

虚数乗法をもつ楕円曲線の p 進ポリログと p 進 L 関数

坂内健一（慶應義塾大学理工学部）

ポリログ層とは、Beilinson-Deligne によって $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ の場合に定義された motivic な混合層である。この混合層の周期関数が古典的なポリログ関数や Dirichlet L 関数の特殊値などに関係することから、ポリログ層は Beilinson 予想、 p 進 Beilinson 予想や玉河数予想など、motivic な元と L 関数の特殊値の関係を予測する数論幾何の予想を証明する上で大事な役割を果たして来た。楕円曲線に対して Beilinson-Levin に [BL] によってポリログ層の楕円曲線類似が構成され、この構成方法はその後アーベル多様体の場合（Wildeshaus [W], Kings [K1]）や混合志村多様体の場合（Wildeshaus [W]）にも拡張された。これら抽象的に定義されたポリログ層を具体的に書き下し、 L 関数との関係を調べることは、Beilinson 予想への応用という観点から非常に興味深い問題である。

この原稿では、ポリログの理論についての概要を解説し、最後に楕円ポリログの具体的な記述に関する小林真一氏（名大多元数理）と辻雄氏（東大数理）との共同研究 [BKT] の内容、特に楕円ポリログ関数がみたす具体的な微分方程式の形を紹介する。

2008 年度の代数学シンポジウムで講演の機会をいただき、整数論プログラム責任者の雪江明彦さん、志甫淳さん、会場責任者の大西良博さん、尾台喜孝さん、代数学分科会責任評議員の栗原将人さんを始めとして、関係者の皆様に深く感謝いたします。

§ 1. はじめに

まず最初に古典的なポリログ関数の説明から始める。整数 $k \geq 0$ を考える。古典的なポリログ関数は、単位円板 $|t| < 1$ 上では

$$\mathrm{Li}_k(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n^k}$$

という冪級数で表される関数である。冪級数表示から微分は

$$d\mathrm{Li}_{k+1}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n^k} dt = \mathrm{Li}_k(t) \frac{dt}{t}$$

となることが示される。このことからポリログ関数は

$$\mathrm{Li}_{k+1}(t) = \int_0^t \mathrm{Li}_k(s) \frac{ds}{s}$$

という反復積分表示を持ち、 $k = 0$ のときは

$$\mathrm{Li}_0(t) = \sum_{n=1}^{\infty} t^n = \frac{t}{1-t}$$

という $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ 上の有理関数で表されることから、上の反復積分表示は $\mathrm{Li}_k(t)$ の全平面への多価関数としての解析接続を与えている。

ポリログ関数が、Beilinson 予想や玉河数予想など、ゼータ関数や L 関数の特殊値にまつわる研究で重要な役割を果たすようになったのは、この関数が実は motivic なものの周期関数として解釈されたからである。

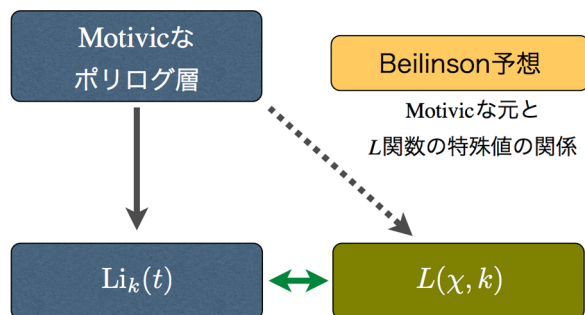
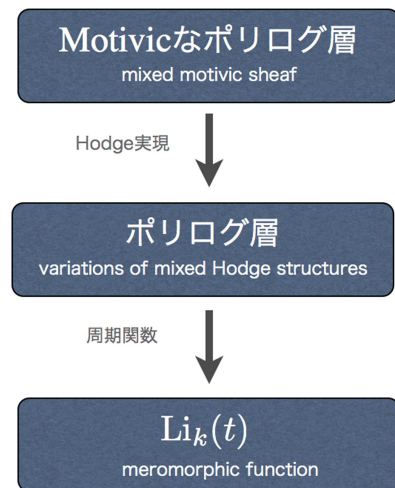
具体的には最初に Deligne によって、ポリログ関数は『**ポリログ層**』と呼ばれる $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ 上に定義される混合 Hodge 構造の変形 (variations of mixed Hodge structures) の周期関数として解釈された。さらに、Beilinson と Deligne によって、ポリログ層は混合 motivic 層の Hodge 実現として解釈できることが示された。ポリログ層が motivic な層の実現と解釈できる理由は、良い混合層の理論があれば、ポリログ層の構成は各混合層の特殊性に関わらず定義できるからである。

ポリログ関数に $t = 1$ を代入すると、 $k > 1$ に対して

$$\mathrm{Li}_k(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \zeta(k)$$

となる。このことから、ポリログ関数はゼータ関数の特殊値と関係づけることが導かれる。より一般的に、ポリログ関数の 1 の冪根での値をうまく足し合わせると、有限指標 $\chi: (\mathbb{Z}/N)^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ に付随する Dirichlet L 関数の特殊値 $L(\chi, k)$ を記述できることが知られている。

数論幾何の重要な予想である『Beilinson 予想』は、代数体上定義された代数多様体 (より一般的には motive) の L 関数の特殊値が motivic な元で記述できると予測している。Beilinson と Deligne の結果は、Dirichlet L 関数の特殊値と関係するポリログ関数を、motivic な混合層の実現として解釈した。この事実を用いると、Dirichlet motive (L 関数が Dirichlet L 関数となる motive) の Beilinson 予想を証明することが可能となる [HW]。ポリログ層は Huber-Kings [HK2] による Dirichlet motive の玉河数予想の証明においても重要な役割を果たした。



ポリログ層の構成は Beilinson と Levin [BL] によって、楕円曲線の場合に拡張された。Motivic な楕円ポリログを用いると、Deninger による虚 2 次体に付随する Hecke 指標の Beilinson 予想の証明 [D1][D2] の別証明を与えることが可能である。楕円ポリログは G. Kings [K2] によって虚数乗法をもつ楕円曲線の玉河数予想の証明にも用いられた。

小林真一氏（名大多元数理）と辻雄氏（東大数理）との共同研究を通して、楕円ポリログの p 進実現について以下の結果を得た。 K を虚 2 次体として、 E を K 上定義される楕円曲線で、 $\mathcal{O}_K$ で虚数乗法をもち、素数 $p \geq 5$ で good reduction を持つと仮定する。このとき、

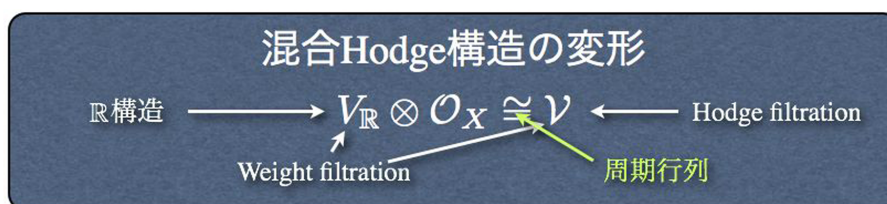
- 楕円ポリログの p 進実現を具体的に決定した。
- 楕円曲線が p で good ordinary reduction をもつとき、楕円ポリログの p 進実現を等分点に制限したものが、この楕円曲線の 2 変数 p 進 L 関数の特殊値と関係することを証明した。

詳しい結果は [BKT] Theorem 4.23 に述べられている。Motivic な楕円ポリログの p 進実現が p 進 L 関数の特殊値と関係づけられることが証明できたことから、この結果を用いて、虚数乗法をもつ楕円曲線や虚 2 次体に付随する Hecke 指標に対して、Beilinson 予想の p 進類似（ p 進 Beilinson 予想）が証明できることを期待している。

§ 2. ポリログ層と混合 Hodge 構造の変形

古典的なポリログ層は $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ 上の混合 Hodge 構造の変形の逆極系として与えられる。ここでは混合 Hodge 構造の変形はどういうものかを述べ、ポリログ層の具体的な形を記述する。

$\mathbb{C}$ 上の smooth な代数多様体 X が与えられたとき、 X 上の混合 Hodge 構造の変形は、 X 上の $\mathbb{R}$ -local system $V_{\mathbb{R}}$ と X 上の平坦接続付きな coherent $\mathcal{O}_X$ -module $\mathcal{V}$ の組で、平坦接続付き加群として $V_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{O}_X \cong \mathcal{V}$ となる様なもので、 $V_{\mathbb{R}}$ と $\mathcal{V}$ には weight filtration $W_{\bullet}$ 、 $\mathcal{V}$ には Hodge filtration $F^{\bullet}$ が与えられており、各点に引き戻すと混合 Hodge 構造となっているものである。



両辺の自然な基底を選ぶと同型 $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{O}_X \cong \mathcal{V}$ は各成分が $\mathcal{O}_X$ に値を持つ行列で書くことができる。この行列を混合 Hodge 構造の周期行列と呼ぶ。

$X = \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ 上のポリログ層

$$\text{pol}: P_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{O}_X \cong \mathcal{P}$$

に対する $X = \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ の (pro)-coherent $\mathcal{O}_X$ -module $\mathcal{P}$ は

$$\mathcal{P} = \prod_{k \geq 0} \mathcal{O}_X e_k$$

として与えられ、平坦接続は

$$\begin{aligned} \nabla(e_0) &= e_1 \otimes \frac{t}{t-1} \cdot \frac{dt}{t} \\ \nabla(e_k) &= -e_{k+1} \otimes \frac{dt}{t}, \quad (k \geq 1) \end{aligned}$$

として与えられる。Hodge filtration は

$$F^{-m}(\mathcal{P}) = \prod_{k=0}^m \mathcal{O}_X e_k,$$

weight filtration は

$$W_{2a}(\mathcal{P}) = \prod_{k \geq -a} \mathcal{O}_X e_k$$

によって与えられる。 $(\gamma_k)_{k \geq 0}$ をポリログ層の $\mathbb{R}$ -local system $P_{\mathbb{R}}$ の基底とすると、ポリログ層の周期行列は

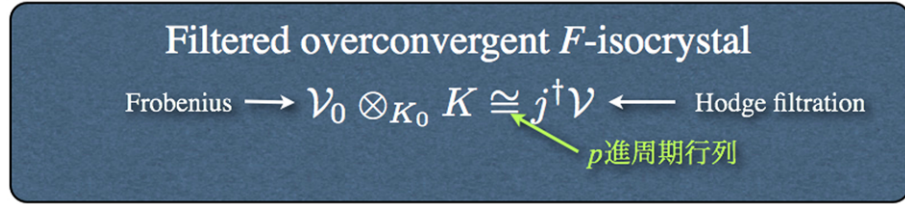
$$\begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \text{Li}_1(t) & \text{Li}_2(t) & \text{Li}_3(t) & \cdots \\ 0 & 2\pi i & 2\pi i \log(t) & 2\pi i \frac{\log^2(t)}{2!} & \cdots \\ 0 & 0 & (2\pi i)^2 & (2\pi i)^2 \log(t) & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & (2\pi i)^3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

によって与えられる。即ち、ポリログ層の平坦接続付き coherent $\mathcal{O}_X$ -module $\mathcal{P}$ の基底 e_k を用いて、 $\mathbb{R}$ -local system $P_{\mathbb{R}}$ の基底を記述する行列を書き下すと、成分にポリログ関数 $\text{Li}_k(t)$ が出てくるという仕組みになっている。

以上の構成は一見 ad hoc に見えるかもしれないが、上で描写されたポリログ層はコホモロジー理論的に極めて束縛性のある特徴付けを持っている。ポリログ層が motivic に構成できる理由はここにある。

ポリログ層の p 進実現も似た様な描写がある。混合 Hodge 構造の変形の p 進類似として、filtered overconvergent F -isocrystal (当初は syntomic coefficient と呼んでいた) というものを用いる。 K を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大として、 $\mathcal{O}_K$ を K の整数環とする。 k を $\mathcal{O}_K$ の剰余体、 K_0 を K の中での $\mathbb{Q}_p$ の最大不分岐拡大体とする。 X を $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ 上 smooth で finite type な scheme として、smooth なコンパクト化 $X \hookrightarrow \bar{X}$ を持つとする。さらに $D := \bar{X} \setminus X$ は $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ 上 strict normal crossing な divisor であると仮定する。

$X_K := X \otimes K$, $X_k := X \otimes k$ とする。混合 Hodge 構造の変形が平坦接続付き coherent module と local system の 2 つの情報を足し合わせたものであったのと似たような感じで、filtered overconvergent F -isocrystal とは X_k 上 K_0 係数の overconvergent isocrystal $\mathcal{V}_0$ と、 X_K 上の平坦接続付き coherent module $\mathcal{V}$ の組で、 $j^\dagger \mathcal{V}$ を $\mathcal{V}$ に付随する overconvergent isocrystal としたとき同型 $\mathcal{V}_0 \otimes_{K_0} K \cong j^\dagger \mathcal{V}$ が与えられ、 $\mathcal{V}$ には Hodge filtration $F^\bullet$ 、 $\mathcal{V}_0$ には Frobenius 自己同型 $\Phi : \mathcal{V}_0 \rightarrow \mathcal{V}_0$ が与えられている様なものである ([Ba2] Definition 4.1)。



$\mathcal{V}$ の基底を用いてフロベニウスの作用を記述した表現行列が、周期行列の p 進類似である。 $X = \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}_{/\mathbb{Z}_p}$ としたとき、古典ポリログの p 進実現は、平坦接続付き (pro-) coherent module $\mathcal{P}$ の方は Hodge 実現の場合と同じものが与えられ、Frobenius 作用 Φ は

$$\Phi \begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \ell_1^{(p)}(t) & \ell_2^{(p)}(t) & \ell_3^{(p)}(t) & \cdots \\ 0 & p & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & p^2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & p^3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

によって与えられている ([Ba1] Theorem 2)。ただしここで $\ell^{(p)}(t)$ は p 進ポリログ関数と呼ばれる、 $\mathbb{C}_p$ の単位円板 $\{t \in \mathbb{C}_p \mid |t|_p < 1\}$ 上は冪級数

$$\ell_k^{(p)}(t) := \sum_{(n,p)=1} \frac{t^n}{n^k}$$

で与えられる p 進の rigid 解析関数である。この関数は

$$\begin{aligned} d\ell_{k+1}^{(p)}(t) &= \ell_k^{(p)}(t) \frac{dt}{t} \quad (k \geq 0) \\ \ell_0^{(p)}(t) &= \frac{t}{1-t} - \frac{t^p}{1-t^p} \end{aligned}$$

という p 進微分方程式をみたしている。

§ 3. Motive と混合層

ここではポリログ層が motivic 混合層として解釈できる、ということの意味を解説する。Motivic な混合層の理論は現時点完全な形で数学的に厳密に構成されているも

のではない。しかしながら、そういう理論の存在を仮定すると様々な事柄が見通し良く説明できるようになり、また、新しい数学的事実も予見できるようになる。こうして予見された結果は、motivic な混合層の理論そのものを用いなくても直接証明できる場合も多い。Motive の理論は、数学的に厳密に構成されていない事柄があるにも関わらず、多くの証明可能な数学的事実を予想できるということで重要な役割を果たしている。

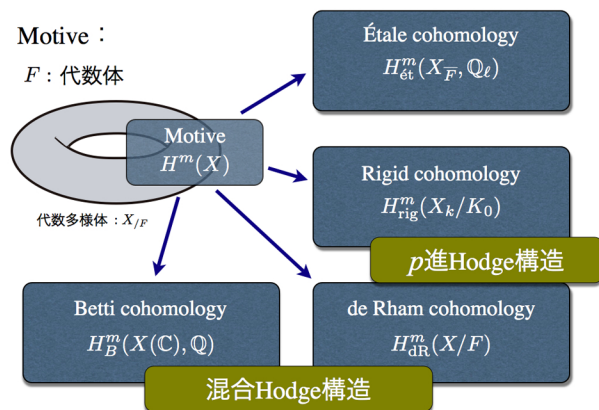
F を代数体として、 X を F 上の smooth な代数多様体とする。このとき、 X に対して次の様に様々な cohomology 群が定義される。

- $F \hookrightarrow \mathbb{C}$ という埋め込みを通して、 $X(\mathbb{C})$ を複素多様体とみなしたときの Betti cohomology $H_B^m(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$.
- X の F 上の de Rham cohomology $H_{\text{dR}}^m(X/F)$.
- F の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して $K = F_{\mathfrak{p}}$ として、 X の $\mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}$ 上のモデルを取り、 $\mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}$ の剰余体 k へ引き戻した k 上の代数多様体 X_k の rigid cohomology $H_{\text{rig}}^m(X/K_0)$.
- F の代数閉包を $\bar{F}$ としたとき、 $X_{\bar{F}} := X \otimes \bar{F}$ の étale cohomology $H_{\text{ét}}^m(X_{\bar{F}}, \mathbb{Q}_{\ell})$.

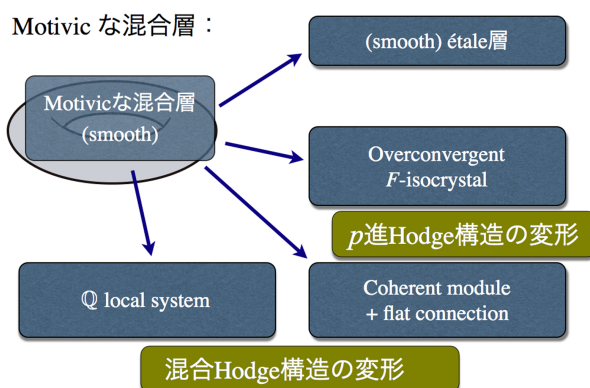
また、Betti cohomology と de Rham cohomology の情報を張り合わせたものは混合 Hodge 構造を、rigid cohomology と de Rham cohomology の情報を張り合わせたものは filtered Frobenius module (混合 Hodge 構造の p 進類似) を与える。

代数多様体の性質は cohomology 群を通して調べることが可能である。複数の cohomology 理論を考える理由は、各 cohomology 群は単に線形空間ではなく、それ以外にも付加的な構造を持っているからである。より多くの cohomology 群を調べることで、代数多様体の持っている性質をより詳しくみることが可能となる。代数多様体に付随する motive とは、そ

の代数多様体に対して考える良い cohomology 理論すべての情報を持っている理想的な cohomology 理論のことである。理想的であるが故に、motive があれば、その他の cohomology 群はすべて実現として回復できるという仕組みになっている。



各 cohomology 理論に対応して、混合層の理論がある。例えば代数多様体の族があったとき、cohomology 群の族ができる。このような『cohomology 群の族』は混合層として解釈される。各混合層の理論には cohomology 群の場合と同様に付加構造があり、この構造によって代数多様体の族のより詳しい性質を調べることが可能となる。Motivic な混合層の理論とは、考えうる良い混合層の理論すべて



の情報を持っている理想的な混合層の理論のことである。理想的であるが故に、motivic な混合層があれば、その他の混合層はすべて実現として回復できるという仕組みになっている。

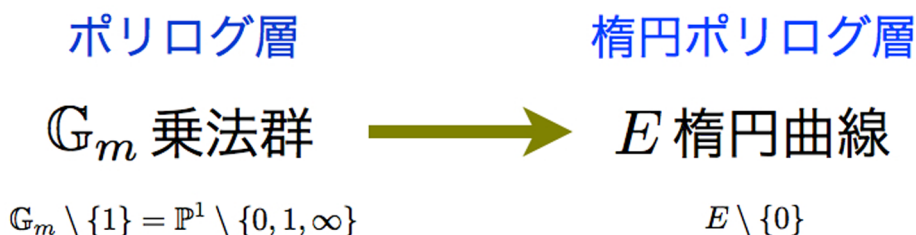
ポリログ層が motivic である、ということの意味は、 $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ 上の motivic な混合層が存在して、前章で書き表した混合 Hodge 構造の変形や filtered overconvergent F -isocrystal はこの motivic な混合層から回復される、ということである。

§ 4. 楕円曲線のポリログ

Beilinson と Levin [BL] によって ポリログ層の構成は楕円曲線の場合に拡張された。この章では楕円曲線の場合のポリログは何であるか、ということと、古典的なポリログ層とどう類似しているかについて解説する。 F を標数 0 の体としたとき、 F 上の楕円曲線 E は

$$E: y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3, \quad \omega = \frac{dx}{y},$$

$g_2, g_3 \in F$, $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$ という Weierstrass 方程式で定義される。Beilinson-Levin による楕円ポリログの構成は、古典的な $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\} = \mathbb{G}_m \setminus \{1\}$ の場合と類似な構成を、楕円曲線 E から単位元 0 を抜いた代数多様体上で行った。



Beilinson と Levin の構成は抽象的であり、構成されたポリログ層の記述は必ずしも明確ではなかった。[BKT] の最初の成果は、古典的なポリログ関数の場合と類似の微分方程式を具体的に書き下すことであった。

古典的なポリログ関数の微分方程式は

$$\begin{aligned} d\mathrm{Li}_{k+1}(t) &= \mathrm{Li}_k(t) \frac{dt}{t} \\ \mathrm{Li}_0(t) &= \frac{t}{1-t} \end{aligned}$$

によって与えられた。楕円曲線版を考えるためには、 $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ の場合の

$$\frac{dt}{t}, \quad \frac{t}{t-1}$$

の楕円類似を決定する必要がある。

最初の dt/t は $\mathbb{G}_m$ の普遍微分形式であり、さらに $H_{\mathrm{dR}}^1(\mathbb{G}_m)$ の生成元である。楕円ポリログを Beilinson と Levin の抽象的な定義に従って書き下すと、 dt/t の楕円曲線類似は、 $H_{\mathrm{dR}}^1(E/F)$ の生成元によって与えられることが導かれる。 $\omega = dx/y$ を不変微分形式として、 $\eta = xdx/y$ を第2種微分形式とすると、

$$H_{\mathrm{dR}}^1(E/F) = F\omega \bigoplus F\eta$$

と表されることが知られている。従って、楕円曲線の場合に dt/t の代わりをするのは、 ω, η である。虚数乗法をもつ楕円曲線の場合は、後ほど定義する ω, ω^* という若干異なる基底を取った方が都合が良い。

有理関数 $t/(t-1)$ の楕円類似を決定するために、 $t/(t-1)$ の幾何学的性質と数論的性質に注目した。まず $t/(t-1)$ は、 $\mathbb{G}_m$ の単位元 1 で 1 という簡単な留数を持つという幾何学的性質を持っている。

次に $\Gamma = 2\pi i\mathbb{Z}$ とすると、 $t = e^z$ という対応から同型 $\mathbb{C}/\Gamma \cong \mathbb{G}_m(\mathbb{C})$ が導かれる。この同型を通して、 $t/(t-1)$ は $e^z/(e^z-1)$ に移る。整数 $b \geq 0$ に対して

$$e_b^* := \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}} \frac{1}{\gamma^b}$$

とすると、この量は

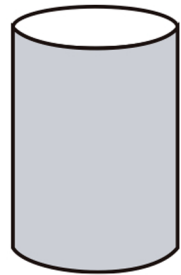
$$e_b^* = -\frac{B_b}{b!} = \begin{cases} \frac{2\zeta(b)}{(2\pi i)^b} & b: \text{偶数} \\ 0 & b: \text{奇数} \end{cases}$$

$$\Gamma := 2\pi i\mathbb{Z}$$

$$\mathbb{C}/\Gamma \cong \mathbb{G}_m(\mathbb{C})$$

$$t = e^z$$

$\mathbb{G}_m$



という数論的に非常に重要な量であることが導かれる。ここで B_b は b 番目の Bernoulli 数である。 $e^z/(e^z-1)$ は Bernoulli 数の母関数であることが知られているため、数論的にも重要な関数であることが導かれる。以上 $t/(t-1)$ の性質をまとめると次の通りである。

- (幾何的な性質) $\frac{t}{t-1}$ の $t=1$ での留数は 1.

- (数論的な性質) $\frac{e^z}{e^z - 1} = \frac{1}{z} + \sum_{b \geq 0} (-1)^b e_{b+1}^* z^b.$

楕円ポリログを具体的記述するために、上記の性質をみtas楕円曲線上の関数が必要である。今までの小林真一氏との共同研究を通して、この様な関数を発見していた。

楕円曲線 $E: y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$ と不変微分形式 $\omega = dx/y$ に対して $\Gamma \subset \mathbb{C}$ を周期格子とする。すると、 $x = \wp(z)$, $y = \wp'(z)$ と対応させることにより、同型 $\mathbb{C}/\Gamma \cong E(\mathbb{C})$ が導かれる。

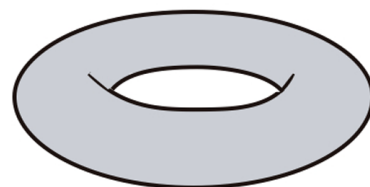
Γ : lattice

$$\mathbb{C}/\Gamma \cong E(\mathbb{C})$$

$$x = \wp(z),$$

$$y = \wp'(z)$$

E



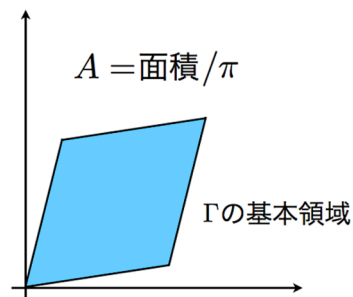
次に $\theta(z)$ を因子 $[0] \in \mathbb{C}/\Gamma$ に対応する reduced なテータ関数で $\theta'(0) = 1$ となるように正規化したものとする。

$$e_{0,2}^* := \lim_{s \rightarrow 0^+} \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}} |\gamma|^{-2s} \gamma^{-2}$$

とおくと、 $\theta(z)$ は Weierstrass のシグマ関数 $\sigma(z)$ を用いて

$$\theta(z) = \exp \left[-e_{0,2}^* \frac{z^2}{2} \right] \sigma(z)$$

と表されることが知られている。 Γ の基本領域の面積を $a(\Gamma)$ として、 $A := a(\Gamma)/\pi$ とする。



$$\Theta(z, w) = \frac{\theta(z+w)}{\theta(z)\theta(w)}$$

とおくと、この関数は任意の $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ に対して

$$\Theta(z + \gamma_1, w + \gamma_2) = \exp \left[\frac{\gamma_1 \bar{\gamma}_2}{A} \right] \exp \left[\frac{z \bar{\gamma}_2 + w \bar{\gamma}_1}{A} \right] \Theta(z, w)$$

という変換公式をみtasことが導かれる。この公式は $\Theta(z, w)$ が楕円曲線上の Poincaré 束に付随する reduced なテータ関数であることを示している。この関数が $t/(t-1)$ の楕円曲線類似であることが期待された。

まず、 $\theta(z)$ は divisor $[0]$ に対応するテータ関数で $\theta'(0) = 1$ となることから、 $\Theta(z, w)$ は $z = 0$ と $w = 0$ で留数が 1 となるという幾何学的性質をみtasしている。

さらに、今までの研究を通して $\Theta(z, w)$ は $t/(t-1)$ の場合と同様に数論的な性質を持っていることを発見した。具体的には整数 a, b に対して

$$e_{a,b}^* := \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}} \frac{\bar{\gamma}^a}{\gamma^b}$$

とする。この和は $b > a + 2$ でないと絶対収束しないが、解析接続を用いることにより、全ての a, b に対して値が定義される ([We] 参照)。これに対して次の定理が成り立つことを証明した ([BK1] Theorem 1.17、あるいは [BK2] Theorem 2.11)。

定理 1 (Kobayashi, B-) $\Theta(z, w)$ を z, w で展開すると

$$\Theta(z, w) = \frac{1}{z} + \frac{1}{w} + \sum_{a, b \geq 0} (-1)^{a+b} \frac{e_{a, b+1}^*}{a! A^a} z^b w^a$$

となる。

Zagier は [Zag] で 2 変数 Jacobi テータ関数について似たような公式を証明しているが、我々の場合 reduced なテータ関数という別な正規化を用いることによって、直接 $e_{a, b}^*$ を生成する母関数を見つけることができた。

$e_{a, b}^*$ は Eisenstein-Kronecker 数と呼ばれるもので、虚 2 次体の整数論 Bernoulli 数と同様な役割を果たす大切な量である。以上の考察から、 $\Theta(z, w)$ は $t/(t-1)$ と同様な幾何学的性質と数論的な性質をみたしていることが導かれる。最後の問題として、 $\Theta(z, w)$ は Γ に対して周期関数でない。従って、有理関数でもない。楕円ポリログを記述する代数的な微分方程式を求めるためには何らかの意味で $\Theta(z, w)$ を周期化する必要がある。この周期化の操作で導かれるのが、次章で定義する接続関数である。

§ 5. 接続関数と楕円ポリログ関数

この章では $\Theta(z, w)$ を周期化する方法を解説し、楕円ポリログの場合の微分方程式を具体的に記述する。最初に $\Theta(z, w)$ の変換公式から、次の結果が証明される。

補題 2 今 $F_1(z) := \theta'(z)/\theta(z)$ として

$$\Xi(z, w) := \exp(-F_1(z)w)\Theta(z, w)$$

と置く。このとき、 $\Xi(z, w)$ の z 変数は格子 Γ について周期的である。すなわち、

$$\Xi(z + \gamma, w) = \Xi(z, w) \quad (\forall \gamma \in \Gamma)$$

が成り立つ。

定義 3 関数 $L_n(z)$ を

$$\Xi(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(z) w^{n-1}$$

と定義する。

補題より、 $L_n(z)$ は Γ について周期関数であることが導かれる。すなわち、 $L_n(z)$ は $\mathbb{C}/\Gamma$ の楕円関数である。この関数の代数性について、次の結果が知られている ([BKT] Proposition 1.6)。

命題 4 (Kobayashi, Tsuji, B-) 格子 Γ が体 $F \subset \mathbb{C}$ 上定義される楕円曲線

$$E : y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3, \quad \omega = \frac{dx}{y}$$

の周期格子となるとき、関数 $L_n(z)$ は F 上定義される。

証明. $\zeta(z) = \sigma'(z)/\sigma(z)$ を Weierstrass のゼータ関数とすると、

$$\Xi(z, w) = \exp(-\zeta(z)w)\sigma(z+w)/\sigma(z)\sigma(w)$$

と表される。命題の条件のもと、 $\sigma(z)$ と $\zeta(z)$ を z で Laurent 展開したものの係数は F に含まれることが知られている。 $L_n(z)$ は定義より $\mathbb{C}/\Gamma$ 上 $z=0$ でのみ極を持つので、この極の位数は 2 以上である。 $\wp(z) = -\zeta'(z)$, $\wp'(z)$ の Laurent 展開の係数も F に入り、 $\mathbb{C}/\Gamma$ 上の極は $z=0$ のみで位数はそれぞれ 2 と 3 であることから、適当な F 係数の多項式 $f(x, y) \in F[x, y]$ を用いると $L_n(z) - f(\wp(z), \wp'(z))$ は $\mathbb{C}/\Gamma$ 上で極を全く持たない関数、すなわち定数にすることができる。現れる全ての関数が F 係数であることから、この定数も F に含まれる。従って

$$L_n(z) \in F[\wp(z), \wp'(z)]$$

が導かれる。

関数 $L_n(z)$ の最も重要な性質は次の通りである。

定理 5 (Kobayashi, Tsuji, B-) 接続関数 $(L_n(z))_{n \geq 0}$ は、楕円ポリログの場合に $t/(t-1)$ と同じ役割を果たす。

定理の正確な定式化は原論分 [BKT] Theorem 1.22 に譲る。 $\omega^* := dF_1(z)$ とすると、 ω^* は第 2 種微分形式になり、 ω, ω^* は $H_{\text{dR}}^1(E)$ の基底になる。この結果を用いて Beilinson と Levin の楕円ポリログ層の構成を具体的に書き下すと、楕円ポリログ層の Hodge 実現の周期行列は

$$\begin{aligned} D_{m,n}(z) &= D_{m-1,n}(z)\omega + D_{m+1,n-1}(z)\omega^*, & (m, n \geq 0) \\ D_{0,n}(z) &= L_n(z), & D_{m,-1}(z) = 0 \end{aligned}$$

をみたと関数 $D_{m,n}(z)$ によって記述されることが導かれる。この関数は $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ の場合のポリログ関数 $\text{Li}_k(t)$ の楕円曲線類似である。

楕円ポリログの p 進実現に対しても同様な微分方程式が立てられる。 K を虚 2 次体とする。また、 E を K 上定義される楕円曲線で、 $\mathcal{O}_K$ で虚数乗法をもち、素数 $p \geq 5$ で good reduction を持つと仮定する。また、素数 p が K の中で $p = \mathfrak{p}\mathfrak{p}^*$ と分解するとき π を $\mathfrak{p}$ の生成元として、分解しないとき $\pi := p$ とする。このとき、

$$\Theta^{(p)}(z, w) = \Theta(z, w) - \frac{1}{\pi} \Theta(\pi z, \pi^{-1}w)$$

として、

$$\Xi^{(p)}(z, w) := \exp(-F_1(z)w)\Theta^{(p)}(z, w)$$

とする。このとき p 進の接続関数 $L_n^{(p)}(z)$ を

$$\Xi^{(p)}(z, w) = \sum_{n \geq 0} L_n^{(p)}(z) w^{n-1}$$

で定義する。このとき、 $L_n^{(p)}(z)$ は E 上の有理関数となり、特に rigid analytic な関数でもある。このとき、 p 進楕円ポリログ関数がみたす微分方程式は

$$\begin{aligned} dD_{m+1,n}^{(p)} &= D_{m,n}^{(p)}\omega + D_{m+1,n-1}^{(p)}\omega^* & (m, n \geq 0) \\ D_{0,n}^{(p)} &= L_n^{(p)}, & D_{m,-1}^{(p)} = 0 \end{aligned}$$

である。以上をみたす rigid analytic な $D_{m,n}^{(p)}$ は唯一つ存在することが証明される ([BKT] Theorem 3.3)。この関数は $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ の場合の $\ell_k^{(p)}(t)$ の p 進類似であり、Beilinson と Levin の構成方法を p 進の場合に書き下すと、楕円ポリログの p 進周期行列を記述していることが導かれる ([BKT] Theorem 4.15)。

[BKT] の主結果は、関数 $D_{m,n}^{(p)}$ と、この場合の L 関数の特殊値を p 進的に補完する p 進 distribution との関係である。 p が ordinary な場合、この distribution は measure となり、 p 進 L 関数を与えることが知られている。全ての結果を合わせると、楕円ポリログという motivic なものから、 p 進 L 関数が導けた。この結果をきちんとした定式化にあてはめることで、虚数乗法をもつ楕円曲線やより一般的には虚 2 次体に付随する Hecke 指標に対して、 p 進 Beilinson 予想が解けるのではないかと期待している。目下研究中である。

参考文献

- [Ba1] K. Bannai, Rigid syntomic cohomology and p -adic polylogarithms, J. Reine Angew. Math., **529** (2000), 205-237.
- [Ba2] K. Bannai, Syntomic cohomology as a p -adic absolute Hodge cohomology, Math. Z. **242** (2002), 443-480.
- [Ba3] K. Bannai, On the p -adic realization of elliptic polylogarithms for CM-elliptic curves, Duke Math. J., **113** (2002), no. 2, 193-236.
- [BK1] K. Bannai and G. Kings, p -adic elliptic polylogarithm, p -adic Eisenstein series and Katz measure, Preprint 2007, arXiv:0707.3747v1 [math.NT].
- [BK1] K. Bannai and S. Kobayashi, Algebraic theta functions and p -adic interpolation of Eisenstein-Kronecker numbers, Preprint 2007, arXiv:math/0610163v4 [math.NT].
- [BK2] K. Bannai and S. Kobayashi, Algebraic theta functions and Eisenstein-Kronecker numbers, RIMS Kôkyûroku Bessatsu B4: *Proceedings of the Symposium on Algebraic Number theory and Related Topics*, eds. K. Hashimoto,

Y. Nakajima and H. Tsunogai, December (2007), 63–78; Available at arXiv:0709.0640v1[math.NT].

[BKT] K. Bannai, S. Kobayashi, and T. Tsuji, On the de Rham and p -adic realizations of the Elliptic Polylogarithm for CM elliptic curves, preprint 2007, arXiv:0711.1701v2 [math.NT].

[BL] A. Beilinson and A. Levin, The Elliptic Polylogarithm, *Motives*, (Seattle, WA, 1991), 123–192.

[D1] C. Deninger, Higher regulators and Hecke L -series of imaginary quadratic fields. I, Invent. Math. **96** (1989), no. 1, 1–69.

[D2] C. Deninger, Higher regulators and Hecke L -series of imaginary quadratic fields. II, Ann. of Math. (2) **132** (1990), no. 1, 131–158.

[HK1] A. Huber and G. Kings, Degeneration of l -adic Eisenstein classes and of the elliptic polylog, Invent. Math. **135** (1999), no. 3, 545–594.

[HK2] A. Huber and G. Kings, Bloch-Kato conjecture and Main Conjecture of Iwasawa theory for Dirichlet characters, Duke Math. J. **119** (2003), no. 3, 393–464.

[HW] A. Huber and J. Wildeshaus, Classical Motivic Polylogarithm According to Beilinson and Deligne, Doc. Math. J. DMV **3** (1998), 27–133; Correction, same volume, 297–299.

[K1] G. Kings, K -theory elements for the polylogarithm of abelian schemes, J. Reine Angew. Math. **517** (1999), 103–116.

[K2] G. Kings, The Tamagawa number conjecture for CM elliptic curves. Invent. Math. **143** (2001), no. 3, 571–627.

[We] A. Weil, *Elliptic Functions according to Eisenstein and Kronecker*, Springer-Verlag, 1976.

[W] J. Wildeshaus, *Realizations of polylogarithms*, Lecture Notes in Mathematics **1650**, Springer, 1997.

[Zag] D. Zagier, Periods of modular forms and Jacobi theta functions, Inv. math. **104** (1991), 449–465.