でないので, イデアル $\mathfrak{a}$ の高さ 1 の成分を削り落として, $\mathfrak{a} \subsetneq B$ であってかつ $\text{ht}_B \mathfrak{a} \geq 2$ であるように選びなおすことができる. さて, $S_1 = [S(-m)]_{m+1} \cong \mathfrak{a}_{m+1}$ であるので, $\mathfrak{a}_{m+1} \neq (0)$ である. $\mathfrak{a}$ は体 $k = A/\mathfrak{m}$ 上の多項式環 $B = k[X_1, X_2, \dots, X_d]$ 内の次数付イデアルであるから, $m+1 \geq 0$ である. もし $m+1 = 0$ ならば, $\mathfrak{a}_0 \neq (0)$ となって $\mathfrak{a} = B$ が従うので, 実は $m+1 \geq 1$, すなわち $m \geq 0$ であることが分かる.

$m = 0$ を示すため, Hilbert 関数を調べる. 短完全列

$$0 \rightarrow S(-m) \rightarrow B \rightarrow B/\mathfrak{a} \rightarrow 0$$

を見るに, $n \gg 0$ のとき

$$\begin{aligned} \ell_A(S_n) &= \ell_A(B_{m+n}) - \ell_A([B/\mathfrak{a}]_{m+n}) \\ &= \binom{m+n+d-1}{d-1} - \ell_A([B/\mathfrak{a}]_{m+n}) \end{aligned}$$

であって, 多項式 $\ell_A([B/\mathfrak{a}]_{m+n})$ は高々 $d-3$ 次 ($\dim B/\mathfrak{a} \leq d-2$ だからである) であってかつ

$$\binom{m+n+d-1}{d-1} = \binom{n+d-1}{d-1} + m \binom{n+d-2}{d-2} + (d-3 \text{ 次以下の項})$$

であることに注目すると, 命題 2.2 (2) より

$$\begin{aligned} \ell_A(A/I^{n+1}) &= e_0(I) \binom{n+d}{d} - (e_0(I) - \ell_A(A/I) + 1) \binom{n+d-1}{d-1} - m \binom{n+d-2}{d-2} \\ &\quad + (d-3 \text{ 次以下の項}) \end{aligned}$$

が従う. 故に $e_2(I) = -m$ であり, 成田の定理 (cf. [Na]) によって $-m \geq 0$ であること, すなわち $m \leq 0$ であることが分かり, $m = 0$ が得られる. 故に $S \cong \mathfrak{a}$ である. $\square$

定理 4.3 の証明. 次元 d についての帰納法で示す. $d = 1$ なら, Sally 加群 S は階数 1 の自由 B -加群であって (命題 2.2 (1)), $S_1 \neq (0)$ である (補題 2.1 (2)). 故に, 次数付 B -加群として $S \cong B(-1)$ であり, 等式 $I^3 = QI^2$ が従う (補題 2.1 (4)).

$d \geq 2$ で, 我々の定理 4.3 は $d - 1$ まで正しいと仮定しよう. 必要なら体 $k = A/\mathfrak{m}$ は無限体であると仮定してよいので, 一般性を失うことなく, 元 $a = a_1$ はイデアル I の上表元であると仮定することができる.

$$\bar{A} = A/(a), \quad \bar{I} = I/(a), \quad \bar{Q} = Q/(a)$$

とおく. すると, $e_i(\bar{I}) = e_i(I)$ ($0 \leq \forall i \leq d - 1$) であるから, $d - 1$ 次元の Cohen-Macaulay 局所環 $\bar{A}$ 上でも等式

$$e_1(\bar{I}) = e_0(\bar{I}) - \ell_{\bar{A}}(\bar{A}/\bar{I}) + 1$$

が成り立ち, 次元 d についての仮定から等式 $\bar{I}^3 = \bar{Q} \cdot \bar{I}^2$ が従う. ここでもしも $\text{depth } G(I) > 0$ ならば, 元 a のイデアル I に関する initial form $a \bmod I^2$ は $G(I)$ -正則となり, 等式 $\bar{I}^3 = \bar{Q} \cdot \bar{I}^2$ より等式 $I^3 = QI^2$ が直ちに従う.

$\text{depth } G(I) = 0$ と仮定しよう. すると, Sally の technique ([S], 証明は例えば [HM, Lemma 2.2] を参照) により, $\text{depth } G(\bar{I}) = 0$ である. 故に, d についての帰納法の仮定と定理 4.1 とにより

$$\ell_{\bar{A}}(\bar{I}^2/\bar{Q} \cdot \bar{I}) = d - 1$$

であることが分かり, $\bar{I}^2/\bar{Q} \cdot \bar{I}$ は I^2/QI の準同型像であるので

$$\ell_A(S_1) = \ell_A(I^2/QI) \geq d - 1$$

が得られる. ここで次数付 B -加群の同型

$$\varphi : S \rightarrow \mathfrak{a}$$

を一つ固定しよう. もちろん $\mathfrak{a}$ は多項式環 B の次数付イデアルである. すると

$$\ell_A(\mathfrak{a}_1) = \ell_A(S_1) \geq d - 1$$

であるので, このイデアル $\mathfrak{a}$ は $d - 1$ 本の 1 次独立な 1 次式 $X_1, X_2, \dots, X_{d-1}$ を含まなければならない. 今これを k -ベクトル空間 B_1 の基底 $X_1, \dots, X_{d-1}, X_d$ に拡大しておく. すると $B = k[X_1, X_2, \dots, X_d]$ であって, 環

$$B/(X_1, X_2, \dots, X_{d-1}) = k[X_d]$$

内で次数付イデアル $\mathfrak{a}/(X_1, X_2, \dots, X_{d-1})$ は必ず単項である。もし $\mathfrak{a} = (X_1, X_2, \dots, X_{d-1})$ なら, 確かに Sally 加群 S は 1 次式で生成され, 補題 2.1 (4) より等式 $I^3 = QI^2$ が従う。

$$\mathfrak{a}/(X_1, X_2, \dots, X_{d-1}) \neq (0)$$

と仮定しよう。すると

$$\mathfrak{a} = (X_1, X_2, \dots, X_{d-1}, X_d^\alpha)$$

($\alpha \geq 1$) と表されるはずである。ここで $\alpha = 1$ か $\alpha = 2$ であることに注意しよう (補題 2.1 (3))。定理 4.3 の証明を完成するためには, $\alpha = 1$ であることを示さなければならない。

$\alpha = 2$ と仮定し矛盾を導く。各 $1 \leq i \leq d$ に対し, $X_i = \overline{b_i t}$ ($b_i \in Q$) とする。ただし, $\overline{b_i t}$ は元 $b_i t \in T$ の多項式環 $B = T/\mathfrak{m}T$ への像を表す。すると $\{X_i\}_{1 \leq i \leq d}$ は B_1 の k -基底であるので, 等式

$$\mathfrak{a} = (\overline{b_1 t}, \overline{b_2 t}, \dots, \overline{b_{d-1} t}, \overline{(b_d t)^2}), \quad Q = (b_1, b_2, \dots, b_d)$$

が得られる。元 $f_i \in S_1$ ($1 \leq i \leq d-1$) と $f_d \in S_2$ を, $\varphi(f_i) = X_i$ ($1 \leq i \leq d-1$) と $\varphi(f_d) = X_d^2$ が成り立つように選び, 元 $z_i \in I^2$ ($1 \leq i \leq d-1$) と $z_d \in I^3$ を, $\{f_i\}_{1 \leq i \leq d-1}$ と f_d がそれぞれ $\{z_i t\}_{1 \leq i \leq d-1}$ と $z_d t^2$ の S 内での像であるように取る。そして, Sally 加群 S 内の関係式 $X_i f_1 = X_1 f_i$ ($1 \leq i \leq d-1$) と $X_d^2 f_1 = X_1 f_d$ に注目しよう。すなわち

$$b_i z_1 - b_1 z_i \in Q^2 I \quad (1 \leq i \leq d-1),$$

$$b_d^2 z_1 - b_1 z_d \in Q^3 I$$

である。すると

$$Q^3 = b_1 Q^2 + (b_2, b_3, \dots, b_{d-1})^2 \cdot (b_2, b_3, \dots, b_d) + b_d^2 Q$$

であるから, 元 $\tau_1 \in Q^2 I$, $\tau_2 \in (b_2, b_3, \dots, b_{d-1})^2 \cdot (b_2, b_3, \dots, b_d) I$, $\tau_3 \in QI$ を見つけて,

$$b_d^2 z_1 - b_1 z_d = b_1 \tau_1 + \tau_2 + b_d^2 \tau_3$$

と表すことが出来る。

さて, 等式

$$(1) \quad b_d^2(z_1 - \tau_3) = b_1(z_d + \tau_1) + \tau_2$$

を眺めよう。まず、列 $b_1, b_2, \dots, b_d$ は A -正則であるから

$$z_1 - \tau_3 \in (b_1) + (b_2, b_3, \dots, b_{d-1})^2$$

である。これより、 $z_1 \in (b_1) + QI$ が従うが、同じ議論を z_i に行うことにより、各 $1 \leq i \leq d-1$ について

$$(2) \quad z_i \in (b_i) + QI$$

であることが分かる。一方で、 $S_1 = \sum_{i=1}^{d-1} k f_i$ であることより $I^2 = QI + \sum_{i=1}^{d-1} A z_i$ が成り立つので、(2) より

$$I^2 \subseteq b_d I + (b_1, b_2, \dots, b_{d-1})$$

が従う。故に

$$I^3 \subseteq b_d^2 I + (b_1, b_2, \dots, b_{d-1})$$

であり、 $z'_d := z_d + \tau_1 \in I^3$ であるから、

$$z'_d = b_d^2 i + \rho$$

($i \in I, \rho \in (b_1, b_2, \dots, b_{d-1})$) と表すことができる。 $z'_1 := z_1 - \tau_3$ とおく。すると等式 (1) より

$$(3) \quad b_d^2 z'_1 = b_1 z'_d + \tau_2$$

が得られ、

$$z'_d = b_d^2 i + \rho \in (b_d^2) + (b_2, b_3, \dots, b_{d-1})^2$$

が従う。故に $\rho \in (b_d^2) + (b_2, b_3, \dots, b_{d-1})^2$ である。

$$\rho = b_d^2 \xi + \eta$$

($\xi \in A, \eta \in (b_2, b_3, \dots, b_{d-1})^2$) と表すと、その取り方から $\rho \in (b_1, b_2, \dots, b_{d-1})$ であったので、 $b_d^2 \xi \in (b_1, b_2, \dots, b_{d-1})$ となり、 $\xi \in (b_1, b_2, \dots, b_{d-1}) \subseteq I$ が得られる。ここで、等式 (3) から

$$b_d^2 (z'_1 - b_1 i - b_1 \xi) = b_1 \eta + \tau_2 \in (b_2, b_3, \dots, b_{d-1})^2$$

となることに注目すれば、 $z'_1 - b_1 i - b_1 \xi \in (b_2, b_3, \dots, b_{d-1})^2$ が得られるが、 $i, \xi \in I$ であるので $z'_1 \in QI$ となり、 $\tau_3 \in QI$ より $z_1 \in QI$ が従う。しかしながら $f_1 \neq 0$ であるので、これは不可能である。

□

5 応用

定理 4.1 の応用を述べます。

定理 5.1 ([GNO1], Theorem 1.2). $d \geq 2$ ならば, 次の 4 条件は互いに同値である。

(1) $\mathfrak{m} \cdot S = (0)$, $\text{rank}_B S = 1$, $\mu_B(S) = 2$ である。ここで $\mu_B(S)$ は B -加群 S の生成元の個数を表す。

(2) 次数付 B -加群の完全列

$$0 \rightarrow B(-2) \rightarrow B(-1) \oplus B(-1) \rightarrow S \rightarrow 0$$

が存在する。

(3) $e_1(I) = e_0(I) - \ell_A(A/I) + 1$, $e_2(I) = 0$, $\text{depth } G(I) \geq d - 2$ である。

(4) $I^3 = QI^2$, $\ell_A(I^2/QI) = 2$, $\mathfrak{m}I^2 \subseteq QI$, $\ell_A(I^3/Q^2I) < 2d$ である。

このとき, 次の主張が正しい。

(i) $\text{depth } G(I) = d - 2$ である。

(ii) $d \geq 3$ なら $e_3(I) = -1$ である。

(iii) $e_i(I) = 0$ ($4 \leq \forall i \leq d$) である。

(iv) $\ell_A(I^3/Q^2I) = 2d - 1$ である。

この結果は, $\mu_B(S) = 2$ の場合に, Sally の定理 3.1 の条件 (3) と同様なイデアル I の言葉だけによる特徴付 (4) を狙ったものですが, やはり定理 3.1 のようにはすっきりとは行きません。

次の結果はもう一方の極端な場合, すなわち $\text{depth}_T S = 1$ を満たすイデアル I の特徴付けです。ここで, $\tilde{I}$ はイデアル I の Ratliff-Rush 閉包

$$\tilde{I} = \bigcup_{n \geq 1} [I^{n+1} :_A I^n],$$

すなわち, イデアル I を含む (基礎環 A の) $\mathfrak{m}$ -準素イデアルであって, 等式 $e_i(\tilde{I}) = e_i(I)$ がすべての整数 $0 \leq i \leq d$ について成り立つような最大のものを表します。

$$\mathcal{R}'(I) := R[t^{-1}] \cong \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} I^n$$

とおきます。

定理 5.2 ([GNO1], Corollary 2.6). $d \geq 2$ ならば, 次の 3 条件は互いに同値である。

- (1) 次数付 T -加群として $S \cong B_+ := \sum_{n \geq 1} B_n$ である。
- (2) $e_1(I) = e_0(I) - \ell_A(A/I) + 1$ であって, $e_i = 0$ ($2 \leq \forall i \leq d$) である。
- (3) $\ell_A(\tilde{I}/I) = 1$, $\tilde{I}^2 = Q\tilde{I}$ である。

このとき, 次数付環 $G = G(I)$, $R = \mathcal{R}(I)$, $R' = \mathcal{R}'(I)$ はすべて Buchsbaum 環で, Buchsbaum 不変量に関する等式 $\mathbb{I}(G) = \mathbb{I}(R) = \mathbb{I}(R') = d$ が成り立つ。

次の例は, $d = 3$ で系 5.2 の条件を満たすイデアルの典型として, M. Rossi に教えてもらったものです。

例 5.3. x, y, z は 3-次元正則局所環 A の正則巴系とし,

$$I = (x^2 - y^2, x^2 - z^2, xy, yz, zx), \quad Q = (x^2 - y^2, x^2 - z^2, yz)$$

とおく。すると $\tilde{I} = \mathfrak{m}^2 = I + (z^2)$, $\ell_A(\tilde{I}/I) = 1$ が成り立つ。 $\mathfrak{m}^4 = Q\mathfrak{m}^2$ であるから, イデアル I は系 5.2 の条件 (3) を満たし, $e_1(I) = e_0(I) - \ell_A(A/I) + 1$, $e_2(I) = e_3(I) = 0$ が従う。次数付環 $G = G(I)$, $R = \mathcal{R}(I)$, $R' = \mathcal{R}'(I)$ はすべて Buchsbaum 環で, $\mathbb{I}(G) = \mathbb{I}(R) = \mathbb{I}(R') = 3$ である。

6 例

定理 4.1 を満たすようなイデアルが一般的に存在していることを述べておきます。

定理 6.1 ([GNO2]). $0 < c \leq d$ という整数の組 (c, d) を任意に与えれば, ある Cohen-Macaulay 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ と $\mathfrak{m}$ -準素イデアル I , および I の節減 $Q = (a_1, a_2, \dots, a_d)$ を見つけて,

$$d = \dim A, \quad e_1(I) = e_0(I) - \ell_A(A/I) + 1, \quad c = \ell_A(I^2/QI)$$

が成り立つようにすることができる。

具体例の構成は, 実は $c = d$ の時に構成すれば十分なので, この場合を記録しておきます。

さて $m, d > 0$ は整数とし

$$U = k[\{X_j\}_{1 \leq j \leq m}, Y, \{V_i\}_{1 \leq i \leq d}, \{Z_i\}_{1 \leq i \leq d}]$$

を体 k 上 $m + 2d + 1$ 個の不定元を持つ多項式環とする。

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} = & [(X_j \mid 1 \leq j \leq m) + (Y)] \cdot [(X_j \mid 1 \leq j \leq m) + (Y) + (V_i \mid 1 \leq i \leq d)] \\ & + (V_i V_j \mid 1 \leq i, j \leq d, i \neq j) + (V_i^2 - Z_i Y \mid 1 \leq i \leq d) \end{aligned}$$

とおき, $C = U/\mathfrak{a}$ と定め, X_j, Y, V_i, Z_i の環 C 内への像を x_j, y, v_i, a_i で表す。すると

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = (X_j \mid 1 \leq j \leq m) + (Y) + (V_i \mid 1 \leq i \leq d)$$

であるから, 等式 $\dim C = d$ が従う。次に, $M = C_+ := (x_j \mid 1 \leq j \leq m) + (y) + (v_i \mid 1 \leq i \leq d) + (a_i \mid 1 \leq i \leq d)$ (環 C の次数付極大イデアル) とし, Λ を $\{1, 2, \dots, m\}$ の任意の部分集合として

$$J = (a_i \mid 1 \leq i \leq d) + (x_\alpha \mid \alpha \in \Lambda) + (v_i \mid 1 \leq i \leq d), \mathfrak{q} = (a_i \mid 1 \leq i \leq d)$$

とおく。すると, $M^2 = \mathfrak{q}M$, $J^2 = \mathfrak{q}J + \mathfrak{q}y$, $J^3 = \mathfrak{q}J^2$ である。故に, $\mathfrak{q}$ は M と J に共通の節減であって, $a_1, a_2, \dots, a_d$ は次数付環 C の斉次巴系であることが分かる。

そこで

$$A = C_M, \quad I = JA, \quad Q = \mathfrak{q}A$$

と置くと, 次が成り立ち, I が求める例であることが従う。

定理 6.2. 次の主張が正しい。

- (1) A は Cohen-Macaulay 局所環で , $\dim A = d$ である。
- (2) 次数付 T -加群として $S \cong B_+$ であり , 従って $\ell_A(I^2/QI) = d$ である。
- (3) $e_0(I) = m + d + 2$ であり , $e_1(I) = \sharp\Lambda + d + 1$ である。
- (4) $e_i(I) = 0$ ($2 \leq \forall i \leq d$) である。
- (5) $G = G(I)$ は Buchsbaum 環であって , $\text{depth } G = 0$, $\mathbb{I}(G) = d$ である。

詳しい証明は [GNO2] をご覧下さい。

参考文献

- [CP] A. Corso and C. Polini, *Links of prime ideals and their Rees algebras*, J. Algebra, **178** (1995), 224-238.
- [CPV] A. Corso, C. Polini, and W. V. Vasconcelos, *Links of prime ideals*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **115** (1994), 431-436.
- [GMT] S. Goto, N. Matsuoka, and R. Takahashi, *On quasi-socle ideals of Gorenstein local rings*, preprint (2006)
- [GNO1] S. Goto, K. Nishida, and K. Ozeki, *Sally modules of rank one*, Michigan Math. J. (to appear).
- [GNO2] S. Goto, K. Nishida, and K. Ozeki, *The structure of Sally modules of rank one*, Mathematical Research Letters (to appear).
- [H] C. Huneke, *Hilbert functions and symbolic powers*, Michigan Math. J., Vol **34**, 1987, 293-318
- [HM] S. Huckaba and T. Marley, *Hilbert coefficients and the depths of associated graded rings*, J. London Math. Soc., **56** (1997), 64-76.
- [Na] M. Narita, *A note on the coefficients of Hilbert characteristic functions in semi-regular rings*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **59**, 1963, 269-275
- [No] D. G. Northcott, *A note on the coefficients of the abstract Hilbert function*, J. London Math. Soc., Vol **35**, 1960, 209-214
- [S] J. D. Sally, *Hilbert coefficients and reduction number 2*, J. Alg. Geo. and Sing., **1** (1992), 325-333.
- [V] W. V. Vasconcelos, *Hilbert Functions, Analytic Spread, and Koszul Homology*, Contemporary Mathematics, **159** (1994), 410-422.
- [W] H.-J. Wang, *Links of symbolic powers of prime ideals*, Math. Z., **256** (2007), 749-756.