構造系を持つ全行列多元環

藤田尚昌 (筑波大学)

1. 定義と研究の経緯

体 F 上の $n \times n$ 行列全体の集合 $\mathbb{M}_n(F)$ は n^2 個の行列単位 $\{e_{ij} \mid 1 \le i,j \le n\}$ を基底とする F-ベクトル空間 $\mathbb{M}_n(F) = \bigoplus_{1\le i,j\le n} Fe_{ij}$ になり

$$e_{ik} \cdot e_{lj} \quad = \quad \begin{cases} e_{ij} & \text{if } \ k = l \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で積を定めると，通常の全行列多元環になる。この積を n 個の $n \times n$ 行列の組 (= 構造系) $\mathbb{A}$ で退化させて新たな多元環を定義する。即ち

定義 ([9])： n 個の $n \times n$ 行列 $A_k = (a_{ij}^{(k)}) \in \mathbb{M}_n(F)$ $(k = 1, \dots, n)$ の組 $\mathbb{A} = (A_1, \dots, A_n)$ が次の 3 条件を満たすとする。

(A1) $a_{ij}^{(k)} a_{il}^{(j)} = a_{il}^{(k)} a_{kl}^{(j)}$ for all $1 \le i,j,k,l \le n$

(A2) $a_{ij}^{(i)} = a_{ij}^{(j)} = 1$ for all $1 \le i,j \le n$

(A3) $a_{ii}^{(k)} = 0$ whenever $i \ne k,\ 1 \le i,k \le n$

F-ベクトル空間 $A = \bigoplus_{1\le i,j\le n} Fe_{ij}$ に積を

$$e_{ik} \cdot e_{lj} \quad = \quad \begin{cases} a_{ij}^{(k)} e_{ij} & \text{if } \ k = l \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

により定める。このとき A は basic, associative, n^2 次元 F-多元環になる。この A を**構造系** $\mathbb{A}$ **を持つ全行列多元環** または $\mathbb{A}$**-full matrix algebra** という。

命題 1.1. (1) $1 = e_1 + \cdots + e_n$ は直交原始ベキ等元の和，ただし $e_i := e_{ii}$ $(1 \le i \le n)$

(2) A の Jacobson 根基は $J(A) := \bigoplus_{i\ne j} Fe_{ij}$ で $J(A)^n = 0$

(3) A の Gabriel quiver $\mathcal{Q}(A) = (\mathcal{Q}_0, \mathcal{Q}_1)$ は連結で loop を持たず，任意の点から点への矢は高々 1 本である。ここで $\mathcal{Q}_0 = \{1, \dots, n\}$ は点の集合で $\mathcal{Q}_1$ は次のように定まる矢の集合である。

$$j \to i \in \mathcal{Q}_1 \ :\Leftrightarrow\ e_i(J(A)/J(A)^2)e_j \ne 0 \ \Leftrightarrow\ i \ne j,\ a_{ij}^{(k)} = 0 \text{ for } {}^\forall k \ne i,j$$

(4) $e_1A, \dots, e_nA$ は非同型直既約 projectives, $D(Ae_1), \dots, D(Ae_n)$ は非同型直既約 injectives である。ただし $D(\ \ ) := \mathrm{Hom}_F(\ \ , F)$ とする。

典型的な例

以下，R は離散付値環，$\boldsymbol{\pi} = \pi R$ は R の極大イデアル，K は R の商体，$F := R/\pi R$ は剰余体とする。n^2 個の非負整数の組 $\{\lambda_{ij} \mid 1 \le i,j \le n\}$ が，$1 \le {}^\forall i,j,k \le n$ に対して

$$\lambda_{ii} = 0, \qquad \lambda_{ik} + \lambda_{kj} \ge \lambda_{ij}, \qquad \lambda_{ij} + \lambda_{ji} > 0 \quad \text{if} \quad i \ne j$$

を満たすとき $\mathbb{M}_n(K)$ の R-整環 $\Lambda = (\pi^{\lambda_{ij}} R)$ が作れる。この様な Λ を **tiled** R**-order** という。

例 1.2. $\mathbb{M}_n(K)$ 内の tiled R-order $\Lambda = (\pi^{\lambda_{ij}} R)$ に対して，$A := \Lambda/\pi\Lambda = \bigoplus_{1\le i,j\le n} F u_{ij}$ は

$$\{u_{ij} := \pi^{\lambda_{ij}} e_{ij} + \pi\Lambda \in A \mid 1 \le i, j \le n\}$$

を基底に持つ F-ベクトル空間となる。構造系 $\mathbb{A} = (A_1, \dots, A_n)$, $A_k = (a_{ij}^{(k)}) \in \mathbb{M}_n(F)$ を

$$a_{ij}^{(k)} := \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \lambda_{ik} + \lambda_{kj} = \lambda_{ij} \\ 0 & \text{if} \quad \lambda_{ik} + \lambda_{kj} > \lambda_{ij} \end{cases}$$

と定めると，剰余多元環 A の積は

$$u_{ik} \cdot u_{lj} := \begin{cases} a_{ij}^{(k)} u_{ij} & \text{if} \quad k = l \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定まり，A は $\mathbb{A}$-full matrix algebra である。

例 1.3. $\mathbb{M}_4(K)$ 内の tiled R-order

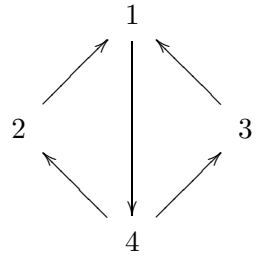
$$\Lambda = \begin{pmatrix} R & R & R & R \\ \boldsymbol{\pi} & R & \boldsymbol{\pi} & R \\ \boldsymbol{\pi} & \boldsymbol{\pi} & R & R \\ \boldsymbol{\pi} & \boldsymbol{\pi} & \boldsymbol{\pi} & R \end{pmatrix}$$

に対して，$\mathbb{A}$-full matrix algebra $A = \Lambda/\pi\Lambda$ の構造系 $\mathbb{A}$ は

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

で与えられ，A の Gabriel quiver は次のようになっている。

$\mathcal{Q}(A)$:



研究の経緯 $\mathbb{A}$-full matrix algebra 研究の経緯を３つ述べる。

(その１) 与えられた環 Q 上の $n \times n$ 行列全体のなす加法群 $\mathbb{M}_n(Q)$ に新しく積を定義して環を構成することは，古くから行われていた (例えば Kupisch [25, 26], Oshiro [27] を参照)。局所 QF 環 Q，$\sigma \in \mathrm{Aut}(Q)$，$c \in J(Q)$ が $\sigma(c) = c$, $\sigma(q)c = cq$ for $^{\forall}q \in Q$ 満たすとき $A = \mathbb{M}_n(Q)$ にある積を定めて QF-環になる歪行列環が構成できる (Baba-Oshiro [4], Theorem 6.1.4)。この (Q, σ, c) を $(F, \mathrm{id}, 0)$ に特殊化すると，A は hereditary R-order

$$\Lambda = \begin{pmatrix} R & R & \cdots & R \\ \boldsymbol{\pi} & R & \cdots & R \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{\pi} & \cdots & \boldsymbol{\pi} & R \end{pmatrix}$$

に対する例 1.2 の $\mathbb{A}$-full matrix algebra $\Lambda/\pi\Lambda$ と同型。一方，$\mathbb{A}$-full matrix algebra $\Lambda/\pi\Lambda$ が Frobenius 多元環となる tiled R-order Λ は hereditary R-order に限らず豊富にある (例えば

Kirichenko [23], Roggenkamp-Kirichenko-Khibina-Zhuravlev [31] を参照)。$\mathbb{A}$-full matrix algebra の構造系 $\mathbb{A}$ はこの種の Frobenius 多元環の記述法を与える。

(その２) R-order Λ のホモロジー代数的性質は $\Lambda/\pi\Lambda$ に帰着。例えば Λ-lattice L に対して

$$\mathrm{pd}_{\Lambda} L = \mathrm{pd}_{\Lambda/\pi\Lambda} L/\pi L, \qquad \mathrm{id}_{\Lambda} = \mathrm{id}_{\Lambda/\pi\Lambda} L/\pi L + 1$$

が成り立つ。特に，tiled R-orders は整環において有限次元多元環の path algebras に対応するものという認識から，ホモロジー代数的性質や表現型 (poset の表現の応用) が研究され難問も残っている ([6], [37], [38], [21], [22], [29], [30], [40], [32], [5], [24], [7], [33], [20], [8], [41], [42], [35], [18] を参照)。この研究において $\Lambda/\pi\Lambda$ の重要性はよく認識されているが理解は限定されている。

(その３) $\mathbb{A}$-full matrix algebras は monomial algebra でない有限次元多元環のまとまった例を提供する。ホモロジー代数予想は monomial algebras に対しては解決している (例えば [15], [43], [44] を参照)。Tiled R-orders Λ の剰余多元環 $\Lambda/\pi\Lambda$ はもっと調べられてもよいと Goodearl and Huisgen-Zimmermann [14] 等でも述べられている。$\mathbb{A}$-full matrix algebras はこの種の多元環の枠組みを与える。

2. 小さい n の場合

$n = 2$ のときは，明らかに構造系は $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ のみである。

$n = 3$ のときは，同型を除いて５個となるが，これを示すために次の定義を準備する。

定義： 任意の構造系 $\mathbb{A} = (a_{ij}^{(k)})$ に対して $\bar{\mathbb{A}} = (\bar{a}_{ij}^{(k)})$ を

$$\bar{a}_{ij}^{(k)} := \begin{cases} 1 & \text{if} \quad a_{ij}^{(k)} \neq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

により定めると $\bar{\mathbb{A}}$ も構造系になる。これを $\mathbb{A}$ の $(0,1)$-**limit** という。

定理 2.1([12])**.** $n = 3$ のとき，任意の $\mathbb{A}$-full matrix algebra はその $(0,1)$-limit に同型で，次の５個の $(0,1)$-構造系が同型類の完全代表系を定める。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$n = 4$ のときは，非同型 $(0,1)$-構造系は 289 個だが，F が無限体ならば同型類は無限個ある。

定理 2.2([12])**.** $n \geq 4$ のときは F の元をパラメーターとする非同型な系列がある。特に F が無限体ならば，同じ $(0,1)$-limit を持つ非同型な無限系列がある。

例 2.3. $0 \neq a \in F$ に対して

$$\mathbb{A}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

と定める。$\mathbb{A}(a)$-full matrix algebra $A(a)$ と $\mathbb{A}(b)$-full matrix algebra $A(b)$ に対して
$A(a) \cong A(b)$ as F-algebras $\Leftrightarrow$ $a = b$ or $a = b^{-1}$

命題 2.4. (同型判定法) $A,\ B$: $n \times n$ full matrix algebras with $\mathbb{A},\ \mathbb{B}$: 構造系とする。
$A \cong B$ as F-algebras $\Leftrightarrow$ $^{\exists}\sigma \in S_n,\ ^{\exists}T = (t_{ij}) \in \mathbb{M}_n(F)$ s.t. $t_{ij} \neq 0,\ t_{ii} = 1$

$$a^{(\sigma(k))}_{\sigma(i),\sigma(j)} t_{ij} = b^{(k)}_{ij} t_{ik} t_{kj}$$

3. Frobenius algebras

この節では，Frobenius $\mathbb{A}$-full matrix algebras を考察し，tiled R-orders との対応関係につて述べる。Frobenius algebras の定義の復習から始める。

定義： 有限次元 F-algebra B が **Frobenius**
$:\Leftrightarrow$ $^{\exists}\psi : B \to F$: F-linear map s.t. $\mathrm{Ker}\,\psi \not\supset$ non-zero right (or left) ideal
$(\Leftrightarrow$ $B \cong \mathrm{Hom}_F(B, F)$ as right B-modules $)$

(注) B が basic のときは，B : Frobenius $\Leftrightarrow$ B_B : injective $\Leftrightarrow$ ${}_BB$: injective
$\Leftrightarrow$ for $^{\forall}i$, $\mathrm{soc}(e_iB)$: simple, $\mathrm{soc}(e_iB) \ncong \mathrm{soc}(e_jB)$ if $i \neq j$
このとき，$^{\exists}\sigma \in S_n$ s.t. $\mathrm{soc}(e_iB) \cong \mathrm{top}(e_{\sigma(i)}B)$ (この σ を **Nakayama 置換**という)

$\mathbb{A}$-full matrix algebra 上の加群
$A = \bigoplus_{1 \leq i,j \leq n} Fe_{ij}$ を $\mathbb{A}$-full matrix algebra とする。有限生成右 A-加群 M_A に対して，M の *dimension type* $\underline{\dim}\, M := (d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{Z}^n$ を $d_i := \dim_F Me_i$ $(1 \leq i \leq n)$ により定める。

命題 3.1. $\mathbb{A}$-full matrix algebra A の Cartan 行列 C の各 (i,j)-成分は $\dim_F e_iAe_j = 1$ で，$\det C = 0$ となり $\mathrm{gl.dim}\, A = \infty$ が常に成り立つ。

M_A は右 A-加群で $\underline{\dim}\, M = (1, \ldots, 1)$ となるものとする。このとき M の F-基底 $\{v_1, \ldots, v_n\}$ で $v_ie_i = v_i$ となるものが取れて，$v_ie_{ij} = s_{ij}v_j$ $(s_{ij} \in F)$ と表せる。このとき $S = (s_{ij}) \in \mathbb{M}_n(F)$ を M の**表現行列**という。

命題 3.2. (1) $\underline{\dim}\, e_iA = (1, \ldots, 1)$ で，e_iA の表現行列は $(a^{(k)}_{ij})_{k,j} \in \mathbb{M}_n(F)$
(2) $\underline{\dim}\, D(Ae_j) = (1, \ldots, 1)$ で，$D(Ae_j)$ の表現行列は $(a^{(k)}_{ij})_{i,k} \in \mathbb{M}_n(F)$
(3) $\underline{\dim}\, M_A = (1, \ldots, 1)$ with $S = (s_{ij})$: 表現行列 のとき
(a) $M_A \cong e_iA \Leftrightarrow s_{ij} \neq 0$ for $^{\forall}j = 1, 2, \ldots, n$
(b) $M_A \cong D(Ae_j) \Leftrightarrow s_{ij} \neq 0$ for $^{\forall}i = 1, 2, \ldots, n$

例 3.3. 例 1.3 の tiled R-order から作った構造系

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

から e_1A, e_2A, e_3A, e_4A の表現行列を作ると次が分かる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$e_1A \cong D(Ae_4)$　　$e_2A \cong D(Ae_3)$　　$e_3A \cong D(Ae_2)$　　e_4A : non-injective

定理 3.4([9, 10, 11, 12])**.** $A = \bigoplus_{1 \le i,j \le n} Fe_{ij}$: $\mathbb{A}$-full matrix algebra に対して次が成り立つ。

(1) A : Frobenius $\Leftrightarrow$ $^{\exists}\sigma \in S_n$ s.t. $\sigma(i) \neq i$ for $^{\forall}i$, $a^{(k)}_{i,\sigma(i)} \neq 0$ for $1 \le {}^{\forall}i,k \le n$

(2) A : Frobenius $\Leftrightarrow$ $(0,1)$-limit $\bar{A}$: Frobenius

(3) $\mathbb{A} = (a^{(k)}_{ij})$: Frobenius $(0,1)$-構造系 $\Rightarrow$ $a^{(k)}_{ij} = a^{(j)}_{k,\sigma(i)}$ for $1 \le {}^{\forall}i,j,k \le n$

(4) A : Frobenius, σ : Nakayama 置換 のとき, F-linear map $\psi : A \to F$ は次で与えられる：

$$\psi(e_{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad j = \sigma(i) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Frobenius $(0,1)$**-構造系の見つけ方**

定理 3.4 (3) を用いて Frobenius $(0,1)$-構造系を見つけてみよう。最初に, $\sigma \in S_n$ s.t. $\sigma(i) \neq i$ for $^{\forall}i$ を与えておく。$T := \{(i,k,j) \in \mathbb{Z}^3 \mid 1 \le i,j,k \le n\}$ とおき, T の置換

$$\varphi : T \to T,\ (i,k,j) \mapsto (k,j,\sigma(i))$$

を定める。φ で T を $T = \bigsqcup_\alpha T_\alpha$ と φ-orbits 分解する。構造系の条件 (A2), (A3) を考慮して, φ-orbits を 3 種類に分ける。

$$\begin{aligned} I &= \cup\{T_\alpha \mid (i,i,j) \in T_\alpha \quad \text{for some } 1 \le i,j \le n\} \\ Z &= \cup\{T_\alpha \mid (i,k,i) \in T_\alpha \quad \text{for some } 1 \le i,k \le n \text{ with } i \neq k\} \\ X &= \cup\{T_\alpha \mid T_\alpha \not\subset I,\ T_\alpha \not\subset Z\} \end{aligned}$$

そして $\mathbb{A} = (a^{(k)}_{ij})$ を

$$a^{(k)}_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{if} \quad (i,k,j) \in I \\ 0 & \text{if} \quad (i,k,j) \in Z \\ a_\alpha & \text{if} \quad (i,k,j) \in T_\alpha \subset X \qquad (a_\alpha = 0 \text{ or } 1) \end{cases}$$

のように定める。構造系の条件 (A1) が成り立てば $\mathbb{A}$ は Frobenius $(0,1)$-構造系になる。

定理 3.5([10])**.** (1) $a_\alpha = 0$ for $^{\forall}T_\alpha \subset X$ のとき $\mathbb{A} = (a^{(k)}_{ij})$ は Frobenius $(0,1)$-構造系になる。

(2) 特に $\sigma = (1,2,\dots,n)$ と仮定する。$T_\alpha \subset X$ を 1 つ固定して, $a_\alpha = 1$, その他の $a_\beta = 0$ として $\mathbb{A} = (a^{(k)}_{ij})$ を定める。このとき

(a) n が偶数のときは, 常に $\mathbb{A}$ は Frobenius $(0,1)$-構造系である。

(b) $n = 2s+1$ が奇数のときは，$(s+1, 1, k) \in T_\alpha$ ならば $k \equiv s^2+1 \pmod{n}$ の場合のみ $\mathbb{A}$ は Frobenius $(0,1)$-構造系である。

定理 3.5 (2) のように 1 つの φ-orbit $T_\alpha \subset X$ で定まる構造系を**極小**構造系という。

Tiled R-orders との対応

任意の tiled R-order Λ に対して $A = \Lambda/\pi\Lambda$ はある $(0,1)$-構造系 $\mathbb{A}$ による $\mathbb{A}$-full matrix algebra である (例 1.2)。それでは逆に

逆の問題： 任意の $(0,1)$-構造系は対応する tiled R-order を持つか？

例 3.6. $n = 4$ のとき，次の $(0,1)$-構造系に対応する tiled R-order は存在しない。

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1&1&1&1 & 0&1&1&0 & 0&0&1&0 & 0&0&1&1 \\ 1&0&0&1 & 1&1&1&1 & 0&0&1&1 & 0&0&0&1 \\ 1&0&0&0 & 0&1&0&0 & 1&1&1&1 & 1&0&0&1 \\ 1&1&0&0 & 0&1&0&0 & 0&1&1&0 & 1&1&1&1 \end{pmatrix}$$

（注）$n = 4$ のとき，非同型な $(0,1)$-構造系は 289 個あるが，そのうち対応する tiled R-order を持たないものは 16 個ある。$n = 2, 3$ のときは，逆問題は成り立つ。

定義： Λ : **Gorenstein** R-order $:\Leftrightarrow$ $\mathrm{Hom}_R(\Lambda, R)$ は右 (または左) Λ-加群として projective

Gorenstein tiled R-orders は hereditary R-orders を含み，より多様性のある研究対象である (例えば Roggenkamp, Kirichenko 等の [31] や [18] の 7 章を参照)。次の命題は直ぐ分かる。

命題 3.7. Λ : Gorenstein tiled R-order $\Rightarrow$ $\Lambda/\pi\Lambda$: Frobenius $\mathbb{A}$-full matrix algebra

この命題 3.7 の逆問題は，次の定理により解決。

定理 3.8([10]) (1) $2 \le n \le 7$ の場合: 任意の Frobenius $\mathbb{A}$-full matrix algebras は対応する Gorenstein tiled R-order を持つ。

(2) $n \ge 8$ の場合: 対応する Gorenstein tiled R-order を持たない Frobenius $\mathbb{A}$-full matrix algebra が存在する。

(注) (1) は $2 \le n \le 7$ の Frobenius $\mathbb{A}$-full matrix algebras を全て求めて検証。(2) の Frobenius $\mathbb{A}$-full matrix algebra は極小構造系を持つものの中で見つけた。

4. Tiled orders of finite global dimension

Dedekind 整域 R の商体 K 上有限次元分離多元環の中の極大 R-整環 Λ は，可換 Dedekind 整域の非可換版とみなせる。$\mathrm{gl.dim}\,\Lambda = 1$ で可換の場合と同様の乗法的イデアル論が成り立つ。可換の場合は $\mathrm{gl.dim} = 1$ の整域が Dedekind 整域を特徴付けるのに対し，非可換の場合は極大 R-整環以外にも $\mathrm{gl.dim} = 1$ の hereditary R-整環が存在して，非可換固有の乗法的イデアル論など興味深い現象が知られている (例えば [19], [3], [16], [28] を参照)。

この研究に続いて「離散付値環上の整環で gl.dim 有限なものはどのくらいあるか？」が問題になった。Fields [6] は，任意の n に対し $\mathrm{gl.dim}\,\Lambda = n$ の tiled R-order Λ を見つけた。そして Tarsy [37], [38] と Jategaonkar [21], [22] により次の 2 定理が得られた。

定理 4.1(Tarsy 1971, Jategaonkar 1973).
$\Lambda = (\pi^{\lambda_{ij}} R)$: tiled R-order in $\mathbb{M}_n(K)$ s.t. $\lambda_{ij} = 0$ if $i \leq j$ に対して，次は同値。
(1) $\mathrm{gl.din}\,\Lambda < \infty$　　(2) $\mathrm{gl.dim}\,\Lambda \leq n-1$　　(3) $\Lambda \supset \Omega_n$　　ただし

$$\Omega_n := \begin{pmatrix} R & R & R & \cdots & R \\ \pi R & R & R & \cdots & R \\ \pi^2 R & \pi R & R & \cdots & R \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi^{n-1} R & \pi^{n-2} R & \pi^{n-3} R & \cdots & R \end{pmatrix}$$

定理 4.2(Jategaonkar 1974).
$\Lambda = (\pi^{\lambda_{ij}} R)$: tiled R-order in $\mathbb{M}_n(K)$, $\mathrm{gl.din}\,\Lambda < \infty \Rightarrow \lambda_{ij} \leq n-1$ for $1 \leq {}^{\forall} i, j \leq n$
従って，gl.dim 有限の tiled R-orders は n を固定すると同型を除いて有限個。

(注) 証明の鍵は $\Lambda/\pi\Lambda$ の任意の直既約 projectives の F-次元 $= n$ という事実。

この 2 定理により，gl.dim 有限の tiled R-orders の決定が期待され，次の予想も起きた。

Tarsy 予想： Λ : R-order in $\mathbb{M}_n(K)$, $\mathrm{gl.dim}\,\Lambda < \infty \Rightarrow \mathrm{gl.dim}\,\Lambda \leq n-1$?

大きい gl.dim **を持つ tiled** R**-orders**
Tarsy 予想は [7] で，任意の $n \geq 6$ に対して $\mathrm{gl.dim}\,\Lambda = n$ となる $\mathbb{M}_n(K)$ 内の tiled R-order Λ が見つかり解決した。しかし，n を固定したとき n が gl.dim 有限の最大値になるとは思えなかった。その後，Rump [33] により $n = 8$ のとき $\mathrm{gl.dim} = 9$ の例が見つかった。更に，Jansen-Odenthal [20] は，任意の偶数 $N \geq 8$ に対して $\mathrm{gl.dim} = 2N - 8$ となる例を見つけた。この gl.dim の計算は，$8 \leq N \leq 24$ は計算機による個別計算で検証し，帰納法は $N \geq 26$ から有効になるものであった。この様にいくつか例は見つかっているが，次の問題は未解決である。

Open Problem: $\mathrm{Max}\{\mathrm{gl.dim}\,\Lambda \mid \Lambda : \text{tiled } R\text{-order in } \mathbb{M}_n(K),\ \mathrm{gl.dim}\,\Lambda < \infty\} = ?$

これまでに見つかった大きい gl.dim を持つ tiled R-orders は，quasi-hereditary algebra と関連のある *neat primitive idempotent* で捉えると見通しが良くなることが [8] で明らかになった。

定義 (Ágoston-Dlab-Wakamatsu [1]**)：**
S : semiperfect Noetherian ring with Jacobson radical J, $e_n \in S$: primitive idempotent, $e := 1 - e_n$, V_S : simple with $Ve_n \neq 0$ とする。このとき
e_n : **neat** $:\Leftrightarrow \mathrm{Ext}^i_S(V, V) = 0$ for ${}^{\forall} i \geq 1$
$\Leftrightarrow$ $e_n J$ の極小射影分解に $e_n S$ が現れない
$\Leftrightarrow$ $Se \otimes_{eSe} eS \cong SeS$, $e_n J e_n = e_n SeSe_n$, $\mathrm{Tor}_i^{eSe}(Se, eS) = 0$ for ${}^{\forall} i \geq 1$

(注) 最後の同値条件から neat primitive idempotent の左右対称性が分かる。

Jansen-Odenthal の例は，neat primitive idempotent に注目して次のように改良できる。

例 4.3([8]**).** 任意の $n \geq 6$ に対して $\mathbb{M}_n(K)$ 内の tiled R-order Λ_n で $\mathrm{gl.dim}\,\Lambda_6 = \mathrm{gl.dim}\,\Lambda_7 = 5$, $\mathrm{gl.dim}\,\Lambda_n = 2n-8$ $(n \geq 8)$ となるものを，neat primitive idempotent を添加することにより帰納的に構成できる。(計算機による検証は不要)

例 4.4([8]**).** $n = 8$ のとき $\mathrm{gl.dim}\,\Lambda = 10$ となる tiled R-order Λ in $\mathbb{M}_8(K)$ がある。これから出発して neat primitive idempotents を添加して行くと，gl.dim が 例 4.3 を越えるものが作れる。

以上の様な例の考察から gl.dim 有限な tiled R-orders 決定に向け次の問題が起こった。

Questions: (1) $\mathrm{gl.dim}\,\Lambda < \infty \;\Rightarrow\; {}^{\exists}e_n \in \Lambda$: neat primitive idempotent ?

(注) これは Jategaonkar 予想 [22] の改良版。　より一般に,

(2) n に関して帰納的に gl.dim 有限の tiled orders を捉えられないか？
即ち，Λ : tiled R-order in $\mathbb{M}_n(K)$, $\mathrm{gl.dim}\,\Lambda < \infty$ ならば $\Lambda \cong \begin{pmatrix} \Lambda_1 & A \\ B & R \end{pmatrix}$ となる tiled R-order $\Lambda_1 \subset \mathbb{M}_{n-1}(K)$ with $\mathrm{gl.dim}\,\Lambda_1 < \infty$ があるか？

$\mathbb{A}$-full matrix algebras は，この Questions を肯定的に解決しようとした試みの中で考案した。この Questions には最近 [13] で反例が見つかったが，$\mathbb{A}$-full matrix algebra の議論が役立つ所が 1 箇所あり，全く無駄ではなかった。以下，この反例の解説をする。

剰余体 $F = R/\pi R$ の標数と $\mathrm{gl.dim}\,\Lambda$
Tiled R-orders $\Lambda = (\pi^{\lambda_{ij}} R)$ の $\mathrm{gl.dim}\,\Lambda$ は指数行列 (λ_{ij}) のみで決まるだろうか？
先に述べた大きい gl.dim を持つ tiled R-orders など知られている殆どの例では，gl.dim は指数行列のみで決まる。しかし Rump [33] は次の定理を示している。

定理 4.5(Rump 1996).
(1) $\Lambda = (\pi^{\lambda_{ij}} R)$ の gl.dim は指数行列 (λ_{ij}) と剰余体 $F = R/\pi R$ の標数のみで決まる。
(2) gl.dim が 2 以下のときは剰余体の標数に依存しない。

(注) gl.dim が F の標数に依存しない tiled R-order を **regular** という。語源は Matroid Theory で，(2) の証明に graph の matroid に関する簡単な事実 (例えば Tutte [39] を参照) が使われていることに由来する。gl.dim が 3 以上になると regular でない tiled R-order が現れる。

例 4.6(Rump, 1996). ${}^{\exists}\Lambda$: tiled R-order in $\mathbb{M}_{14}(K)$ s.t.

$$\mathrm{gl.dim}\,\Lambda = \begin{cases} 3 & \text{if } \mathrm{char}F \neq 2 \\ 4 & \text{if } \mathrm{char}F = 2 \end{cases}$$

(注) この例の原型は Spears [36] にある。Non-regular tiled R-orders はサイズが大きくなり，知られている例は限られている。標数に依存して gl.dim が有限無限の例は知られていなかった。

Questions の反例 ([13]) p : 素数, $n = 4p + 5$ のとき $^{\exists}\Lambda$: tiled R-order in $\mathbb{M}_n(K)$ s.t.

$$\mathrm{gl.dim}\,\Lambda = \mathrm{id}\,\Lambda = \begin{cases} 5 & \text{if } \mathrm{char}F \neq p \\ \infty & \text{if } \mathrm{char}F = p \end{cases}$$

(1) Λ は neat primitive idempotent を持たない。(注：極小射影分解の形が必要になる)

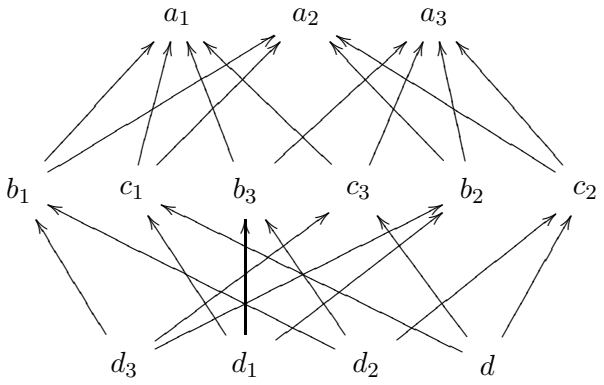
(2) Λ のどの primitive idempotent を削除しても gl.dim $= \infty$ の tiled R-order になる。
即ち，gl.dim 有限の tiled R-orders は n に関して帰納的に連なって現れることはない。

反例の具体的な形 p : a prime, $l := p + 1$, $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1)$: a quiver defined by

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_0 &:= \{a_i, b_i, c_i, d_i \mid 1 \leq i \leq l\} \cup \{d\} \\ \mathcal{P}_1 &:= \left\{ \begin{array}{ll} b_i \to a_i\ , & b_i \to a_{i+1} \\ c_i \to a_i\ , & c_i \to a_{i+1} \\ d_i \to c_i\ , & d_i \to b_{i+k} \\ d \to c_i & \end{array} \right\} \quad (1 \leq i \leq l,\ 1 \leq k \leq p) \end{aligned}$$

ただし a_i, b_i の添数 i は mod l で考える。$n = |\mathcal{P}_0| = 4p + 5$, $|\mathcal{P}_1| = p^2 + 7p + 6$ に注意。
この finite quiver $\mathcal{P}$ から対応する tiled R-order Λ を作る。

$p = 2$ のときは $n = 13$ で quiver $\mathcal{P}$ および対応する tiled R-order Λ は次のようになる。



$$\Lambda = \begin{pmatrix} R & \pi & \pi & \pi & \pi & \pi & \pi & \pi & \pi & \pi & \pi & \pi & \pi \\ \pi & R & \pi & \pi & \pi & \pi & \pi & \pi & \pi & \pi & \pi & \pi & \pi \\ \pi & \pi & R & \pi & \pi & \pi & \pi & \pi & \pi & \pi & \pi & \pi & \pi \\ R & R & \pi & R & \pi & \pi & \pi & \pi & \pi & \pi & \pi & \pi & \pi \\ R & R & \pi & \pi & R & \pi & \pi & \pi & \pi & \pi & \pi & \pi & \pi \\ \pi & R & R & \pi & \pi & R & \pi & \pi & \pi & \pi & \pi & \pi & \pi \\ \pi & R & R & \pi & \pi & \pi & R & \pi & \pi & \pi & \pi & \pi & \pi \\ R & \pi & R & \pi & \pi & \pi & \pi & R & \pi & \pi & \pi & \pi & \pi \\ R & \pi & R & \pi & \pi & \pi & \pi & \pi & R & \pi & \pi & \pi & \pi \\ R & R & R & R & \pi & R & \pi & \pi & R & R & \pi & \pi & \pi \\ R & R & R & \pi & R & R & \pi & R & \pi & \pi & R & \pi & \pi \\ R & R & R & R & \pi & \pi & R & R & \pi & \pi & \pi & R & \pi \\ R & R & R & \pi & R & \pi & R & \pi & R & \pi & \pi & \pi & R \end{pmatrix}$$

ただし Λ は vertices を $a_1, a_2, a_3, b_1, c_1, b_3, c_3, b_2, c_2, d_3, d_1, d_2, d$ の順に並べて作ってある。

Poset の表現圏を用いた極小射影分解の計算方法

一般にサイズが大きくなると tiled R-orders の極小射影分解は，前述の Jansen-Odenthal の gl.dim の計算からも推察できるように，複雑で計算不能になる。我々の反例では Rump [33] の poset の表現圏における射影分解に帰着する方法を微修正して，極小射影分解を計算する。

Poset の表現圏は Zavadskij-Kirichenko [41], [42], Roggenkamp-Wiedemann [32] により tiled R-orders の表現型の研究に導入され，後に de la Peña-Raggi-Cárdenas [5], Rump [33] により射影次元の計算にも使われるようになった。Poset の表現圏の復習から始める。([35], [2], [18] 参照)

定義： $(\Omega, \leq)$: poset, F : 体, $\mathsf{Vec}_F(\Omega)$: 次の objects と morphisms で定まる圏

objects $Y = (Y, \{Y(a)\}_{a\in\Omega})$, where Y : 有限次元 F-vector space,

$\{Y(a)\}_{a\in\Omega}$: Y の部分空間族 s.t. $a \leq b \Rightarrow Y(a) \supset Y(b)$

morphisms $f : Y \to Y'$: F-linear map s.t. $f(Y(a)) \subset Y'(a)$ for $^\forall a \in \Omega$

(注) $\mathsf{Vec}_F(\Omega)$ は additive category with kernels and cokernels だが，coimage $\subsetneq$ image で abelian category にはならない。

- $f : Y \to Y'$ が **strict** $:\Leftrightarrow$ $f(Y(a)) = f(Y) \cap Y'(a)$ for $^\forall a \in \Omega$
- $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$: **exact** in $\mathsf{Vec}_F(\Omega) :\Leftrightarrow$ $f(X) = \operatorname{Ker} g$, $f(X(a)) = \operatorname{Ker} g \cap Y(a)$ for $^\forall a \in \Omega$
- $D = \operatorname{Hom}_F(\ \ , F) : \mathsf{Vec}_F(\Omega) \to \mathsf{Vec}_F(\Omega^{\mathrm{op}})$ は duality を定める。ただし $Y \in \mathsf{Vec}_F(\Omega)$ に対して $D(Y)(a) := \{\alpha \in D(Y) \mid \alpha(Y(a)) = 0\}$ $(a \in \Omega)$ とする。

補題 4.7. (1) f : strict $\Rightarrow$ $D(f)$: strict が成り立つ。

(2) (**Snake Lemma** for $\mathsf{Vec}_F(\Omega)$)

$$\begin{array}{ccccccc} & & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \longrightarrow 0 \\ & & \alpha\downarrow & & \beta\downarrow & & \gamma\downarrow \\ 0 & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' \end{array}$$

rows exact, α, β, γ : strict ならば，次は $\mathsf{Vec}_F(\Omega)$ で exact

$$\operatorname{Ker}\alpha \to \operatorname{Ker}\beta \to \operatorname{Ker}\gamma \xrightarrow{\delta} \operatorname{Coker}\alpha \to \operatorname{Coker}\beta \to \operatorname{Coker}\gamma$$

- $P \in \mathsf{Vec}_F(\Omega)$: **projective** $:\Leftrightarrow {}^\forall X \xrightarrow{f} Y \to 0$: exact, $^\forall g : P \to Y$; $^\exists h : P \to X$ s.t. $g = f \circ h$
- $a \in \Omega$ に対して 1 次元 $P_a \in \mathsf{Vec}_F(\Omega)$ を $P_a := Fa$: F-vector space with a basis $\{a\}$

$$P_a(b) := \begin{cases} Fa & \text{if} \quad b \leq a \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad (b \in \Omega)$$

と定める。このとき P_a は projective in $\mathsf{Vec}_F(\Omega)$ である。

- $\mathsf{Vec}_F(\Omega)$ の **injectives** は duality D を用いて $\mathsf{Vec}_F(\Omega^{\mathrm{op}})$ の projectives の dual と定める。

以下，poset $(\Omega, \leq)$ は，与えられた tiled R-order $\Lambda = (\pi^{\lambda_{ij}} R)$ in $\mathbb{M}_n(K)$ に対して

$$\Omega := \mathbb{Z} \times \{1, \ldots, n\}, \qquad (k,i),(l,j) \in \Omega \text{ に対して，} (k,i) \leq (l,j) :\Leftrightarrow \lambda_{ij} \leq l - k$$

と定め，Ω の順序を保つ全単射 $\sigma : \Omega \to \Omega$, $(k,i) \mapsto (k+1, i)$ も組み込んだ **σ-poset** を扱う。

$Y \in \mathsf{Vec}_F(\Omega)$ が $Y(a) = Y,\ Y(b) = 0$ for some $a, b \in \Omega$ を満たすとき，Y は **bounded** という。$\mathsf{Vec}^0_F(\Omega)$ で bounded な Y からなる $\mathsf{Vec}_F(\Omega)$ の full subcategory を表す。

命題 4.8. $Y \in \mathsf{Vec}^0_F(\Omega)$ とする。各 $a \in \Omega$ に対して $Y_0(a) := \sum_{x>a} Y(x)$ と定める。

(1) $C := \{a \in \Omega \mid Y_0(a) \subsetneq Y(a)\}$ は有限集合

(2) $c \in C$ に対して $\mathrm{d}(c) := \dim_F Y(c)/Y_0(c),\ Y(c) = Y_0(c) \oplus \bigoplus_{i=1}^{\mathrm{d}(c)} Fv_i$ as F-vector spaces として $\varepsilon_c : P_c^{\mathrm{d}(c)} \to Y,\ \alpha_c = (\alpha_i c)_i \mapsto \sum_i \alpha_i v_i$ を定める。このとき F-linear map

$$\varepsilon : \bigoplus_{c \in C} P_c^{\mathrm{d}(c)} \to Y,\ (\alpha_c)_c \mapsto \sum_{c \in C} \varepsilon_c(\alpha_c)$$

は strict epimorhism in $\mathsf{Vec}_F(\Omega)$ になる。更に，任意の strict epimorphism $f : Q \to Y$ with projective $Q \in \mathsf{Vec}^0_F(\Omega)$ に対して，$f = \varepsilon \circ g$ となる strict epimorphism $g : Q \to P$ が存在する。

定義： 命題 4.8 の $\varepsilon : \bigoplus_{c \in C} P_c^{\mathrm{d}(c)} \twoheadrightarrow Y$ を $Y \in \mathsf{Vec}^0_F(\Omega)$ の **projective cover** という。

Λ-Lat を左 Λ-lattices の圏とする。σ-poset の表現圏は，離散付値環 R が特に形式的ベキ級数環 $F[[t]]$ のとき，次の関手により有効となる。即ち，$F[[t]] \subset \prod_{k \in \mathbb{Z}} Ft^k$ とみなして

$$L : \mathsf{Vec}^0_F(\Omega) \to \Lambda\text{-Lat}, \quad Y \mapsto L(Y) := \begin{pmatrix} \prod_{k \in \mathbb{Z}} Y(-k, 1)t^k \\ \vdots \\ \prod_{k \in \mathbb{Z}} Y(-k, n)t^k \end{pmatrix}$$

と定めると，$\mathsf{Vec}^0_F(\Omega)$ での projective covers による 極小射影分解が関手 L で Λ-Lat の極小射影分解に移る。例えば，1 次元表現 $P_{(k,i)} \in \mathsf{Vec}^0_F(\Omega)$ に対して $L(P_{(k,i)}) \cong \Lambda e_i$ となる。よって Λ-Lat での極小射影分解の計算は，$\mathsf{Vec}^0_F(\Omega)$ での線形代数に帰着される。

一般の離散付値環 R の場合は，剰余体 $F = R/\pi R$ 上の形式的ベキ級数環 $R' = F[[t]]$ で tiled R'-order $\Lambda' = (t^{\lambda_{ij}} R')$ を作る。Λ-Lat と Λ'-Lat の極小射影分解は $\mathbb{A}$-full matrix algebras $\Lambda/\pi\Lambda \cong \Lambda'/t\Lambda'$ を介して，形が同じになることが分かり $R = F[[t]]$ の場合に帰着する。

(注) 酒井洋介 [34] では σ-poset の表現圏を使わずに，加群の初等的な完全列を新たに作って，その応用として Λ-Lat の中で直接 Jacobson 根基の極小射影分解を計算している。

References

[1] I. Ágoston, V. Dlab and T. Wakamatsu, *Neat algebras*, Comm. Algebra 19 (1991), 433-442.

[2] D.M. Arnold, *Abelian groups and representations of finite partially ordered sets*, CMS Books in Mathematics, Springer, 2000.

[3] M. Auslander and O. Goldman, *Maximal orders*, Trans. Amer. Math. Soc. 97 (1960), 1-24.

[4] Y. Baba, K. Oshiro, *Classical Artinian rings and related topics*, 2007.

[5] J. A. de la Peña, A. Raggi-Cárdenas, *On the global dimension of algebras over regular local rings*, Illinois J. Math. 32 (3) (1988), 520-533.

[6] K. L. Fields, *Examples of orders over discrete valuation rings*, Math. Z. 111 (1969), 126-130.

[7] H. Fujita, *Tiled orders of finite global dimension*, Trans. Amer. Math. Soc. 322 (1990), 329-341; Erratum: Trans. Amer. Math. Soc. 327 (1991), 919-920.

[8] H. Fujita, *Neat idempotents and tiled orders having large global dimension*, J. Algebra 256 (2002), 194-210.

[9] H. Fujita, *Full matrix algebras with structure systems*, Colloq. Math. 98 (2003), 249-258.

[10] H. Fujita, Y. Sakai, *Frobenius full matrix algebras and Gorenstein tiled orders*, Comm. Algebra 34, (2006), 1181-1203.

[11] H. Fujita, Y. Sakai, D. Simson, *On Frobenius full matrix algebras with structure systems*, Algebra and Discrete Math. No. 1 (2007), 24-39.

[12] H. Fujita, Y. Sakai, D. Simson, *Minor degenerations of the full matrix algebra over a field*, J. Math. Soc. Japan 59 (2007), 763-795.
[13] H. Fujita, A. Oshima, *A tiled order of finite global dimension with no neat primitive idempotent*, to appear in Comm. Algebra.
[14] K. R. Goodearl and B. Huisgen-Zimmermann, *Repetitive resolutions over classical orders and finite dimensional algebras*, Algebras and Modules II (Geiranger, 1996), CMS Conf. Proc. 24, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1998), 205–225.
[15] E.L. Green, E.E. Kirkman, J.J. Kuzmanovich, *Finitistic dimension of finite dimensional monomial algebras*, J. Algebra 136 (1991), 37-51.
[16] M. Harada, *Hereditary orders*, Trans. Amer. Math. Soc. 107 (1963), 273-290.
[17] M. Hazewinkel, N. Gubareni, V.V. Kirichenko, *Algebras, Rings and Modules*, vol. 1, Math. and its applications, Kluwer Academic Publishers, 2004.
[18] M. Hazewinkel, N. Gubareni, V.V. Kirichenko, *Algebras, Rings and Modules*, vol. 2, Math. and its applications, Springer, 2007.
[19] N. Jacobson, *The Theory of Rings*, Mathematical Surveys Number II, Amer. Math. Soc., 1943.
[20] W. S. Jansen, C. J. Odenthal, *A tiled order having large global dimension*, J. Algebra 192 (1997), 572-591.
[21] V. A. Jategaonkar, *Global dimension of triangular orders over a discrete valuation ring*, Proc. Amer. Math. Soc. 38 (1973), 8-14.
[22] V. A. Jategaonkar, *Global dimension of tiled orders over a discrete valuation ring*, Trans. Amer. Math. Soc. 196 (1974), 313-330.
[23] V.V. Kirichenko, *On quasi-Frobenius rings and Gorenstein orders*, Trudy Mat. Steklov Inst. 148 (1978), 168-174 (in Russian), English translation in Proc. Steklov Inst. Math. (1980) Issue 4, 171-177.
[24] E. Kirkman, J. Kuzmanovich, *Global dimension of a class of tiled orders*, J. Algebra 127 (1989), 57-72.
[25] H. Kupisch, *Über eine Klasse von Ringen mit Minimalbedingung I*, Arch. Math. 17 (1966), 20-35.
[26] H. Kupisch, *Über eine Klasse von Artin-Ringen II*, Arch. Math. 26 (1975), 23-35.
[27] K. Oshiro, *Structure of Nakayama rings*, Proc. 20th Symp. Ring Theory, Okayama (1987), 109-133.
[28] I. Reiner, *Maximal orders*, Academic Press, 1975.
[29] K.W. Roggenkamp, *Some examples of orders of global dimension two*, Math. Z. 154 (1977), 225-238.
[30] K. W. Roggenkamp, *Orders of global dimension two*, Math. Z. 160 (1978), 63-67.
[31] K.W. Roggenkamp, V.V. Kirichenko, M.A. Khibina, V.N. Zhuravlev, *Gorenstein tiled orders*, Comm. Algebra 29 (2001), 4231-4247.
[32] K. W. Roggenkamp, A. W. Wiedemann, *Auslander-Reiten quivers of Schurian orders*, Comm. Algebra 12 (1984), 2525-2578.
[33] W. Rump, *Discrete posets, cell complexes, and the global dimension of tiled orders*, Comm. Algebra 24 (1996), 55-107.
[34] Y. Sakai, *An elementary exact sequence of modules with an application to tiled orders*, Colloq. Math. 113 no. 2 (2008), 307-318.
[35] D. Simson, *Linear representations of partially ordered sets and vector space categories*, Algebra, Logic and Applications, vol. 4, Gordon & Breach Science Publishers, 1992.
[36] W.T. Spears, *Global dimension in categories of diagrams*, J. Algebra 22 (1972), 219-222.
[37] R. B. Tarsy, *Global dimension of orders*, Trans. Amer. Math. Soc. 151 (1970), 335-340.
[38] R. B. Tarsy, *Global dimension of triangular orders*, Proc. Amer. Math. Soc. 28(2) (1971), 423-426.
[39] W.T. Tutte, *Introduction to the theory of matroids*, Amer. Elsevier Publ. Comp., Inc. New York, 1971.
[40] A. Wiedemann, K. W. Roggenkamp, *Path orders of global dimension two*, J. Algebra 80 (1983), 113-133.
[41] A. G. Zavadskij, V. V. Kirichenko, *Torsion-free modules over primary rings*, Zap. Nauchn. Sem. LOMI im. V.A. Steklova AN SSSR 57 (1976), 100-116 = J. Soviet Math. (1979), 598-612.
[42] A. G. Zavadskij, V. V. Kirichenko, *Semimaximal rings of finite type*, Mat. Sbornik, 103 (1977), 323-345.
[43] B. Zimmermann Huisgen, *Homological domino effects and the first finitistic dimension conjecture*, Invent. Math. 108 (1992), 369-383.
[44] B. Zimmermann Huisgen, *The finitistic dimension conjectures - a tale of 3.5 decades*, in "Abelian Groups and Modules", A. Facchini and C. Menini(eds.), Kluwer Academic Publ. (1995), 501-517.