Poisson 変形と Symplectic 多様体

阪大理　並河良典

§0. はじめに.

この小論では、正則な symplectic 2 型式をもった代数多様体 X を扱う. より正確には、非特異部分 X_{reg} 上に正則な symplectic 2型式 ω が存在して、X の特異点解消 $\tilde{X}$ をとると ω は $\tilde{X}$ 上の正則 2 型式に延長可能であるとき (X, ω) を symplectic 多様体と呼ぶ. (定義 1).
Symplectic 多様体は、K3 曲面や Abel 曲面上の半安定束のモジュライ空間としてあらわれるだけでなく、半単純複素リー環のべき軌道の閉包やその crepant 特異点解消などもそうである.
これら symplectic 多様体の変形理論を考えるのが この論文の目的である. Symplectic 多様体は自然に、Poisson 多様体とみなすことができる. Poisson 構造をこめた変形のことを Poisson 変形とよぶ(定義 4).

特に、Xが affine 多様体，もしくは，その特異点解消であるときには，Poisson 変形の理論は，有限次元的な理論になるので，大層，都合が良い。
主結果は，§1の定理5と§2の定理6である。

§1.

定義1 <u>Symplectic 多様体</u> (X, ω) とは，
$\mathbb{C}$上の正規代数多様体 X（次元は偶数次元 $2n$）と，Xの非特異部分 X_{reg} 上定義された正則2型式 ω の組で，次の条件を満たすもののことである：

(1) $d\omega = 0$, $\overset{n}{\wedge}\omega \neq 0$（$X_{reg}$ 上至る所で）

(2) Xの特異点解消 $f: \tilde{X} \longrightarrow X$ に対して，$f^{-1}(X_{reg})$ 上の2型式 $f^*\omega$ は，$\tilde{X}$ 全体の正則2型式に延長可能

例2
① Gを，$\mathbb{C}$上の半単純代数群，$\mathfrak{g}$をGの Lie 環とする。Gは，$\mathfrak{g}$に随伴的に作用する。$\mathfrak{g}$のべき零元xを通る軌道 O_x を考える。O_xの（$\mathfrak{g}$の中での）閉包 $\overline{O_x}$ の正規化を $\widetilde{O_x}$ とする。$\widetilde{O_x}$ は，O_x 上の Kostant-Kirillov 2型式 ω と合わせて symplectic 多様体となる。

② ①と同じ仮定の下で、"べき零コーン"

$$\mathcal{N} = \{ x \in \mathfrak{g} \mid x : べき零 \}$$

を考える。$\mathcal{N}$は、あるべき零軌道 (regular nilpotent orbit) の閉包になり、それ自身、symplectic 多様体になる。$\mathcal{N}$は、旗多様体 G/B (B: Borel) の余接束 $T^*(G/B)$ を特異点解消にもつ (Springer 特異点解消):

$$\mu : T^*(G/B) \longrightarrow \mathcal{N}.$$

<u>定義3.</u> Poisson 多様体 $(X, \{ , \})$ とは、

$\mathbb{C}$上の代数多様体 X と、$\mathbb{C}$-双線型，反対称形式

$$\{ , \} : \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X$$

で次を満たすものの対である。

1) $\{ab, c\} = a\{b, c\} + b\{a, c\}$

2) $\{\{a, b\}, c\} + \{\{b, c\}, a\} + \{\{c, a\}, b\} = 0$

注意：

Symplectic 多様体 (X, ω) は自然に Poisson 多様体 $(X, \{,\})$ になる：

実際 ω によって同型

$$\Omega^1_{X_{reg}} \simeq \Theta_{X_{reg}}$$

が決まり、両辺の2回ウェッジをとり、

$$\Omega^2_{X_{reg}} \simeq \bigwedge^2 \Theta_{X_{reg}}$$

が得られる。左辺の切断 ω に対応する bi-vector $\Theta \in \bigwedge^2 \Theta_{X_{reg}}$ のことを Poisson 2-vector と呼ぶ。

$$\{,\}_0 : \mathcal{O}_{X_{reg}} \times \mathcal{O}_{X_{reg}} \longrightarrow \mathcal{O}_{X_{reg}}$$

が $\{f, g\}_0 := \Theta(df \wedge dg)$ を満たすように定義される。X は正規多様体なので、$\{,\}_0$ は一意的に Poisson bracket

$$\{,\} : \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X$$

に拡張される。

次に、Kaledin, Ginzburg らによって定義された Poisson 変形について述べよう

定義4. $(X, \{,\})$ を Poisson 多様体,
S を局所 Artin $\mathbb{C}$-代数で residue field が $\mathbb{C}$
となるものとする: $S/m_S = \mathbb{C}$.
$T := \operatorname{Spec} S$ と置く.
$(\mathcal{X}, \{,\}_T)$ が $(X, \{,\})$ の T 上の Poisson 変形
であるとは:

1) $\mathcal{X}$ は T 上平坦な概型で
$$\mathcal{X} \times_T \{0\} \overset{\phi}{\simeq} X$$
2) $$\{,\}_T : \bigwedge^2_{\mathcal{O}_T} \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$$
は T 上の Poisson 構造で $\{,\}_T|_X = \{,\}$.

このとき, Poisson 変形関手 $PD_{(X,\{,\})}$ が

$$PD_{(X,\{,\})} : (\mathrm{Art})_{\mathbb{C}} \longrightarrow (\mathrm{Set})$$
$$\begin{array}{ccc} \in & & \\ S & \longmapsto & \left\{ (\mathcal{X}, \phi) \text{の同値類} \;\middle|\; \begin{array}{l} (\mathcal{X}, \{,\}_T) \text{は} T \text{上の Poisson 変形} \\ \phi : \mathcal{X} \times_T \{0\} \simeq X \end{array} \right\} \end{array}$$

によって定義される

通常の変形関手を

$$D_X : (Art)_{\mathbb{C}} \longrightarrow (Set)$$

とする。これら関手の接空間を記述しよう。

以下、$\mathbb{C}[\varepsilon]$は、"ring of dual numbers"

とする。すなわち、$\varepsilon^2 = 0$.

① (X, ω)を非特異 symplectic 多様体とする。

①-1. $D_X(\mathbb{C}[\varepsilon]) = H^1(X, \Theta_X)$.

証明は、SGA 1 にあるように標準的である。

次の2つの事実が、鍵になる

(1) Xの無限小自己同型は、$H^0(X, \Theta_X)$の元とみなせる

(2) Xがアファインであれば、Xの無限小変形は自明。

次に(X, ω)から決まる Poisson 構造を$\{\ ,\ \}$とする。

①-2. $PD_{(X, \{,\})}(\mathbb{C}[\varepsilon]) = \mathbb{H}^2(X, \Omega_X^{\geq 1})$

ここで、

$$\Omega_X^{\geq 1} : \quad \cdots \to 0 \to \underset{\deg 0}{\Omega_X^1} \xrightarrow{d} \Omega_X^2 \xrightarrow{d} \cdots$$

このステートメントは、algebraic category, analytic category 双方で正しい。ここでは、analytic category で論じる。

まず

$$\{(X^{an}, \{,\}) \text{ の無限小同型}\} \simeq \{v \in H^0(X^{an}, \Theta_{X^{an}}) \mid L_v\omega = 0\}$$

L_v は、Lie微分である。このとき

$$L_v\omega = i(v)d\omega + d(i(v)\omega) = d(i(v)\omega)$$

より、次の同一視が得られる：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \{v \mid L_v\omega = 0\} \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \Theta_{X^{an}} \arrow[d, "\simeq"] & & \\
0 \arrow[r] & dO_{X^{an}} \arrow[r] & \Omega^1_{X^{an}} \arrow[r, "d"] & \Omega^2_{X^{an}} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

したがって

(1) $$\{(X^{an}, \{,\}) \text{ の無限小自己同型}\} = H^0(dO_{X^{an}}) = \mathbb{H}^1(\Omega^{\geq 1}_{X^{an}})$$

次に

(2) $$X^{an} : \text{Stein},\ H^2(X^{an}, \mathbb{C}) = 0 \Longrightarrow (X^{an}, \{,\}) \text{ の(無限小)変形は自明}$$

であることを見よう。

まず、X^{an} は Stein なので、X^{an} 自身の無限小変形は、自明である。

そこで，$\omega_\varepsilon := \omega + \varepsilon\omega'$ とおいて，

$$(X^{an} \times \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[\varepsilon], \omega) \text{ と } (X^{an} \times \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[\varepsilon], \omega_\varepsilon)$$

が同値であることをみればよい．

$H^2(X^{an}, \mathbb{C}) = 0$ なので，$\omega' = d\eta$

となるような正則1型式 η が見つかる．

これに対応して，$v \in H^0(X^{an}, \Theta_{X^{an}})$ が決まる

（すなわち，$i(v)\omega = \eta$）．

v に対応する無限小自己同型

$$\varphi_v : X^{an} \times \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[\varepsilon] \longrightarrow X^{an} \times \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[\varepsilon]$$

を考えれば，$\varphi_v^*(\omega) = \omega_\varepsilon$ である．

(1), (2) を用いると，①-2 がわかる．

注意　$H^i(X, \Theta_X) = 0$ $(i = 1, 2)$ のとき

$\mathbb{H}^2(X, \Omega_X^{\geq 1}) = H^2(X^{an}, \mathbb{C})$ が成立する．

証明は，distinguished triangle

$$\Omega_X^{\geq 1} \to \Omega_X^{\cdot} \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{[1]} \Omega_X^{\geq 1}[1]$$

を考え，$\mathbb{H}^2(\Omega_X^{\cdot}) = H^2(X^{an}, \mathbb{C})$ (Grothendieck)

に注意すればよい．

この結果は，例2，② などに対して有効である．

9

X が non-compact な場合, 一般に

$$\dim H^1(X, \Theta_X) = \infty$$

である. しかし,

$$\dim H^2(X^{an}, \mathbb{C}) < \infty$$

である. このように, 通常の変形理論は無限次元的であるが, Poisson 変形は, "有限次元"的である. これが Poisson 変形を考えることの利点である.

② (X, ω) が (一般の特異点をもった) symplectic 多様体で, $\mathrm{Codim}(\mathrm{Sing}(X), X) \geq 4$ の場合

$$PD_{(X, \{,\})}(\mathbb{C}[\varepsilon]) = PD_{(X_{reg}, \{,\})}(\mathbb{C}[\varepsilon])$$

が成立する. 証明は, [Na 1], Proposition 13 を参照せよ.

重要なのは, $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$ $(i=1,2)$ の時で, depth の議論から, $H^i(X_{reg}, \mathcal{O}_{X_{reg}}) = 0$ $(i=1,2)$ がわかり, 先の注意から,

$$PD_{(X_{reg}, \{,\})}(\mathbb{C}[\varepsilon]) = H^2(X_{reg}, \mathbb{C})$$

がわかる.

最後に、

③ (X,ω) が symplectic 多様体で

$$\mathrm{Codim}(\mathrm{Sing}(X), X) = 2$$

の場合が残るが、この場合 ② の主張は成立せず、より詳しい分析が必要となる。
詳しくは、[Na 2] を見られたい。

次が成り立つ（[Na 2], Theorem 2.3）。

<u>定理 5.</u> (X,ω) を affine symplectic 多様体とする。
$\{\ ,\ \}$ を ω から決まる自然な Poisson 構造とする。
このとき

$$\dim PD_{(X,\{,\})}(\mathbb{C}[\epsilon]) < \infty$$

$PD_{(X,\{,\})}$ は unobstructed.

§2.

この章では、定理5の応用について述べる。
まず、最初に、Kaledin によって導入された代数的 twistor 変形について説明しよう。
Y を affine symplectic 多様体，X を高々 terminal 特異点しか持たない Y の crepant 部分解消とする：$\pi : X \longrightarrow Y$

ここで、$\mathcal{X}$は、射影的と仮定する。$H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$ ($\forall i > 0$) である。

$L \in \mathrm{Pic}(X_{reg}^{an})$ を固定する。X_{reg}^{an} は、X_{reg} に付随した analytic space である。

今から、L に付随した twistor 変形 を定義する。

構成のポイントは、T^1-持ち上げの原理 にある。

我々は、Poisson 変形を考えているので、§1より、T^1 に対応するのは、$H^2(X_{reg}^{an}, \mathbb{C})$ である。

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Pic}(X_{reg}^{an}) & \simeq & H^2(X_{reg}^{an}, \mathbb{Z}) & \to & H^2(X_{reg}^{an}, \mathbb{C}) \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
L & & \longmapsto & & [L]
\end{array}
$$

$[L]$ に対応して、$(X, \{,\})$ の 1次の無限小変形 $(X_1, \{,\}_1)$ を得る。完全系列

$$
\to \underset{\overset{\parallel}{0}}{H^1(\mathcal{O}_{X_{reg}^{an}})} \to H^1(\mathcal{O}^*_{X_{1,reg}^{an}}) \to H^1(\mathcal{O}^*_{X_{reg}^{an}}) \to \underset{\overset{\parallel}{0}}{H^2(\mathcal{O}_{X_{reg}^{an}})}
$$

によって、直線束 L は、一意的に $X_{1,reg}$ 上の直線束 L_1 に持ちあがる。$A_i := \mathbb{C}[t]/t^{i+1}$ とおき、L_1 に対応する類 $[L_1] \in H^2(X_{reg}^{an}, A_1)$ を考える。$[L_1]$ に対応して、(T^1-持ち上げの原理によって)、2次の無限小変形

$(X_2, \{, \xi_2)$ が決まる. 以下同様の手続きによって

$(X_3, \{, \xi_3), \cdots (X_n, \{, \xi_n), \cdots$ と無限小変形が

順次決まっていく. $Y_n := \mathrm{Spec}\,\Gamma(X_n, \mathcal{O}_{X_n})$

と置くことにより 射 $\pi_n : X_n \longrightarrow Y_n$ が決まる.

$\{X_n\}_{n \geq 1}$ は. $\hat{Y} := \mathrm{Spec}\,\varprojlim_n \Gamma(X_n, \mathcal{O}_{X_n})$ 上

の射影的スキーム

$$\hat{\pi} : \hat{X} \longrightarrow \hat{Y}$$

に代数化される. (EGA III, §5). $\hat{Y}$ は. $\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[[t]]$

上の affine スキームであるが、有限型ではない.

そこで. 次の仮定を課す:

$\ast)$
- Y は点 0 を中心とするような. 荷重正の $\mathbb{C}^*$-作用を持つ
- Y_{reg} 上の symplectic 型式 ω は. この作用に関して. 正の荷重を持つ

例 2, ① の $\tilde{\mathcal{O}}_x$ や. 商特異点として得られる symplectic 多様体は. $\ast)$ の性質を持つ. $\ast)$ の下で. $\hat{\pi}$ は.

$$\Pi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$$

と代数化される.

ここで、πは、射影的な双有理射で、$\mathcal{Y}$は、
Spec $\mathbb{C}[t]$上有限型である。$\mathcal{X}$を、(X, ξ, ζ)の
Lに関する<u>quasi-twistor変形</u>と呼ぶ。特に、
$L \in \mathrm{Pic}(X^{an}_{reg})$が、$\mathrm{Pic}(X^{an})$の元からきているときに
$\mathcal{X}$を、Lに関する<u>twistor変形</u>と呼ぶ。

Twistor変形は、以下に述べるように特筆すべき性質を持っている（[Na1, Theorem 19, Proposition 24]）:

<u>性質</u>　$\mathcal{X}$を、$L \in \mathrm{Pic}(X^{an})$に関するtwistor変形とする。

(1) $\mathcal{X} \longrightarrow \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[t]$は、Xの局所自明な変形である。

(2) Lがπ-ampleのとき、

$$\pi_\eta : \mathcal{X}_\eta \longrightarrow \mathcal{Y}_\eta$$

は、同型である。ここで、$\eta \in \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[t]$は、generic point、$\mathcal{X}_\eta$、$\mathcal{Y}_\eta$は、$\eta$上のfiberである。

もともとのπは、同型とは限らないので、Xの中には、πでつぶれる曲線Cがあるかもしれない。しかし、変形においてCは、横に延びず、π_ηは同型になる。これが(2)の意味である。

14.

<u>定理 6.</u> (Y, ω)を(*)を満たす affine symplectic 多様体とする。このとき、次は同値：

(1) Yは crepant 特異点解消を持つ。

(2) Yは Poisson 変形によって smoothing 可能。

以下、定理6の証明の概略を述べる。

(1) $\Rightarrow$ (2)： $\pi : X \longrightarrow Y$を crepant 特異点解消とする。$X$は symplectic 多様体なので Poisson 構造をもつ。Lを π-ample な直線束として、Lに付随する twistor 変形 $\pi^L : \mathcal{X}^L \longrightarrow \mathcal{Y}^L \longrightarrow \mathbb{A}^1$ を考える。Xは非特異なので、$\mathcal{X}^L$も非特異である。したがって generic fiber $\mathcal{X}^L_t$も非特異になる。ここで twistor 空間の<u>性質</u>，(2)を用いると、$\mathcal{X}^L_t$と$\mathcal{Y}^L_t$は同型であり、$\mathcal{Y}^L \longrightarrow \mathbb{A}^1$は$Y$の Poisson 変形による smoothing を与える。

(2) $\Rightarrow$ (1)： この部分には、定理5と、最近進展のあった、極小モデルに関する結果を用いる。Yの特異点解消 $f : Z \longrightarrow Y$をとる。

Z/Y に極小モデルプログラムを適用すると、Y の部分特異点解消 X を得る (Birkar-Cascini-Hacon-McKernan, さらに本予稿集の藤野氏の論説も参照):

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, dashed] \arrow[dr] & \\ \pi: X \arrow[rr] & & Y \end{tikzcd}$$

π は、crepant で、X は高々 $\mathbb{Q}$-分解的な terminal 特異点しか持たない。(2) の仮定の下で、X が非特異であることを証明しよう。$R^1\pi_*\mathcal{O}_X = 0$, $\pi_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$ なので、2つの関手 $PD_{(X,f,\xi)}$, $PD_{(Y,f,\xi)}$ の間に自然な射が存在する:

$$\varphi : PD_{(X,f,\xi)} \longrightarrow PD_{(Y,f,\xi)}$$

定理5より $PD_{(Y,f,\xi)}$ は unobstructed である。また、$PD_{(X,f,\xi)}$ が unobstructed であることも容易に分る ([Na 1], Corollary 15)。
このとき、次の2つを示すことができる

- φ のファイバーは有限
- $\dim PD_X(\mathbb{C}[\epsilon]) = \dim PD_Y(\mathbb{C}[\epsilon])$.

この2つの事実から、φが"finite covering"であることがわかる。つまり、Yの Poisson 変形は、up to finite cover で、Xの Poisson 変形から"おちて"くるわけである。

$$\mathcal{Y} \longrightarrow \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[[t]]$$

を、Yの Poisson 変形による smoothing とする。
適当に底変換を行うことにより、この Poisson 変形は、Xの Poisson 変形からおちてくるものと仮定できる：

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X} \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr] & & \mathcal{Y} \arrow[dl] \\
& \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[[t]] &
\end{tikzcd}$$

Xは、$\mathbb{Q}$-分解的なので、$\mathcal{X} \longrightarrow \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[[t]]$ は、局所自明なXの変形を与える。(証明には、twistor 変形の性質(1)を用いる)。

πは、crepant で、$\mathcal{Y}_\eta$ は非特異なので、$\pi_\eta : \mathcal{X}_\eta \longrightarrow \mathcal{Y}_\eta$ は、同型射である。したがって $\mathcal{X}_\eta$ も非特異であり、上に述べた局所自明性から元々の X も非特異である。

注意

- 一般の有理 Gorenstein 特異点 Y に対して，
定理 6 は，どちら向きも正しくない

(a) $Y \ni 0$ を，$\frac{1}{3}(1,1,1)$ 型商特異点
とする．Schlessinger の定理より Y は，変形に関して
リジッドである．Y は，0 でブローアップすると，
crepant 特異点解消 $\pi : X \longrightarrow Y$ が
得られる．

(b) Y を，$\mathbb{C}^4$ の中で $x^2 + y^2 + z^2 + w^3 = 0$
によって定義される affine 多様体とする．Y は，明らかに
変形で smoothing 可能である．しかし，Y は，crepant
特異点解消を持たない．

- Y を，射影的 symplectic 多様体とする．
このとき，定理 6 の類似が成立する：

定理 6′：次は同値
(1) Y は，crepant 特異点解消をもつ
(2) Y は，(通常の) 変形で smoothing 可能．

Yが射影的であれば、通常の変形は、すべてPoisson変形から得られることが分かる。

しかし、Yが、compactで、非Kählerな、symplectic多様体の場合、Poisson変形からはこない変形が存在するので注意が必要である。

参考文献

[Na 1] Namikawa, Y.: Flops and Poisson deformations of symplectic varieties, to appear in Hironaka 77 birthday issue of Publ. R.I.M.S., math.AG/0510059

[Na 2] Namikawa, Y.: Poisson deformations of affine symplectic varieties, math.AG/0609741