非可換パラメーターを基礎にした
鎖複体の普遍持ち上げ

岡山大学自然科学研究科・吉野雄二

1 序

以下では，k は任意の体，R は k 上の結合代数を表すことにする。また，R-加群というときには常に左加群を意味することとする。

表現論的視点から言えば R-加群の理論の最終目標は，R-加群全体の同型類のモデュライを構成することであると言ってよいであろう。これは R-加群の同型類の全体に幾何学的構造をいれて，その幾何学的実現を得ることである。しかしながら，加群を直既約なものに限ってもその同型類を全て記述することは一般的には不可能であり，このような幾何学的実現はさらに hopeless !? であると考えられている。

しかしながら，ある一つの R-加群 M を固定して，さらに加群の同型類のモデュライがあると想定して，M の近傍での様子は考えることができる。すなわち，M の普遍変形族を考えることである。このような文脈では，次の定理 (Formal local moduli の存在) が知られている。([1], [2], [3])

Theorem 1.1 (Schlessinger's Theorem 1968) $\mathrm{Ext}^1_R(M,M)$ を k-ベクトル空間として有限次元であると仮定する。このとき，完備な可換ネータ局所 k-代数 Q と，(R,Q)-両側加群 U が存在して，全ての M の無限小変形は U から特殊化によって得られる。

このとき，この U を M の普遍変形族，Q （または $\mathrm{Spec}Q$） をこの普遍族 U の (可換）パラメータ代数（またはパラメータ空間）と呼ぶことにする。

もっとも簡単な例は次の Joradan 標準形の変形であろう。

Example 1.2 $n \times n$ の行列の既約 Jordan 標準形

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

を考えることは， $R = k[x]$ と置いて R-加群 $M = k[x]/(x^n)$ を与えることと同じである。この場合，M の普遍変形族のパラメータ代数としては， $Q = k[[t_0, \ldots, t_{n-1}]]$，$Q$ 上の普遍変形族として， $U = Q[x]/(x^n + t_{n-1}x^{n-1} + \cdots + t_0)$ をとることができる。

これをまた，行列の形で考えると次の Sylvester 族を得る。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ -t_0 & -t_1 & -t_2 & \cdots & -t_{n-1} \end{pmatrix}$$

さて定理 1.1 において，両側加群 U は右側 Q-加群として平坦であるので，次のような導来圏の間の関手が定義される。

$$U \otimes_Q^L \ - \quad : D(Q) \to D(R)$$

ここで， $U \otimes_Q^L k = M$ であることに注意しておく。すると，これより Yoneda 代数の射

$$\rho^\bullet \ : \ \mathrm{Ext}_Q^\bullet(k,k) \to \mathrm{Ext}_R^\bullet(M,M)$$

が得られる。ここで，とくに ρ^2 は障害写像と呼ばれる。

$$\rho^2 \ : \ \mathrm{Ext}_Q^2(k,k) \to \mathrm{Ext}_R^2(M,M)$$

この障害写像はホモロジーの比較写像としては，あまり良くないように見えるのである。この事情を先の Jordan 標準形の変形について見てみよう。

先の例 1.2 では，

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}_Q^2(k,k) \ & =< t_i \text{ の 2 次の Koszul 関係式 } >^* \\ & \downarrow \ \ \rho^2 \\ \mathrm{Ext}_R^2(M, \ & M) = (0) \end{aligned}$$

となる。ここで， 2 次の Koszul 関係式とは変数 $t_0, \ldots, t_{n-1}$ の可換関係式に由来するものである。$\mathrm{Ext}_R^2(M,M)$ が (0) であるのに比して，$\mathrm{Ext}_Q^2(k,k)$ の方は次元 $\binom{n}{2}$ を持つベクトル空間である。ρ^2 が比較写像としては良く機能しているとは思えないことが、これから分かるであろう。

そこで，この事情を反省すると，パラメータ $t_0, \ldots, t_{n-1}$ を非可換な変数であると見るべきであると考えることができる。このアイデアのもとで，次のように予想することができる。

- パラメータ代数を非可換に拡張すれば， $\rho^\bullet$ はもっと良い比較を与えるだろう。

ただし，議論を単純に非可換化すると，普遍変形族のパラメータ代数上での平坦性が成り立たない。非可換環上の加群については local criterion of flatness が成立しないためである。そこで，もとから平坦性に関する議論を排除するために，

- 「加群」でなく「鎖複体」の変形を考えるべきである。

鎖複体の変形とは，その複体の持ち上げに他ならない。このように自然に「非可換パラメータ代数を基礎にした複体の普遍持ち上げ」を考える必然性が出てくる。

ここで，簡単に複体に関する記号を導入しておこう。
$\mathbb{F} = (F, d)$ が R-加群の鎖複体 (単に複体という) とは，$F = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} F_i$ が次数付き R-加群であり，$d : F \to F[-1]$ は次数付き準同型で $d^2 = 0$ を満足するときをいう。$\mathbb{F} = (F, d)$ が射影的複体であるとは，単にもとになる次数付き加群 F が射影 R-加群であるときをいう。
$f : F \to F[i],\ \ g : F \to F[j]$ が次数付き R-加群の準同型であるとき，

$$[f, g] := fg + (-1)^{i+j} gf \quad : \quad F \to F[i + j]$$

と定義する。この記号のもとで，$f : F \to F[i]$ が鎖準同型であるとは，$[d, f] = 0$ がなりたつことである。$f : F \to F[i]$ について $f \sim 0$ とは，次数付き加群の準同型写像 $g : F \to F[i + 1]$ があって $f = [d, g]$ となるときであると定義される。$\mathbb{F} = (F, d)$ が射影的鎖複体であるとき，

$$\mathrm{Ext}^i_R(\mathbb{F}, \mathbb{F}) \overset{def}{=} \frac{\{\text{鎖準同型 } F \to F[i] \text{ の全部}\}}{\sim}$$

と定義する。
$\varphi : R \to S$ が k-代数の準同型射であるとき，

$$S_\varphi \otimes_R (F, d) \overset{def}{=} (S_\varphi \otimes_R F, S_\varphi \otimes_R d)$$

と定義する。ただし，S_φ は，S を左 S-加群，かつ φ を通して右 R-加群と見た両側加群である。右からのテンソル積も同じように定義する。
次に変形の基礎となる圏 $\mathcal{A}_k$ を導入する。これは次のように定義される。

- 圏 $\mathcal{A}_k$ の対象は，アルチン局所 k-代数 A で $A/\mathfrak{m}_A = k$ を満たすもの。（必ずしも可換でない。さらに，このような A は有限次元局所 k 代数であることに注意。）

- 圏 $\mathcal{A}_k$ の射は，k-代数としての準同型射。

Definition 1.3 $A \in \mathcal{A}_k$、かつ $\mathbb{F} = (F, d)$ は R-加群の射影的複体とする。
$(F \otimes_k A, \Delta)$ が $\mathbb{F}$ の A への持ち上げであるとは，次の条件が成立するときを言う。

$$\begin{cases} \Delta \text{ は次数が } -1 \text{ の次数付き } R \otimes_k A^{op}\text{-準同型射であり，} \\ \Delta^2 = 0, \ \text{かつ} \\ (F \otimes_k A, \Delta) \otimes_A k = (F, d) \end{cases}$$

本稿の目的は，このようにして定義される全てのアルチン k-代数への全ての持ち上げを支配する普遍的な $\mathbb{F}=(F,d)$ の持ち上げを構成して，そのパラメータ代数の性質を調べることである。

ここで，普遍持ち上げとなるような複体は pro-artinian な局所 k-代数の上で定義されなければならないことは自然である。我々はこれを (可換代数の場合の言葉を濫用して）完備局所 k-代数 (complete local k-algebra) と呼ぶことにして，まずその定義と性質について次の節で与えよう。

2 完備局所 k-代数

Definition 2.1 k-代数 A が完備局所 k-代数であるとは，次の４条件を満たすときをいう。

(1) A は極大イデアル $\mathfrak{m}_A$ をもつ局所 k-代数である。

(2) 自然な単射 $k \to A$ は同型 $k \cong A/\mathfrak{m}_A$ を導く。

(3) $\mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2$ は k 上有限次元である。

(4) 自然な全射 $A \to A/\mathfrak{m}_A^n$ が同型 $A \cong \varprojlim A/\mathfrak{m}_A^n$ を導く。

Example 2.2 $S=k\langle t_1,\dots,t_r\rangle$ を非可換多項式環（テンソル代数）として，非可換形式的べき級数環 T を次のように定義する。

$$T=\varprojlim S/(t_1,\dots,t_r)^n$$

この T を $k\langle\langle t_1,\dots,t_r\rangle\rangle$ と表す。T は完備局所 k-代数である。

Proposition 2.3 A が完備局所 k-代数であるための必要十分条件は，$A\cong T/I$ という形に書けることである。ただし，$T=k\langle\langle t_1,\dots,t_r\rangle\rangle \supseteq I$ は $\mathfrak{m}_T$-進位相による閉なイデアル, すなわち，$I=\bigcap_n(I+\mathfrak{m}_T^n)$ $(=\overline{I})$ を満たすイデアルである。

Remark 2.4 (1) 任意のアルチン代数 $A\in\mathcal{A}_k$ は完備局所 k-代数である。

(2) 完備局所 k-代数は Noether 環とは限らない。また，そのイデアルは閉イデアルとは限らない。

このような端的な例として，$T=k\langle\langle x,y\rangle\rangle \supseteq (x)=(x$ で生成される両側イデアル$)$ を考えてみよう。(x) の任意の元は， axb $(a,b\in T)$ という形の元の有限和に限ることに注意すれば,

$$\sum_{i=1}^{\infty} y^i x y^i \in \overline{(x)} \setminus (x)$$

であることが分かる。とくに， (x) は T の閉イデアルではない。したがって， $T/(x)$ は完備局所 k-代数でもない。ちなみに， $T/\overline{(x)} \simeq k\langle\langle y\rangle\rangle = k[[y]]$ である。

3　複体の普遍持ち上げ

先ずは普遍持ち上げの定義に必要な完備テンソル積について定義を与えておく。

一般に，R が k-代数で，M が R-加群であるとき，任意の完備局所 k-代数 A に対して，

$$R\widehat{\otimes}_k A^{op} := \varprojlim R \otimes_k (A/\mathfrak{m}_A^n)^{op}$$

および，

$$M\widehat{\otimes}_k A := \varprojlim M \otimes_k (A/\mathfrak{m}_A^n)$$

と定義する。$R\widehat{\otimes}_k A^{op}$ は k-代数であり，$M\widehat{\otimes}_k A$ は $R\widehat{\otimes}_k A^{op}$-加群である。

Definition 3.1 $\mathbb{F} = (F, d)$ が R 上の射影的複体で，A が完備局所 k-代数のとき，$(F\widehat{\otimes}_k A, \Delta_A)$ が複体 $\mathbb{F}$ の持ち上げであるとは，次の条件が成立することであると定義する。

- $(F\widehat{\otimes}_k A, \Delta_A)$ は $R\widehat{\otimes}_k A^{op}$ 上の鎖複体で，等式 $\Delta_A \otimes_A k = d$ が成り立つ。

Remark 3.2 上の定義の中で，$(F\widehat{\otimes}_k A, \Delta_A)$ は，必ずしも $R\widehat{\otimes}_k A^{op}$ 上の射影的複体とは限らないことに注意しておこう。

上の定義よりもっと一般に次の定義を与えておく。

Definition 3.3 $f : A \to B$ が完備局所 k-代数の間の準同型射で，$\mathbb{F} = (F, d)$ が R 上の射影的鎖複体であるとき, $(F\widehat{\otimes}_k A, \Delta_A)$ が $(F\widehat{\otimes}_k B, \Delta_B)$ の A への持ち上げであるとは，次の等式が成立するときをいう。

$$\Delta_A \otimes_A {}_f B = \Delta_B$$

ただし，この左辺は

$$\varprojlim \left((\Delta_A \otimes_A A/\mathfrak{m}_A^n) \otimes_{A/\mathfrak{m}_A^n} {}_f(B/\mathfrak{m}_B^n) \right)$$

の意味である。

次に，普遍持ち上げを定義するために，持ち上げ全体を表す関手を定義しておこう。

Definition 3.4 R 上の射影的複体 $\mathbb{F} = (F, d)$ を固定しておく。このとき，関手

$$\mathcal{F} : \mathcal{A}_k \to (Sets)$$

を次で定義する。

$$\mathcal{F}(A) := \frac{\{\mathbb{F} \text{ の } A \text{ への持ち上げの全体}\}}{< R \otimes_k A^{op}\text{-上の複体としての鎖同型} >} \qquad (A \in \mathcal{A}_k)$$

Definition 3.5 R 上の射影的複体 $\mathbb{F} = (F, d)$ を固定しておく。

もし，完備局所 k-代数 P と，$\mathbb{F}$ の P への持ち上げ $\mathbb{L} = (F\widehat{\otimes}_k P, \Delta_P)$ が存在するなら，関手の間の自然変換

$$\phi_{\mathbb{L}} : \mathrm{Hom}_{k-alg}(P, -) \to \mathcal{F}$$

が次のように定義される。

$A \in \mathcal{A}_k$, $f \in \mathrm{Hom}_{k-alg}(P, A)$ に対して，

$$\phi_{\mathbb{L}}(f) = (F \otimes_k A, \Delta_P \otimes_P {}_f A)$$

さて，いよいよ普遍持ち上げを定義しよう。

Definition 3.6 前のように，R 上の射影的複体 $\mathbb{F} = (F, d)$ を固定しておく。

$\mathbb{L} = (F\widehat{\otimes}_k P, \Delta_P)$ が $\mathbb{F}$ の普遍持ち上げであるとは，$\phi_{\mathbb{L}}$ が二つの関手の間の同型を与えるときと定義する。このとき，P を $\mathbb{L}$ のパラメータ代数という。

我々の最初の定理は普遍持ち上げの存在と一意性に関するものである。

Theorem 3.7 R 上の射影的複体 $\mathbb{F} = (F, d)$ が，$r = \dim_k \mathrm{Ext}^1_R(\mathbb{F}, \mathbb{F}) < \infty$ を満たすと仮定する。このとき，

- $\mathbb{F}$ の普遍持ち上げ $\mathbb{L}_0 = (F\widehat{\otimes}_k P_0, \Delta_0)$ が存在する。
- パラメータ代数 P_0 は k-代数の同型を除いて一意的に定まる。
- （パラメータ代数 P_0 を固定したとき,）複体 $\mathbb{L}_0$ は $R\widehat{\otimes}_k P_0^{op}$ 上の複体としての鎖同型を除いて一意的に定まる。
- $P_0 \cong T/I$ と表すことができる。ただし，$T = k\langle\langle t_1, \ldots, t_r\rangle\rangle$ は非可換形式的べき級数環で， I は $\mathfrak{m}_T^2 \supseteq I$ を満たす T の閉イデアルである。

以下に簡単に証明のアウトラインを述べよう。基本的には，可換なパラメータ代数の場合と同じであるが，非可換形式的べき級数環が Noether 的でないので，Noether 性を利用する議論を避けなくてはいけない。その部分で工夫が必要である。

まず，$\mathrm{Ext}^1_R(\mathbb{F}, \mathbb{F})$ が r 次元なので，その k-基底 $[t_1^*], \ldots, [t_r^*]$ をとる。これに対応して，変数 $t_1, \ldots, t_r$ を用意し，非可換形式的べき級数環 $T = k\langle\langle t_1, \ldots, t_r\rangle\rangle$ を考える。$\delta : F \otimes_k T/\mathfrak{m}_T^2 \to F \otimes_k T/\mathfrak{m}_T^2[-1]$ を $\delta = d \otimes 1 + \sum_{i=1}^r t_i^* \otimes t_i$ によって定義することによって，$\mathbb{F}$ の $T/\mathfrak{m}_T^2$ への持ち上げを作る (First order deformation)。ここで，次のような集合を考える。

$$\mathcal{I}(\delta) = \{(I, \Delta) \mid \begin{array}{l} I \subseteq \mathfrak{m}_T^2 \text{は } T \text{ の閉イデアルで} \\ (F\widehat{\otimes}_k T/I, \Delta) \text{ は } (F \otimes_k T/\mathfrak{m}_T^2, \delta) \text{ の } T/I \text{ への持ち上げになっている。} \end{array}\}$$

そして，$\mathcal{I}(\delta)$ に次のようにして半順序 $>$ を定義する。

$$(I_1, \Delta_1) > (I_2, \Delta_2) \quad \overset{def}{\Leftrightarrow}$$

「$I_1 \subseteq I_2$ かつ $(F\widehat{\otimes}_k T/I_1, \Delta_1)$ は $(F\widehat{\otimes}_k T/I_2, \Delta_2)$ の T/I_1 への持ち上げである。」

すると容易に（Zorn の補題から）, $\mathcal{I}(\delta)$ の極大元 $(I_0, \Delta_0) \in \mathcal{I}(\delta)$ が存在することが分かる。この極大元 $(T/I_0, \Delta_0)$ のことを「極大持ち上げ」と呼ぶことにする。

本質的に次のことを示すのが Key point であり，それによって証明が完了する。

- 極大持ち上げは，k-代数の同型と鎖複体としての鎖同型を除いて一意的であること。
- （上記の一意性を使って）極大持ち上げという概念と普遍持ち上げという概念が同一であることを示すこと。

（証明のアウトライン終わり）

一つの例として，任意の完備局所 k-代数はパラメータ代数となりうることを注意しておこう。実際に、次のことが成立する。

Theorem 3.8 P を任意の完備局所 k-代数とする。さらに，$\mathbb{F} = (F, d)$ を左 P-加群としての $k = P/\mathfrak{m}_P$ の自由分解とする。このとき，次のような形の $\mathbb{F}$ の普遍持ち上げが存在する。

$$\mathbb{L} = (F\widehat{\otimes}_k P, \Delta)$$

とくに，完備局所 k-代数 P 自身が普遍持ち上げ $\mathbb{L}$ のパラメータ代数である。

この定理は次の節でコホモロジーの比較を考えるときに、その証明の中で本質的に必要となる事実である。

4 パラメータ代数の性質

一般に完備局所 k-代数は、非可換形式的べき級数環 T をその閉イデアル I で剰余した形を持つことは述べたが、パラメータ代数についてはこの I に関するある程度の性質を Yoneda 代数 $\mathrm{Ext}_R^{\bullet}(\mathbb{F}, \mathbb{F})$ の性質に帰することができる。

以下では、今まで通り R は任意の k-代数、$\mathbb{F} = (F, d)$ は R 上の射影的鎖複体を表す。

Theorem 4.1 射影的複体 $\mathbb{F}$ について、次の二つのことを仮定する。

- $r := \dim_k \mathrm{Ext}_R^1(\mathbb{F}, \mathbb{F}) < \infty$
- $\ell := \dim_k \mathrm{Ext}_R^2(\mathbb{F}, \mathbb{F}) < \infty$

さらに P_0 を $\mathbb{F}$ の普遍持ち上げのパラメータ代数とする。このとき、r 変数の非可換形式的べき級数環の中に ℓ 個の元

$$f_1, \dots, f_\ell \in T = k\langle\langle t_1, \dots t_r \rangle\rangle$$

を見つけて、

$$P_0 = T/\overline{(f_1, \dots, f_\ell)}$$

と表すことができる。

Corollary 4.2 定理の仮定のもとで、更に $\dim_k \mathrm{Ext}^2_R(\mathbb{F}, \mathbb{F}) = 0$ とすると P_0 は非可換形式的べき級数環に等しい。

Remark 4.3 P_0 を $\mathbb{F}$ の普遍持ち上げのパラメータ代数とするとき、それを交換子イデアルの閉包で剰余して、

$$Q_0 = P_0/\overline{[P_0, P_0]}$$

と置くと、 Q_0 は古典的な意味での $\mathbb{F}$ の普遍持ち上げの <u>可換な</u> パラメータ代数である。すなわち，関手 $\mathcal{F}$ を $\mathcal{A}_k$ の充満部分圏

$$\mathcal{C}_k = \{\underline{\text{可換}}\ \text{アルチン局所}\ k\text{-代数}\ A\ \text{で}\ A/\mathfrak{m}_A = k\ \text{を満たすもの}\}$$

に制限したものを考えると、可換代数 Q_0 が制限関手 $\mathcal{F}|_{\mathcal{C}_k}$ を表現 (pro-represent) するのである。

さらに次のことを証明することができる。

Theorem 4.4 $\mathbb{F}$ の普遍持ち上げのパラメータ代数 P_0 を $P_0 = T/I_0$（ただし T は非可換形式的べき級数環で $I_0 \subseteq \mathfrak{m}_T^2$）と書き表したとき，次の k-ベクトル空間としての同型がある。

$$\mathrm{Ext}^1_R(\mathbb{F}, \mathbb{F})^2 \cong \mathrm{Hom}_k(I_0/I_0 \cap \mathfrak{m}_T^3, k)$$

ただし、この等式の左辺は、$\mathrm{Ext}^1_R(\mathbb{F}, \mathbb{F})$ の二つの元の Yoneda 積全体で張られる $\mathrm{Ext}^2_R(\mathbb{F}, \mathbb{F})$ の部分空間の意味である。

Corollary 4.5 上記の定理の記号のもとで，次の同値関係がある。

$$I_0 \subseteq \mathfrak{m}_T^3 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Ext}^1_R(\mathbb{F}, \mathbb{F})^2 = 0$$

以上のような考察をさらに、コホモロジーの比較として捉えることを考えてみる。そのために以下，$\mathbb{F} = (F, d)$ は右に有界な射影的複体とする。

今、 $\mathbb{F}$ の普遍持ち上げ $\mathbb{L}_0 = (F \widehat{\otimes}_k P_0, \Delta_0)$ が与えられたとしよう。任意の自然数 n について、次のような $R \otimes_k (P_0/\mathfrak{m}^n_{P_0})^{op}$ 上の射影的複体を得る。

$$\mathbb{L}_0^{(n)} = (F \otimes_k P_0/\mathfrak{m}^n_{P_0},\ \Delta_0 \otimes_{P_0} P_0/\mathfrak{m}^n_{P_0})$$

この複体は右 $P_0/\mathfrak{m}_{P_0}^n$-加群としては平坦なので、次のような導来圏の間の関手が得られる。

$$\mathbb{L}^{(n)} \otimes_{P_0/\mathfrak{m}_{P_0}^n} - \ : \ D_+(P_0/\mathfrak{m}_{P_0}^n) \to D_+(R)$$

この関手によって、 $k \mapsto \mathbb{F}$ であることに注意すれば、次の Yoneda 代数の間の射が得られる。

$$\mathrm{Ext}^{\bullet}_{P_0/\mathfrak{m}_{P_0}^n}(k,k) \to \mathrm{Ext}^{\bullet}_R(\mathbb{F},\mathbb{F})$$

この射を n に関して入射極限をとって、最終的に次のような射が得られる。

$$\rho^{\bullet} \ : \ \varinjlim \mathrm{Ext}^{\bullet}_{P_0/\mathfrak{m}_{P_0}^n}(k,k) \to \mathrm{Ext}^{\bullet}_R(\mathbb{F},\mathbb{F})$$

これもまた代数射であることに注意しよう。各 $i = 0, 1, 2, \ldots$ について, ρ^i がどのような写像であるかが問題である。

- $\rho^0 \ : \ \varinjlim \mathrm{Hom}_{P_0/\mathfrak{m}_{P_0}^n}(k,k) = k \to \mathrm{End}_R(\mathbb{F})$ は、自然な埋め込みであり、常に単射である。
- $\rho^1 \ : \ \varinjlim \mathrm{Ext}^1_{P_0/\mathfrak{m}_{P_0}^n}(k,k) = (\mathfrak{m}_{P_0}/\mathfrak{m}_{P_0}^2)^* \to \mathrm{Ext}^1_R(\mathbb{F},\mathbb{F})$ はいつも全単射である。

次に述べる ρ^2 の単射性こそが最初に予想した、「障害写像がコホモロジーの比較写像としてよく機能すること」の表れであり、パラメータ代数 P_0 を非可換と取ったからこそ成立する事実である。

Theorem 4.6 $\rho^2 \ : \ \varinjlim \mathrm{Ext}^2_{P_0/\mathfrak{m}_{P_0}^n}(k,k) \to \mathrm{Ext}^2_R(\mathbb{F},\mathbb{F})$ はいつも単射である。

Remark 4.7 ただし、必ずしも ρ^2 は全単射ではない。

References

[1] B. Fantechi et al, *Fundamental Algebraic Geometry, Grothendieck's FGA explained*, Mathematical Survey and Monographs, vol. 123, Amer. Math. Soc. (2005).

[2] Robin Hartshorne, *Lectures on deformation theory*, available from http://math.berkeley.edu /˜robin/.

[3] Michael Schlessinger, *Functors of Artin rings*, Trans. Amer. Math. Soc. vol. 130 (1968), 208–222.

[4] Yuji Yoshino, *Universal lifts of chain complexes over non-commutative parameter algebras*, preprint (2007).