Moduli of plane quartics, Göpel invariants and Borcherds products

名古屋大学大学院多元数理科学研究科　金銅誠之

§0. はじめに

コンパクト Riemann 面とその Jacobian の研究をはじめとして、アーベル多様体とテータ関数や Siegel 上半空間上の保型形式の研究は歴史が古い。例えば、種数 3 の超楕円でないコンパクトリーマン面の標準モデルは平面 4 次曲線であるが、Jacobian の周期を考えることで、そのモジュライ空間は 3 次の Siegel 上半空間のモジュラー群による商として表せる。

本小論では、平面 4 次曲線に $K3$ 曲面を対応させ、その周期を使ってモジュライ空間が 6 次元の複素超球の算術商として表せること、さらに近年 Borcherds [B1] , [B2] によって得られた IV 型有界対称領域上の保型形式論を用いたモジュライの研究の試みを紹介する。

本論に入る前にこの研究の出発点となった 3 次曲面の場合にふれておく。3 次曲面は有理曲面であり、そのホッジ構造は自明となるためその周期理論は知られていなかったが、10 年ほど前に Allcock-Carlson-Toledo [ACT] が 3 次曲面のモジュライ空間を 4 次元 complex ball の算術的部分群による商として記述することに成功した。さらに、この complex ball は IV 型領域の部分領域になっているが、Allcock, Freitag [AF] は Borcherds による IV 型領域上の保型形式を complex ball に制限することで、このモジュライの射影モデルを与えた。この射影モデルは成木 [N] による Cayley の Cross ratio を用いた射影モデルと本質的に一致する。3 次曲面は次数 3 の del Pezzo 曲面である。一方、平面 4 次曲線で分岐する射影平面の 2 重被覆は次数 2 の del Pezzo 曲面である。3 次曲面と類似の結果が得られないか、という素朴な問いが本研究の動機である。

本論では、まず §1 で平面 4 次曲線のモジュライが 6 次元の複素超球の算術商として表せることを述べる。この節の詳しいことは参考文献 [K1] を見られたい。次に §2 で Borcherds の結果をどう使うかを説明する。論文は準備中であるが未完成である。種数 3 の超楕円曲線の場合には同様の結果を [K2] で発表済みなので興味のある方はそちらを見られたい。

§1. 平面４次曲線のモジュライと複素超球の算術商

(1) A $K3$ surface associated to a smooth plane quartic.

C を非特異な平面 4 次曲線とし $f(x,y,z)=0$ が定義方程式とする。新たな変数 t を導入し、4 次曲面

$$X : f(x,y,z) = t^4$$

を考えると X は $K3$ 曲面であり、位数 4 の射影変換

$$(x:y:z:t)\to(x:y:z:\sqrt{-1}t)$$

は X の位数 4 の自己同型 σ を引き起こす。X は σ を被覆変換とする射影平面の C で分岐する 4 次の巡回被覆であるが、その中間の射影平面の C で分岐する 2 次の被覆を R とすると、R は 2 次の del Pezzo 曲面となることが知られている。さらに R は射影平面の一般の位置にある 7 点の blow up で得られることも知られている（例えば [DO] 参照)。このことから R の Neron-Severi 格子は符号が $(1,7)$ の odd unimodular 格子と同型である。直線の引き戻しの class を e_0, 7 点の blow up の例外曲線を $e_1,...,e_7$ とすると、$\{e_0,e_1,...,e_7\}$ が Neron-Severi 格子の基底となっている。

一方 X の Neron-Severi 格子 S_X は、C が generic な場合、R の二重被覆であることから符号が $(1,7)$ の even lattice で

$$S_X\cong\langle 2\rangle\oplus\langle -2\rangle^{\oplus 7}$$

であることが分かる。S_X の $H^2(X,\mathbf{Z})$ の中での直交補空間 T_X は transcendental lattice と呼ばれるが、T_X の符号は $(2,12)$、$\det(T_X)=\pm 2^8$ となり、

$$T_X\cong T=U\oplus U(2)\oplus D_4^{\oplus 2}\oplus\langle -2\rangle^{\oplus 2}$$

が成り立つ。ただし U は even unimodular, 符号 $(1,1)$ の lattice, $U(2)$ は U の交点形式を 2 倍した lattice, D_4 は D_4 型の Dynkin 行列を交点行列とする lattice である。X には自己同型 σ が作用していたが、σ^* の T_X への作用に対応する lattice T の自己同型を ρ とする。

(2) Period domain.

まず

$$\mathcal{D}=\{\omega\in\mathbf{P}(T\otimes\mathbf{C}):(\omega,\bar{\omega})>0,(\omega,\omega)=0\}$$

と置くと、$\mathcal{D}$ が上の $K3$ 曲面の周期領域（2 つの IV 型有界対称領域の disjoint union）を与える。今 の場合、$K3$ 曲面だけでなく、$K3$ 曲面とその自己同型 σ の組みを考えたい。$K3$ 曲面の正則 2 形式 ω_X は σ^* の固有ベクトルになっていることに注意し、次のように周期領域を定義する。まず ρ の固有空間への分解は

$$T\otimes\mathbf{C}=V_+\oplus V_-$$

となっている。ただし $V_\pm = \{\omega : \rho(\omega) = \pm\sqrt{-1}\omega\}$ とする。ρ の性質から、$V_\pm$ は共に 7 次元が分かる。$V_\pm$ の点 ω は $(\omega,\omega)=0$ を満たすことが定義から容易に導ける。従って

$$\mathcal{B} = \mathcal{D} \cap \mathbf{P}(V_+) = \{\omega \in \mathbf{P}(V_+) : (\omega, \bar{\omega}) > 0\}$$

が $K3$ 曲面とその自己同型の組みの周期領域である。Lattice T の符合が $(2,12)$ であることより、$V_\pm$ 上の Hermitian form $(\omega,\bar{\omega})$ の符合は $(1,6)$ であることが従う。すなわち適当な座標を選べば

$$(\omega,\bar{\omega}) = z_0\bar{z}_0 - z_1\bar{z}_1 - \cdots - z_6\bar{z}_6$$

とでき、さらに $z_0 = 1$ とできるので $\mathcal{B}$ は 6 次元 complex ball と同型である。$\mathcal{B}$ の各点には（$K3$ 曲面の周期写像の全射性より）$K3$ 曲面が対応しているが、必ずしも ρ は自己同型からひき起こされているとは限らない。ρ が ample class を保つという条件が必要となる。いま T の元 r で $r^2=-2$ のものに対し

$$H_r = \{\omega \in \mathcal{B} : (\omega, r) = 0\}, \quad \mathcal{H} = \bigcup H_r$$

と置く。ただし r は T の全ての (-2)-vector を動くとする。すると、ρ が ample class を保つための必要十分条件は $\omega \notin \mathcal{H}$ である。

Remark. 簡単な計算で $\langle r, \rho(r)\rangle = 0$ が分かり、従って

$$\delta = \frac{r+\rho(r)}{2}$$

とおくと $\delta^2=-1$ である。さらに $H_r = \mathcal{B} \cap \delta^\perp$ であることも確かめられる。

次に算術的部分群を定義する。まず $T^* = \mathrm{Hom}(T, \mathbf{Z})$ とすると、$A_T = T^*/T \cong (\mathbf{F}_2)^8$ が分かる。写像

$$q_T : A_T \quad \to \mathbf{Q}/2\mathbf{Z}$$

が $q_T(x \bmod \mathrm{T}) = \langle \mathrm{x}, \mathrm{x}\rangle \bmod 2$ で定義される。A_T の指数 2 の部分群 A'_T で q_T のそこへの制限が $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ に値を持つものが存在する。すなわち $q_T \mid A'_T$ は $\mathbf{F}_2$ 上の 7 次元二次形式となる。$q_T \mid A'_T$ は radical $\langle\kappa\rangle$ を持つが、modulo radical で q_T は $\mathbf{F}_2$ 上の 6 次元 symplectic form を与える。このことから q_T の直交群を $O(q_T)$ と表すと、$O(q_T) \cong \mathrm{Sp}(6, \mathbf{F}_2)\cdot\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ であることが従う。Lattice T の自己同型全体のなす群を $O(T)$ で表す。以上の準備の下に

$$\Gamma = \{\gamma \in O(T) : \gamma \circ \rho = \rho \circ \gamma\},$$

$$\tilde{O}(T) = \mathrm{Ker}\{O(T) \longrightarrow O(q_T)\},$$

$$\Gamma' = \Gamma \cap \tilde{O}(T)$$

と置く。写像 $\Gamma \to O(q_T)$ は全射であり、従って

$$\Gamma/\Gamma' \cong O(T)/\tilde{O}(T) \cong O(q_T) \cong \ \mathrm{Sp}(6, \mathbf{F}_2) \cdot \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$$

が成り立つ。Γ は $Aut(\mathcal{B})$ の部分群で properly discontinuous に $\mathcal{B}$ に作用している。まとめると

Proposition([K1]). 非特異な平面 4 次曲線のモジュライ空間から $(\mathcal{B} - \mathcal{H})/\Gamma$ への同型写像が上の構成で与えられる。さらに曲線のレベル 2 構造つきのモジュライ空間から $(\mathcal{B} - \mathcal{H})/\Gamma'$ への $O(q_T)$-equivariant な同型写像も引き起こされる。

(3) Discriminant locus.

上では非特異な 4 次曲線に対応する $K3$ 曲面の周期が $\mathcal{B} - \mathcal{H}$ に含まれることを見た。$\mathcal{H}$ は T の元 r で $r^2 = -2$ で決まるが、このような r は 2 つの軌道からなる。$r/2 \in T^*$ または $r/2 \notin T^*$ かの二つの場合に対応する。ところで $A_T = T^*/T \cong (\mathbf{F}_2)^8$ は次のベクトルから成る：

Type (00) : $x = 0,\ \#x = 1$;
Type (0) : $x \neq 0,\ q_T(x) = 0,\ \#x = 63$;
Type (1) : $q_T(x) = 1, x \neq \kappa,\ \#x = 63$;
Type (10) : $x = \kappa,\ \#x = 1$;
Type (3/2) : $q_T(x) = -1/2,\ \#x = 72$;
Type (1/2) : $q_T(x) = -3/2,\ \#x = 56$.

$r/2 \notin T^*$ の場合、$\delta = \frac{r+\rho(r)}{2}$ は Type (1) のベクトルであり、$r/2 \in T^*$ の場合、$r/2$ は Type (3/2) で、対応する δ は Type (10) である。$\mathcal{H}$ は modulo Γ' で 63 個の成分と 36(=72/2) 個の成分から成る。63 個の成分は射影平面の 7 点が一般の位置でなくなる 63 個の条件、すなわち (i) 二点が一致する（21 通り）、三点が直線上にある（35 通り）、6 点が二次曲線上にある（7 通り）に対応している。別な言い方をすると因子

$$e_i - e_j,\ 1 \leq i < j \leq 7;$$

$$e_0 - e_i - e_j - e_k,\ 1 \leq i < j < k \leq 7;$$

$$2e_0 - e_1 - e_2 - e_3 - e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_i$$

が effective であることに対応している。また 36 個の成分は、種数 3 の曲線のレベル 2 構造付きのモジュライ空間の中の超楕円曲線のなす 36 個の既約成分に対応している。

§3 保型形式

この節では、Borcherds [B1] の IV 型対称領域上の保型形式論を用いた $\mathcal{B}$ 上の保型形式の構成について述べる。

(1) Lifting.

一変数の modular form は cusp の回りで Fourier 展開が考えられる。IV 型有界対称領域 $\mathcal{D}$ の場合は、次のように 1 次元の boundary component（cusp の一般化）の回りで Fourier-Jacobi 展開をもつ。まず 1 次元の boundary component に対し $\mathcal{D}$ は次のように表示できる（一変数の場合の上半平面 H^+ に相当する）:

$$\mathcal{D} : Im(\tau) \cdot Im(w) - Q(Im(z_1), ..., Im(z_n)) > 0, \quad Im(\tau) > 0.$$

ここで $\tau, w \in H^+$, $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbf{C}^n$ とし、Q は $\mathbf{Q}$ 上定義された正定値の二次形式である。F を $\mathcal{D}$ 上のある算術的部分群に関する重さ k の保型形式とするとき

$$F(\tau, z, w) = \sum_{m \geq 0} \theta_m(\tau, z) exp(mw)$$

と展開され、係数に現れる $\theta_m(\tau, z)$ を重さ k, 指数 m の Jacobi form と呼ぶ。

逆に 1 変数の重さ k の保型形式 f が与えられた時、これに適当なテータ関数を掛けることで重さ k, 指数 1 の Jacobi form が得られる。これに Hecke 作用素を施すことで 指数 k の Jacobi form が得られる。これらを足し上げて $\mathcal{D}$ 上の保型形式を構成するプロセスを (additive) Lifting と呼ぶ。IV 型の場合は Gritsenko 等の仕事があったが、Borcherds [B1] が一般化している。

(2) Weil representation.

Lifting を構成する場合 1 変数の保型形式そのものではなく、ベクトル値の保型形式を考える方が都合が良い。そこで $A_T = T^*/T$ の群環 $\mathbf{C}[A_T]$ を考える。$\alpha \in A_T$ に対し、対応する $\mathbf{C}[A_T]$ の生成元を e_α とし、$SL(2, \mathbf{Z})$ の $\mathbf{C}[A_T]$ への表現 ρ を次のように定義する。$SL(2, \mathbf{Z})$ の生成元として $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を考え、

$$\rho(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) e_\alpha = e^{\pi\sqrt{-1}\langle\alpha,\alpha\rangle} e_\alpha; \quad \rho(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) e_\alpha = \frac{\sqrt{-1}}{16} \sum_{\delta} e^{-2\pi\sqrt{-1}\langle\delta,\alpha\rangle} e_\delta$$

で ρ を定義する。$SL(2,\mathbf{Z})$ の作用の代わりに、実際は、$SL(2,\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})$ の作用を考えればよい。この $SL(2,\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})$ の表現を既約表現に分解したとき、$\rho(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$ および $\rho(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$ が共に $-\sqrt{-1}$ 倍で作用する 1 次元既約表現の 15 個のコピーの直和と成っている 15 次元の部分空間 $W \subset \mathbf{C}[A_T]$ が存在することが、計算で分かる。$\mathbf{C}[A_T]$ には $O(q_T)$ が自然に作用しているが、ρ の作用と可換である。従って $O(q_T)$ は W に作用しているが、この作用は既約である。

(3) Automorphic forms.

正則写像
$$f : H^+ \to \mathbf{C}[A_T]$$
が重さ k の ρ に関するベクトル値保型形式であるとは、$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$ に対して
$$f(M\tau) = \rho(M)(c\tau+d)^k f(\tau)$$
が成り立つときをいう。

$\eta(\tau)$ を Dedekind の eta 関数とすると、$\theta \in W$ に対し $\eta(\tau)^{-6}\theta$ は重さ -3 の ρ に関する保型形式である。(1) で述べた Lifting を使うことで $O(q_T)$-equivariant な線形写像
$$\phi : W \to W_2(\tilde{O}(T))$$
を得る。ただし $W_4(\tilde{O}(T))$ は $\tilde{O}(T)$ に関する meromorphic な重さ 2 の $\mathcal{D}$ 上の保型形式のなすベクトル空間で、その上には $O(q_T) \cong O(T)/\tilde{O}(T)$ が自然に作用している。ϕ は単射が分かり、このようにして重さ 2 の保型形式のなす 15 次元のベクトル空間 $\phi(W)$ を得る。

Linear system $\phi(W)$ の性質を調べる必要があるが、そのために良い性質を持つ保型形式をこの中から探すことから始める。そのために少しことばを用意する。

(A_T, q_T) の 3 次元部分空間 V で互いに直交する 3 つの non-zero isotoropic vectors で生成される 3 次元部分空間 I を maximal totally isotropic subspace と呼ぶ。$V = \langle I, \kappa\rangle$ とおくと、 $\alpha \in A_T$ で $q_T(\alpha) = 3/2$, $\langle \alpha, c\rangle = 0$, $c \in I$ を満たすものが V を法として一意的に存在する。そこで
$$M_+ = \{\alpha + c : c \in I\}, \quad M_- = \{\alpha + c + \kappa : c \in I\},$$
$$\theta_V = \sum_{\beta \in M_+} e_\beta - \sum_{\beta \in M_-} e_\beta \in \mathbf{C}[A_T]$$

と定めると次が成り立つ：

Lemma. (1) $\theta_V \in M$;

(2) $t_a(\theta_V) = -\theta_V,\ (a \in V,\ q_T(a) = 1)$. ここで t_a は $t_a(x) = x + \langle a, x\rangle a$ で定まる $O(q_T)$ の元である。

t_a は $O(T)$ の元にリフトできる。すなわち r を T の元で $r^2 = -2$ のベクトルで $\frac{r+\rho(r)}{2} \bmod \mathrm{T} = \mathrm{a}$ を満たすものを取ると、 $\delta = \frac{r+\rho(r)}{2}$ に付随した鏡映

$$s_\delta(x) = x + \frac{\langle x, \delta\rangle}{2}\delta$$

が A_T 上 t_a を引き起こす。$\eta(\tau)^{-6}\theta_V$ の lifting を F_V と表すと、F_V は重さ 2 の $\mathcal{D}$ 上の meromorphic な保型形式であるが、Lifting が $O(q_T)$-equivariant であることと、上の Lemma, (2) より因子 (F_V) は少なくとも

$$\sum_{a\in V,\ q_T(a)=1} \mathcal{D}_a$$

を含む。但し

$$\mathcal{D}_a = \sum_\delta \delta^\perp$$

は可算無限個の超平面の和集合である。ここで δ は $\delta^2 = -1$ 且つ $\delta \bmod \mathrm{T} = \mathrm{a}$ を満たす T のベクトル全体を動く。

$\mathcal{D}_1$ を $\mathcal{D}_a$ 全体 (a が Type (1) の A_T のベクトル全体を考える) の和とする。同様に $\mathcal{D}_{10} = \mathcal{D}_\kappa$ と表す。また Type (1/2), (3/2) のベクトル a に対し、それぞれ T の元 δ で $\delta \bmod \mathrm{T} = \mathrm{a}$ 且つ $\delta^2 = -3/2, -1/2$ を考えることで、$\mathcal{D}_{1/2}, \mathcal{D}_{3/2}$ が定義される。

この記号を用いると、Borcherds [B1] の Theorem 14.3 より、 F_V の極は θ_V の support に現れる 16 個の長さ $-1/2$ のベクトル a に付随した $\mathcal{D}_a$ に沿った 2 次の極から成ることが従う。

F_V の零点を決定するために Borcherds [B1], [B2], Freitag [F] の無限積表示を持つ保型形式の理論を使う。詳しいことは省略するが、結果は以下の通りである。

Theorem. 因子

$$D = m_1\mathcal{D}_1 + m_{10}\mathcal{D}_{10} + m_{1/2}\mathcal{D}_{1/2} + m_{3/2}\mathcal{D}_{3/2}$$

を考える。条件

$$7m_1 + m_{10} + 4m_{3/2} = 0, \quad -9m_1 + m_{10} + 32m_{1/2} = 0$$

が成り立てば、D は $\mathcal{D}$ 上の meromorphic な保型形式（$O(T)$ の指数有限の部分群に関する）の因子であり、その重さは

$$2 \cdot 3^2 m_1 + 2^5 \cdot 5 m_{1/2}$$

で与えられる。

特に次を得る：

Corollary. $\mathcal{D}$ 上の重さ 18 の meromorphic な保型形式 Θ でその因子が

$$\mathcal{D}_1 + 9\mathcal{D}_{10} - 4\mathcal{D}_{3/2}$$

で与えられるものが存在する。

Corollary を用いることで、F_V の因子を決定することができる。今 Ψ を全ての V にわたる F_V の積とする。Maximal totally isotropic subspaces の個数が 135 個である。各 V には κ が含まれ、その他丁度 7 個の $q_T(a) = 1,\ a \neq \kappa$ を満たすものが含まれることから、Ψ は重さ 270 で各 $\mathcal{D}_a$ $(q_T(a) = 1,\ a \neq \kappa)$ 上で少なくとも重複度 $135 \times 7/63 = 15$ で零、$\mathcal{D}_\kappa$ 上で少なくとも重複度 135 の零を持つ。さらに 各 $\mathcal{D}_a$ $(q_T(a) = -1/2)$ 上で重複度 $135 \times 16 \times 2/72 = 60$ の極を持つ。一方で Θ^{15} は Ψ と同じ重さで各 $\mathcal{D}_\alpha(q_T(a) = 1,\ a \neq \kappa)$ 上で丁度重複度 15 で零、$\mathcal{D}_\kappa$ 上で丁度重複度 135 の零を持ち、$\mathcal{D}_a$ $(q_T(a) = -1/2)$ 上で重複度 $135 \times 16 \times 2/72 = 60$ の極を持つ。よって比を取り Koecher 原理を用いる事で Θ^{15} と Ψ は定数倍の違いであることが分かる。以上から F_V の零点が完全に決まった。

15 次元の保型形式からなる linear system $\phi(W)$ を $\mathcal{B}$ に制限することで $O(q_T)$-equivariant な有理写像

$$\Phi_{|\phi(W)|} : \mathcal{B}/\Gamma' \to \mathbf{P}^{14}$$

が定まる。q_T の有限幾何的な性質から、この有理写像の像は 63 個の三次関係式を満たすことが分かる。$\Phi_{|\phi(W)|}$ がその像の上への双有理写像にならないかは次の問題であるが、まだ未解決である。

Remark. Coble [C], [DO] は Göpel 関数を使ったレベル 2 構造付きの平面 4 次曲線のモジュライの $\mathbf{P}^{14}$ への $W(E_7)$-equivariant な 有理的な埋め込みで、その像が 63 個の三次関係式を満たすものを与えている。ここで $W(E_7)$ は E_7 型ルート系のワイル群であるが、$O(q_T) \cong W(E_7)$ である。それだけでなく Göpel 関数も maximal totally isotropic subspace I に対して定義される。これから上の $\Phi_{|\phi(W)|}$ は Coble の与えた有理写像と一致することが予想されるが、この予想も未解決である。

Reference

[ACT] D. Allcock, J. A. Carlson, D. Toledo, *The Complex Hyperbolic Geometry of the Moduli Space of Cubic Surfaces*, J. Algebraic Geometry, **11** (2002), 659–724.

[AF] D. Allcock, E. Freitag, *Cubic surfaces and Borcherds products*, Comm. Math. Helv., **77** (2002), 270–296.

[B1] R. Borcherds, *Automorphic forms with singularities on Grassmannians*, Invent. Math. **132** (1998), 491–562.

[B2] R. Borcherds, *The Gross-Kohnen-Zagier theorem in higher dimensions*, Duke Math. J., **97** (1999), 219–233.

[C] A. Coble, *Algebraic geometry and theta functions*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. **10** Providence, R.I., 1929 (3rd ed., 1969).

[DO] I. Dolgachev, D. Ortland, *Point sets in projective spaces and theta functions*, Astérisque **165**(1988).

[F] E. Freitag, *Some modular forms related to cubic surfaces*, Kyungpook Math. J., **43** (2003), 433–462.

[K1] S. Kondō, *A complex hyperbolic structure of the moduli space of curves of genus three*, J. reine angew. Math., **525** (2000), 219–232.

[K2] S. Kondō, *The moduli space of* 8 *points on* $\mathbf{P}^1$ *and automorphic forms*, Contemporary Mathematics **422**(2007), 89–106.

[N] I. Naruki, *Cross ratio variety as a moduli space of cubic surfaces.* Proc. London Math. Soc. (3) **45** (1982), no. 1, 1–30.