Siegel保型形式の周期と合同

桂田英典*
室蘭工業大学工学部
E-mail: hidenori@mmm.muroran-it.ac.jp

0 はじめに

この小論においては,「Siegel 保型形式の周期と合同の関連を考える」という筆者の最近の研究プロジェクトについて,「Ikeda lift」と呼ばれる保型形式を例にとって解説する．詳細については [Kat1],[Kat2],[Kat-Kaw1] および [Kat-Kaw2] をご覧いただきたい．

本論において「周期」といえば，ほとんどの場合 Siegel 尖点形式 f の Petersson product $\langle f, f\rangle$ を意味する．また,「合同」といえばある（ひとつの）Siegel 尖点形式の空間における性質の異なる Hecke 固有形式 (Hecke 作用素の同時固有関数）の固有値の間の合同を意味する．それでは，どのようにして「周期」と「合同」を関連させて考えるのかについて説明しよう．

$\mathit{\Gamma}$ をモジュラー群[1] とし，$S_l(\mathit{\Gamma})$ で重さ l の $\mathit{\Gamma}$ に関する尖点形式の空間とする．$f(z) = \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} a(m)e(mz) \in S_k(\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}))$ を原始形式とする．すなわち，f は Hecke 固有形式で $a(1) = 1$ となるものとする．ここで $e(x) = \exp(2\pi\sqrt{-1}x)$ とする． Dirichlet 指標 χ に対して f の Hecke 関数 (Hecke's L-function) $L(s, f, \chi)$ を

$$L(s, f, \chi) = \prod_p \{(1 - \chi(p)\alpha_p p^{-s+k-1/2})(1 - \chi(p)\alpha_p^{-1} p^{-s+k-1/2})\}^{-1}$$

で定義する[2]．ここで α_p は $\alpha_p + \alpha_p^{-1} = p^{-k+1/2}a(p)$ を満たす複素数である．特に χ が単位指標のとき，これを単に $L(s, f)$ と表す．また，f のアジョイント L 関数 (adjoint L-function) $L(s, f, \mathrm{Ad})$ を

$$L(s, f, \mathrm{Ad}) := \prod_p \{(1 - p^{-s})(1 - \alpha_p^2 p^{-s})(1 - \alpha_p^{-2} p^{-s})\}^{-1}$$

*この研究は日本学術振興会科学研究費基盤 S(19104001 代表　桂利行教授）の援助を受けています.

[1] 本論説では主として Siegel モジュラー群を扱うが Hilbert モジュラー群，Hermite 群等でもよい.

[2] 通常の 2 次の Euler 積である.

と定義する[3].

さて，$f \in S_k(\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}))$ に対して $\widehat{f}$ を f の $S_l(\Gamma)$ への「リフト」とする．ここで Γ はあるモジュラー群である．ここで,「リフト」というのは（保型表現論における厳密な定義はさておき）ごく素朴に，$\widehat{f} \in S_l(\Gamma)$ における Hecke 固有形式で，そのある L 関数が f のある L 関数（例えば $L(s,f)$) を用いて表されるものとする．例えば, Doi-Naganuma lift や後で述べる Saito-Kurokawa lift さらにその一般化である Ikeda lift 等はその典型的なものである．このとき，次の問題を考える：

問題 A. $\hat{f}$ と f 周期の何乗かの比 $\dfrac{\langle \widehat{f}, \widehat{f}\rangle}{\langle f, f\rangle^e}$ を f の数論的不変量（例えば L-関数 $L(s,f,\chi)$, $L(s,f,\mathrm{Ad})$ の特殊値）を用いて表せ.

この問題は保型形式論にとってきわめて興味深く重要な問題でこれまでにも多くの研究がなされている．これらについては，T. Oda [O], T. Sugano [Su], A. Murase and T. Sugano[M-S] 等を参照されたい.

さて，2 つの性質の異なる 2 つの Hecke 固有形式の対応する固有値の間にはある素イデアルを法として合同関係があることがしばしば見られる．このような素イデアルを合同素イデアルとか合同を与える素イデアルとかいうこのとき，次の問題を考える.

問題 B. ．問題 A において $\dfrac{\langle \widehat{f}, \widehat{f}\rangle}{\langle f, f\rangle^e}$ が代数的であったとする．$\widehat{f}$ と $S_l(\Gamma)$ の Hecke 固有形式でリフトから来ないものとの間の合同を与える素イデアルを問題 A における不変量を用いて特徴づけよ.

この問題は，K. Doi, H. Hida and H. Ishii [D-H-I] による Doi-Naganuma lift の場合における先駆的な研究があるものの，Siegel 保型形式の場合には，問題 A ほどには多くの人に注目されていなかったように思う．小論の目的は，この 2 つの問題を「Ikeda lift」に対して考え，それらに解答を与えることにより，このような問題設定, とくに問題 B が意味のあるものであることを示すことにある．より具体的に言うならば

(1) T. Ikeda によって提起された Ikeda lift の周期に関する予想の解決

(2) (1) の結果の Ikeda lift とそうでないものの合同への応用

について述べる，さらに，これらの結果の数論幾何への応用，特に保型形式に付随する Selmer 群への応用についても述べる.

1 Siegel 保型形式

$\mathcal{L}_n$ を $\mathbf{Z}$ 上の n 次半整対称行列全体からなる集合とし，$\mathcal{L}_{n>0}$ で正定値行列からなる $\mathcal{L}_n$ の部分集合とする.

$$\Gamma_n = Sp(2n, \mathbf{Z}) := \{g \in GL_{2n}(\mathbf{Z})) \mid {}^t gJg = J\}$$

[3]変数をずらすと 2 次対称 L 関数 (symmetric square L-function) とよばれるものと一致する

と定義する．ここで $J=\begin{pmatrix} O_n & -1_n \\ 1_n & O_n \end{pmatrix}$ とする．$l\in \mathbf{Z}/2$ と Γ_n の部分群 Γ に対して $S_l(\Gamma)$ で重さ l の Γ に関する正則モジュラー形式の空間を表す.

$$\Gamma_0^{(n)}(N)=\{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\in \Gamma_n \mid C\equiv 0 \bmod 4\}$$

とおく．$F,G\in S_l(\Gamma)$ に対して Petersson 内積 $\langle F,G\rangle$ を

$$\langle F,G\rangle=[\Gamma_n:\Gamma]^{-1}\int_{\Gamma\backslash\mathbf{H}_n} F(Z)\overline{G}(Z)(\det(\mathrm{Im}(Z)))^l d\Phi$$

で定義する．ここで $\mathbf{H}_n$ は n 次 Siegel 上半空間を表し，$\Gamma\backslash\mathbf{H}_n$ で $\mathbf{H}_n$ の Γ に関する基本領域を表し，$d\Phi$ は $\mathbf{H}_n$ 上定義された $GL_n(\mathbf{Z})$-不変体積要素である．.

$\tilde{\mathbf{L}}_n$ で Hecke 対 $(GSp(2n,\mathbf{Q})^+,\Gamma_n)$ に付随した Hecke 環を表す．すなわち，$\tilde{\mathbf{L}}_n$ は $M\in GSp(2n,\mathbf{Q})^+$ の Γ_n に関する両側剰余類 $\Gamma_n M\Gamma_n$ で生成される $\mathbf{Z}$ 上の自由加群にしかるべき積を導入した環である．また，$\mathbf{L}_n$ で Hecke 対 $(GSp(2n,\mathbf{Q})^+\cap M_{2n}(\mathbf{Z}),\Gamma_n)$ に付随した Hecke 環を表す．$\mathbf{L}_n$ は $\tilde{\mathbf{L}}_n$ の部分環である．$\tilde{\mathbf{L}}_n$ は $S_l(\Gamma_n)$ に作用する．これを Hecke 作用素という．(具体的な定義は A. Andrianov [A] を参照のこと.) すべての $T\in\tilde{\mathbf{L}}_n$ の同時固有関数を Hecke 固有形式という．素数 p に対して $\mathbf{L}_{n,p}$ で Hecke 対 $(GSp(2n,\mathbf{Q}_p),GSp(2n,\mathbf{Q}_p)\cap GL_{2n}(\mathbf{Z}_p))$ に付随した Hecke 環を表す．$\mathbf{P}_n=\mathbf{C}[X_0^{\pm},X_1^{\pm},\cdots,X_n^{\pm}]$ を $\mathbf{C}$ 上の $X_0,X_1,\cdots,X_n$ の Laurent 多項式環とする．W_n を $\mathbf{P}_n$ の $\mathbf{C}$-同型写像からなる群の部分群で $X_1,\cdots,X_n$ の置換と次の元 τ_i $(i=1,2,\cdots,n)$ で生成されるものとする：

$$\tau_i(X_0)=X_0X_i,\tau_i(X_i)=X_i^{-1},\tau_i(X_j)=X_j\ (j\neq i).$$

また，W_n と同型な群 $\tilde{W}_n$ は $\mathbf{T}_n=\mathbf{C}^{\times n+1}$ に同様に作用する．このとき，$\mathbf{L}_{n,p}$ から $\mathbf{P}_n^{W_n}$ への $\mathbf{C}$-代数同型 $\Phi_{n,p}$ が存在する．これを Satake 同型という．ここで $\mathbf{P}_n^{W_n}$ は $\mathbf{P}_n$ の W_n-不変部分環を表す．このとき，$\mathbf{L}_{n,p}$ から $\mathbf{C}$ への $\mathbf{C}$-代数準同型同型 λ に対して $\mathbf{T}_n$ の元 $\alpha_0(p,\lambda),\alpha_1(p,\lambda),\cdots,\alpha_n(p,\lambda)$ が存在して

$$\lambda(\Phi_{n,p}^{-1}(F(X_0,X_1,\cdots,X_n))=F(\alpha_0(p,\lambda),\alpha_1(p,\lambda),\cdots,\alpha_n(p,\lambda))$$

がすべての $F\in\mathbf{P}_n^{W_n}$ について成り立つ. $\alpha_0(p,\lambda),\alpha_1(p,\lambda),\cdots,\alpha_n(p,\lambda)$ を λ の Satake p-parameter という．　さて，$F(Z)\in S_k(\Gamma_n)$ が Hecke 固有形式のとき，$T\in\mathbf{L}_{n,p}$ に対して固有値 $\lambda_F(T)$ を対応させる対応は代数準同型 $\lambda_{f,p}$ を誘導する．これによって定まる Satake$p$-parameter を $\alpha_0(p),\alpha_1(p),\cdots,\alpha_n(p)$ で表す．このとき，F のスタンダード L 関数 (standard L-function)$L(s,F,\underline{\mathrm{St}})$ を

$$L(s,F,\underline{\mathrm{St}})=\prod_p\{(1-p^{-s})(1-\alpha_i(p)p^{-s})(1-\alpha_i(p)^{-1}p^{-s})\}^{-1}$$

で定義する[4]．また，F のスピン L 関数 (spinor L-function)$L(s,F,\underline{\mathrm{Sp}})$ を

$$L(s,F,\underline{\mathrm{Sp}})=\prod_p\{\prod_{r=0}^{n}\prod_{1\le i_1<\cdots<i_r\le n}(1-\alpha_0(p)\alpha_{i_1}(p)\cdots\alpha_{i_r}(p)p^{-s})\}^{-1}$$

で定義する．$n=1$ のとき $L(s,F,\underline{\mathrm{Sp}})=L(s,F)$ であり $L(s,F,\underline{\mathrm{St}})=L(s,F,\mathrm{Ad})$ となる．

2 Ikeda lift と Ikeda 予想

Ikeda lift の定義を述べるために，整数 $D\in\mathbf{Z}$ で $D\equiv 0 \bmod 4$ または $1 \bmod 4$ をみたすものに対して $\mathfrak{d}_D$ を $\mathbf{Q}(\sqrt{D})$ の判別式とし，$\mathfrak{f}_D=\sqrt{\frac{D}{|\mathfrak{d}_D|}}$ とおく．さらに，χ_D を拡大 $\mathbf{Q}(\sqrt{D})/\mathbf{Q}$ に対応する Kronecker 指標とする．もちろん，$\mathbf{Q}(\sqrt{D})=\mathbf{Q}$ のときは $\mathfrak{d}_D=1$ かつ $\chi_D=1$ である．

n を正の偶数とする．$T\in\mathcal{L}_{n>0}$ に対して $\mathfrak{d}_T=\mathfrak{d}_{(-1)^{n/2}\det(2T)},\mathfrak{f}_T=\mathfrak{f}_{(-1)^{n/2}\det(2T)}$, および $\chi_T=\chi_{(-1)^{n/2}\det(2T)}$ とおく．素数 p に対して T の局所 Siegel 級数 $b_p(T,s)$ を

$$b_p(T,s)=\sum_{R\in Sym_n(\mathbf{Z}[1/p])/Sym_n(\mathbf{Z})}\mathbf{e}(\mathrm{tr}(TR))p^{-ord_p(\mu_p(R))s}$$

と定義する． ここで $\mu_p(R)=[R\mathbf{Z}_p^n+\mathbf{Z}_p^n:\mathbf{Z}_p^n]$ である．このとき，次の条件を満たす多項式 $F_p(T,X)\quad\in\mathbf{Q}[X]$ が一意的に存在する：

$$b_p(T,s)=F_p(T,p^{-s})\frac{(1-p^{-s})\prod_{i=1}^{n/2}(1-p^{2i-2s})}{1-\chi_T(p)p^{n/2-s}}$$

(Y. Kitaoka [Ki] 参照.) k を偶数の整数とする．

$$f(z)=\sum_{m=1}^{\infty}a(m)\mathbf{e}(mz)$$

を $S_{2k-n}(\varGamma_1)$ における原始形式とする．

$$\tilde{f}(z)=\sum_e c(e)\mathbf{e}(ez)$$

を Kohnen のプラス空間 $S^+_{k-n/2+1/2}(\varGamma_0(4))$ における Hecke 固有形式で Shimura 対応により f に対応しているものとする (W. Kohnen [Ko] 参照.)　プラス空間の定義は後に述べる．$Z\in\mathbf{H}_n$ の Fourier 級数 $I_n(f)(Z)$ を

$$I_n(f)(Z)=\sum_{T\in\mathcal{L}_{n>0}}c_{I_n(f)}(T)\mathbf{e}(\mathrm{tr}(TZ)),$$

[4]講演では Hecke 固有値に付随した Dirichlet 級数で定義したが同じものである

と定義する．ここで

$$c_{I_n(f)}(T)=c(|\mathfrak{d}_T|)\prod_p (p^{k-n/2-1/2}\alpha_p)^{ord_p(\mathfrak{f}_T)}\prod_p F_p(T,p^{-(n+1)/2}\alpha_p^{-1})$$

である．このとき，Ikeda [Ik1] は次を示した:

定理 2.1. $I_n(f)(Z)$ は $S_k(\varGamma_n)$ における *Hecke* 固有形式でそのスタンダード L 関数 $L(s,I_n(f),\underline{\mathrm{St}})$ は

$$L(s,I_n(f),\underline{\mathrm{St}})=\zeta(s)\prod_{i=1}^{n}L(s+k-i,f)$$

と表される．ここで $\zeta(s)$ は *Riemann* の *zeta* 関数で，$L(s,f)$ は 前に述べた f の L 関数である．

定理 2.1 における $I_n(f)$ を f の Ikeda lift という．

注意. $I_n(f)$ の Fourier 係数 $c_{I_n(f)}(A)$ は $a(m)$ と $c(m)$ を用いて明示的に表される．特に，$I_n(f)$ は $\tilde{f}$ により一意的に定まる．

注意. $I_2(f)$ は f の Saito-Kurokawa lift と呼ばれる．

さて，Ikeda 予想を説明するために．またいくつかの記号を用意する．

$$\Gamma_{\mathbf{C}}(s):=2(2\pi)^{-s}\Gamma(s),$$

$$\widetilde{\xi}(s):=\Gamma_{\mathbf{C}}(s)\zeta(s),$$

$$\Lambda(s,\,f,\chi):=\Gamma_{\mathbf{C}}(s)L(s,\,f,\chi)$$

$$\widetilde{\Lambda}(s,\,f,\mathrm{Ad}):=\Gamma_{\mathbf{C}}(s)\Gamma_{\mathbf{C}}(s+2k-n-1)L(s,\,f,\mathrm{Ad}).$$

さて，次のような図式があることを思いだす．

$$\begin{array}{ccccc} S^+_{k-(n-1)/2}(\varGamma_0(4)) & \leftrightarrow & S_{2k-n}(\varGamma_1) & \to & S_k(\varGamma_n) \\ \tilde{f} & \leftrightarrow & f & \mapsto & I_n(f) \end{array}$$

ここで最初の $\leftrightarrow$ は Shimura 対応で 2 番目の $\to$ は Ikeda lift である．このとき，Ikeda は次の予想を提起した．

予想 A. ([Ik2])

$$\frac{\langle I_n(f),\,I_n(f)\rangle}{\langle \tilde{f},\,\tilde{f}\rangle}=2^{\alpha(n,k)}\Lambda(k,\,f)\widetilde{\xi}(n)\prod_{i=1}^{n/2-1}\widetilde{\Lambda}(2i+1,\,f,\,\mathrm{Ad})\,\widetilde{\xi}(2i),$$

ここで $\alpha(n,\,k)=-(n-3)(k-n/2)-n+1$

注意. (1) Ikeda はもう少し一般的 lift について予想を提起しており，上の予想はその特別な場合である．

(2) f に対して $I_n(f)$ は一意には決まらず定数倍のあいまいさがある．しかし，$I_n(f)$ は $\tilde{f}$ によって一意的に定まる．よって上の定式化にはあいまいさがない．

(3) $n=2$ のとき, Conjecture A は正しい．すなわち

$$\frac{\langle I_2(f),\, I_2(f)\rangle}{\langle \tilde{f},\, \tilde{f}\rangle} = 2^{k-2}\Lambda(k,\, f)\widetilde{\xi}(2)$$

(W. Kohnen and N.-P. Skoruppa [K-S] 参照.)

さて，予想 A から問題 A に対する解答を与えることができる．これは後に詳述する．

3 Ikeda予想の証明(河村尚明氏（北大理）との共同研究)

最初の主結果は次のとおりである．

定理 3.1. (H. Katsurada-H. Kawamura [Kat-Kaw2]) 予想 A は正しい

証明の概略: 我々の場合に限らず楕円尖点 Hecke 固有形式とそのリフトの間の周期関係式に関する優れた研究があることは前に述べた．その多くは"Theta lift"とよばれるものなっている．"Theta lift"は積分表示を用いて定義されることもあり，周期関係式を導く一般的処方が知られている[5]．一方，Ikeda lift は $n=2$ の場合，すなわち Saito-Kurokawa lift のときを除いて"Theta lift"ではないので，そのような方法は使えない．我々の方法は Ikeda lift に付随する様々な Rankin-Selberg 型の Dirichlet 級数の明示公式を求め，ある極における留数をとるというものである．このような留数には保型形式の周期が現れるので目標とする結果が得られるというしくみである．ただし，実際の証明は多少複雑で 3 段階に分かれる．まず, $I_n(f)$ を前に述べたように Fourier 展開する：

$$I_n(f)(Z) = \sum_{B\in\mathcal{L}_{n>0}} c_{I_n(f)}(B)e(\mathrm{tr}(BZ)) \quad (Z\in\mathbf{H}_n).$$

Step 1. $Z=\begin{pmatrix} \tau' & z \\ {}^t z & \tau \end{pmatrix}$ と表す．ここで，$\tau\in\mathbf{H}_{n-1}$, $z\in\mathbf{C}^{n-1}$, $\tau'\in\mathbf{H}_1$ である．このとき, $I_n(f)$ の Fourier-Jacobi 展開

$$I_n(f)\left(\begin{pmatrix} \tau' & z \\ {}^t z & \tau \end{pmatrix}\right) = \sum_{N=1}^{\infty}\phi_N(\tau,\, z)\mathbf{e}(N\tau'),$$

[5] もっとも，その処方に従って実際に具体的な関係式を得るためには各々の場合にかなりの工夫を必要とする

を考える．ここで $\phi_N(\tau,\, z)$ は $I_n(f)$ の N-番目の Fourier-Jacobi 係数で次のように定義される：

$$\phi_N(\tau,\, z) = \sum_{\substack{T\in\mathcal{L}_{n-1},\, r\in\mathbf{Z}^{n-1},\\ 4NT-\ {}^t rr>0}} c_{I_n(f)}\left(\begin{pmatrix} N & r/2 \\ {}^t r/2 & T \end{pmatrix}\right) e(\mathrm{tr}(T\tau)+r^t z) \quad (\tau\in\mathbf{H}_{n-1}, z\in\mathbf{C}^{n-1})$$

ϕ_N は 重さ k, 指数 N の $\mathit{\Gamma}_{n-1}$ に関する Jacobi 尖点形式になり，従って Pertersson 内積 $\langle\phi_N,\phi_N\rangle$ が定義される．これを用いて次の Dirichlet 級数 $D_1(s;I_n(f))$ を定義する：

$$D_1(s;I_n(f)) := \zeta(2s-2k+2n)\sum_{N=1}^{\infty}\langle\phi_N,\phi_N\rangle N^{-s}.$$

この Dirichlet 級数の解析的性質は Yamazaki [Y] によって詳しく調べられている:

命題 3.2. $\Gamma_{n,k}(s)=\pi^{k-n}(2\pi)^{-2s}\Gamma(s)\Gamma(s-k+n)$ とおく．このとき

$$\mathcal{D}_1(s;F)=\Gamma_{n,k}(s)\,D_1(s;F)$$

は全 s-平面に有理型関数として解析接続され $s=k$ で 1 位の極を持ちそこでの留数は $\langle F,F\rangle$ となる．

さて，このとき我々は $D_1(s,I_n(f))$ の明示公式を得る:

定理 3.3. ([Kat-Kaw1]) n,k を正の偶数で $k>n+1$ とする．f を $S_{2k-n}(\mathit{\Gamma}_1)$ における原始形式とし，$\phi_1=\phi_{I_n(f),1}$ を $I_n(f)$ の 1 番目の *Fourier-Jacobi* 係数とする．このとき，次が成り立つ：

$$D_1(s;I_n(f))=\langle\phi_1,\,\phi_1\rangle\,\zeta(s-k+1)\zeta(s-k+n)L(s,\,f).$$

定理 3.3 の等式の両辺の留数をとることにより次が成り立つ：

系. 上と同じ仮定の下で

$$\frac{\langle I_n(f),\, I_n(f)\rangle}{\langle\phi_1,\,\phi_1\rangle}=2^{-k+n-2}\Lambda(k,\,f)\widetilde{\xi}(n). \tag{1}$$

Step 2. 次に $\langle\phi_1,\phi_1\rangle$ を他の保型形式の周期を用いて表すことを考える．そのため

$$\mathcal{L}'_{n-1>0}=\{B\in\mathcal{L}_{n-1>0}\mid B+\ {}^t r_B r_B\in 4\mathcal{L}_{n-1}\text{となる }\mathbf{Z}^{n-1}\text{の元 }r_B\text{が存在する}\}$$

とおく．このような r_B は B に対して $2\mathbf{Z}^{n-1}$ を法として一意に決まる．また，$c_{I_n(f)}\left(\left(\begin{array}{cc} 1 & \frac{r_B}{2} \\ \frac{{}^t r_B}{2} & \frac{B+{}^t r_B r_B}{4} \end{array}\right)\right)$ は r_B の代表元の取り方によらずに B によって一意に定まる．さて，$\tau \in \mathbf{H}_{n-1}$ の関数 $H_{n-1}(\phi_1)$ を

$$H_{n-1}(\phi_1)(\tau) = \sum_{B \in \mathcal{L}'_{n-1>0}} c_{I_n(f)}\left(\left(\begin{array}{cc} 1 & \frac{r_B}{2} \\ \frac{{}^t r_B}{2} & \frac{B+{}^t r_B r_B}{4} \end{array}\right)\right) e(\mathrm{tr}(B\tau))$$

と定義する．このとき，$H_{n-1}(\phi_1)$ は一般化された Kohnen プラス空間 $S^+_{k-1/2}(\Gamma_0^{(n-1)}(4))$ に属する[6]．ここで一般化された Kohnen プラス空間 $S^+_{k-1/2}(\Gamma_0^{(n-1)}(4))$ とは

$$F(\tau) = \sum_{B \in \mathcal{L}'_{n-1>0}} c(B) e(\mathrm{tr}(B\tau))$$

という Fourier 展開をもつ $S_{k-1/2}(\Gamma_0^{(n-1)}(4))$ の元全体からなる部分空間である[7]．この空間は $n=2$ のときは１節で述べた $S^+_{k-1/2}(\Gamma_0^{(n-1)}(4))$ に一致する．このとき次が成り立つ．

命題 3.4

$$\langle \phi_1, \phi_1 \rangle = 2^{(2k-2)(n-1)} \langle H_{n-1}(\phi_1), H_{n-1}(\phi_1) \rangle.$$

Step 3. 最後に

$$R(s, H_{n-1}(\phi_1)) = \sum_{B \in \mathcal{L}'_{n-1>0}/SL_{n-1}(\mathbf{Z})} \frac{\left|c_{I_n(f)}\left(\left(\begin{array}{cc} 1 & \frac{r}{2} \\ \frac{{}^t r}{2} & \frac{B+{}^t r r}{4} \end{array}\right)\right)\right|^2}{e(B) \det B^s},$$

と定義する．ここで $e(B) = \#\{X \in SL_{n-1}(\mathbf{Z}) \mid {}^t XBX = B\}$ である．これを Rankin-Selberg の convolution product という．この型の Dirichlet 級数は整数重さの保型形式に対しても定義される，特に，楕円尖点 Hecke 固有形式の場合には（本質的に）tensor product L 関数と呼ばれ Euler 積を持つが， 高次の場合にはたとえ Hecke 固有形式であっても Euler 積を持たない．しかし，その解析的性質はよく知られている（例えば，Kalinin [Kal] 参照.）半整数重さの場合も同様の方法により次のことが証明される．

命題 3.5.

$$\gamma_{n-1}(s) = 2^{1-2s(n-1)} \pi^{-s(n-1)+(n-1)(n-2)/4} \prod_{j=1}^{n-1} \Gamma(s-(j-1)/2)$$

[6]一般に指数 1 の Jacobi 尖点形式からこのように半整数重さの Siegel 尖点形式を対応させることができる．詳細は Ibukiyama [Ib] 参照

[7]A が $\mathcal{L}_{n-1>0}$ ではなくその部分集合 $\mathcal{L}'_{n-1>0}$ を走ることに注意されたい．

とおく．このとき $R(s, H_{n-1}(\phi_1))$ は全 s-平面に有理型に解析接続され，$s = k - 1/2$ で１位の極を持ちそこでの留数は

$$\gamma_{n-1}(l)^{-1} \frac{\prod_{i=1}^{(n-2)/2} \xi(2i+1)}{\xi(n) \prod_{i=1}^{(n-2)/2} \xi(2n-2i)} \langle H_{n-1}(\phi_1), H_{n-1}(\phi_1) \rangle$$

となる．

さて，$R(s, H_{n-1}(\phi_1))$ の明示公式が次のように与えられる．

定理 3.6. ([Kat-Kaw2]) $\lambda_n = \frac{1}{2} \prod_{i=1}^{n/2-1} \widetilde{\xi}(2i)$ とおく．このとき

$$R(s, H_{n-1}(\phi_1)) = \lambda_n 2^{(-s-1/2)(n-2)} \zeta(2s+n-2k+1)^{-1} \prod_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} \zeta(4s+2n-4k+2-2j)^{-1}$$

$$\times \{R(s-n/2+1, \tilde{f}) \zeta(2s-2k+3) \prod_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} L(2s-2k+2i+2, f, \mathrm{Ad}) \zeta(2s-2k+2i+2)$$

$$+R(s, \tilde{f}) \zeta(2s-2k+n+1) \prod_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} L(2s-2k+2i+1, f, \mathrm{Ad}) \zeta(2s-2k+2i+1)\}$$

となる．

上の定理の両辺の留数をとることにより次が得られる．

系. 上の定理と同じ仮定のもとで，次が成り立つ：

$$\frac{\langle H_{n-1}(\phi_1),\, H_{n-1}(\phi_1) \rangle}{\langle \tilde{f},\, \tilde{f} \rangle} = 2^{\beta(n,k)} \prod_{i=1}^{n/2-1} \widetilde{\xi}(2i)\, \widetilde{\Lambda}(2i+1,\, f,\, \mathrm{Ad})$$

, ここで $\beta(n,k) = (n-2)(-3k+(n-1)/2)$ である．

定理 3.1 の証明
定理 3,1 は定理 3.3 の系，命題 3.4 および定理 3.6 の系から直ちに得られる．

4　Ikeda lift の合同素イデアル

さて，Ikeda lift に対する，問題 A,B にひとつの解答を与える．最初に一般の Siegel 保型形式の合同について述べる．$\mathbf{Q}(F)$ を F の Hecke 体とする．すなわち，$\mathbf{Q}(F)$ は $\mathbf{Q}$ 上すべての $\lambda_F(T)$ $(T \in \mathbf{L}_n)$ によって生成される体である．$\mathbf{Q}(F)$ は有限次総実代数体になる．さて，固有値の間の合同を論ずるためには，$\lambda_F(T)$ が代数的整数であっ

てほしい．次の命題は多かれ少なかれ専門家にとっては既知のことと思われるがあえて注意しておく．証明は難しくはないが自明ではない ([Kat-1] 参照.)

命題 4.1. $k \geq n+1$ とする．このとき，F の Hecke 固有値 $\lambda_F(T)$ は代数的整数であり，$\mathfrak{O}_{\mathbf{Q}(F)}$ に属する．

M を Hecke 安定な $S_k(\varGamma_n)$ の部分空間で $M \subset (\mathbf{C}F)^{\perp}$ となるものとする．ここで $(\mathbf{C}F)^{\perp}$ は $\mathbf{C}F$ の $S_k(\varGamma_n)$ における Petersson 内積に関する直交補空間である．

定義. K を有限次代数体で $S_k(\varGamma_n)$ のすべての Hecke 固有形式の Hecke 体を含むものとする．K の素イデアル $\mathfrak{P}$ が F の M に関する合同素イデアル (congruence prime) であるとは，ある Hecke 固有形式 $G \in M$ が存在して

$$\lambda_G(T) \equiv \lambda_F(T) \bmod \mathfrak{P}$$

がすべての $T \in \mathbf{L}_n$ に対して成り立つときをいう．

合同素イデアルであるための判定条件を述べるために，

$$\Lambda(m, F, \underline{\mathrm{St}}) := \frac{L(m, F, \underline{\mathrm{St}})}{\langle F, F\rangle \pi^{-n(n+1)/2+nk+(n+1)m}}$$

とおく．このとき，次のことが知られている．

命題 4.2. (S. Boecherer [Bo], S. Mizumoto [Mi]) $F \in S_k(\Gamma_n)$ を Hecke 固有形式とする．ρ_n を n を $n \equiv 1 \bmod 4$ を満たす 5 以上の奇数のとき 3, それ以外のとき 1 とする．任意の $B \in \mathcal{L}_{n>0}$ と $\rho_n \leq m \leq k-n, m \equiv n \bmod 2$ に対して $\Lambda(m, F, \underline{\mathrm{St}})|c(B)|^2$ は $\mathbf{Q}(F)$ に属する．

さて，Siegel 尖点 Hecke 固有形式の合同素イデアルについて次のことが知られている．

定理 4.3. ([Kat-1]) $\mathfrak{P}$ を K の素イデアルで $(2k-1)!$ を割らないとする． さらに，ある $B \in \mathcal{L}_{n>0}$ と $2 \leq m \leq k-n-2, m \equiv 0 \bmod 2$ に対して $\mathfrak{P}$ は $\Lambda(m, F, \underline{\mathrm{St}})|c(B)|^2$ の分母を割るとする． このとき $\mathfrak{P}$ は F の $(\mathbf{C}F)^{\perp}$ に関する合同素イデアルである．

Ikeda lift とそうでないものとの間の合同を考えるために，$S_k(\varGamma_n)^*$ をすべての原始形式 $g \in S_{2k-n}(\varGamma_1)$ の Ikeda lift $I_n(g)$ によって生成される $S_k(\varGamma_n)$ の部分空間とする．$n=2$ のとき $S_k(\varGamma_2)^*$ は $S_k(\varGamma_2)$ の Maass 部分空間と呼ばれるものになる．

さて，f を $S_{2k-n}(\varGamma_1)$ における原始形式とし，K を上のとおりとする．すべての原始形式 $g \in S_{2k-n}(\varGamma_1)$ に対して $\mathbf{Q}(I_n(g)) = \mathbf{Q}(g)$ が成り立つ．よって，K は $S_{2k-n}(\varGamma_1)$ におけるすべての原始形式の Hecke 体を含む． A を L の整数環，$\mathfrak{P}$ を K の素イデアルとする．このとき，Eichler-Shimura isomorphism を通して f の基準周期 (canonical periods) と呼ばれる 2 つの複素数 $\Omega_f^{(\pm)} = \Omega(f, \pm; A_{\mathfrak{P}})$ が定義される．具体的な構成法については例えば， H. Hida [Hi3] を参照のこと．

注意. (1) $A_{\mathfrak{p}}$ を A の K 内での $\mathfrak{p}$ における局所化とする．このとき，$\Omega_f^{(\pm)}$ は各々 $A_{\mathfrak{p}}$ の単数倍を除いて一意的に決まる．

(2) $\dfrac{\langle f, f\rangle}{\Omega_f^{(+)}\Omega_f^{(-)}} \in A_{\mathfrak{p}}$ が成り立つ．このとき，(1) により，$\dfrac{\langle f, f\rangle}{\Omega_f^{(+)}\Omega_f^{(-)}}$ が $\mathfrak{p}$ で割れるかどうかは $\Omega_f^{(\pm)}$ のとり方によらない．また，これは f の合同素イデアルに深く関係している．(Hida [Hi1],[Hi2] 参照)

さて，予想 A（あるいは定理 3.1) を書き換えるために，$0 < m \le 2k - n - 1$ と Dirichlet 指標 χ に対して $j := \chi(-1)(-1)^{m-1}$ とおき，

$$\mathbf{L}(m, f, \chi) := \frac{\Gamma(m)L(m, f, \chi)}{\tau(\chi)(2\pi\sqrt{-1})^m\Omega_f^{(j)}}$$

と定める．また，

$$\mathbf{L}(m,\, f,\, \mathrm{Ad}) = \frac{\widetilde{\Lambda}(m,\, f,\, \mathrm{Ad})}{\langle f, f\rangle}$$

とおく．

注意. (1)$\mathbf{L}(m, f, \chi)$ は K 上 χ の値によって生成される体 $K(\chi)$ に属する (G. Shimura [Sh] 参照).

(2) $1 \le m \le k-1, m \equiv 1 \bmod 2$ ならば，命題 4.2 より $\mathbf{L}(m,\, f,\, \mathrm{Ad}) \in K$ である．

D を基本判別式で $(-1)^{n/2}D > 0$ となるものとすると，

$$\frac{|c(|D|)|^2}{\langle \tilde{f}, \tilde{f}\rangle} = \frac{2^{k-n/2-1}|D|^{k-n/2-1/2}\Lambda(k-n/2, f, \chi_D)}{\langle f, f\rangle}$$

(W. Kohnen and D. Zagier [K-Z] 参照.) よって，定理 3.1 より直ちに次のことがいえる．

定理 4.4. 任意の基本判別式 D で $(-1)^{n/2}D > 0$ となるものに対して

$$\frac{c_{\tilde{f}}(|D|)^2\langle f,\, f\rangle^{n/2}}{\langle I_n(f),\, I_n(f)\rangle} = \frac{a_{n,k}|D|^{k-n/2}\mathbf{L}(k-n/2, f, \chi_D)}{\widetilde{\xi}(n)\mathbf{L}(k,\, f)\prod_{i=1}^{n/2-1}\mathbf{L}(2i+1,\, f,\, \mathrm{Ad})\widetilde{\xi}(2i)}$$

が成り立つ．ここで $a_{n,k}$ はその分母，分子が $(2k-1)$ より大きい素数で割れないある有理数である．

系. 上の仮定に加えて，$\tilde{f}$ の *Fourier* 係数はすべて代数的数であるとする．このとき $\dfrac{\langle f,\, f\rangle^{n/2}}{\langle I_n(f),\, I_n(f)\rangle}$ は代数的である．

この結果は $n = 2$ のとき M. Furusawa [F], 一般のとき Y. Choie-W. Kohnen [C-K] によって示されている．

定理 4.5 ([Kat-2]) $f, K, \mathfrak{p}$ を上のとおりとする．次を仮定する．
(1) $\mathfrak{p}$ は $\mathbf{L}(k,f)\prod_{i=1}^{n/2-1}\mathbf{L}(2i+1,f,\mathrm{Ad})$ を割る．
(2) $\mathfrak{p}$ はある整数 $2 \le m \le k-n/2-1$ と基本判別式 D で $(-1)^{n/2}D>0$ を満たすものに対して

$$\tilde{\xi}(2m)\prod_{i=1}^{n}\mathbf{L}(2m+k-i,f)\mathbf{L}(k-n/2,f,\chi_D)D(2k-1)!$$

を割らない．
(3) f の p 番目の *Fourier* 係数は $\mathfrak{p}$ で割れない
(4) $\mathfrak{p}$ は

$$C_{k,n}\frac{\langle f,f\rangle}{\Omega(f,+,A_{\mathfrak{p}})\Omega(f,-,A_{\mathfrak{p}})}$$

を割らない．ここで $n=2$ またはそうでないかに応じて $C_{k,n}=1$ または $\prod_{p\le(2k-n)/12}(1+p+\cdots+p^{n-1})$ である．
このとき $\mathfrak{p}$ は $I_n(f)$ の $(S_k(\mathit{\Gamma}_n)^*)^{\perp}$ に関する合同素イデアルである．

証明の概略
Step 1. まず，Ikeda lift の Fourier 係数を注意深く観察することによって，$A \in \mathcal{L}_{n>0}$ で $c_{I_n(f)}(A)=c_{\tilde{f}}(|D|)l$ かつ $\mathfrak{p} \not| l$ を満たすものがとれることに注意する．　よって

$$\Lambda(2m,I_n(f),\underline{\mathrm{St}})|c_{I_n(f)}(A)|^2$$
$$=a_{n,k,m}\frac{\prod_{i=1}^{n}\mathbf{L}(2m+k-i,f)|D|^{k/2-n/2}\mathbf{L}(k-n/2,f,\chi_D)}{\mathbf{L}(k,f)\tilde{\xi}(n)\prod_{i=1}^{n/2-1}\mathbf{L}(2i+1,f,\underline{\mathrm{St}})\tilde{\xi}(2i)}$$
$$\times\Big(\frac{\Omega(f,+;\mathfrak{p})\Omega(f,-;A_{\mathfrak{p}})}{\langle f,f\rangle}\Big)^{n/2}$$

が成り立つ．ここで $a_{n,k,m}$ はその分母・分子が $\mathfrak{p}$ で割れない有理数である．よって仮定 (1),(2) と 定理 4.3 から，ある Hecke 固有形式 $G \in \mathbf{C}I_n(f)^{\perp}$ が存在して

$$\lambda_G(T) \equiv \lambda_{I_n(f)}(T) \bmod \mathfrak{p}$$

がすべての $T \in \mathbf{L}_n$ について成り立つ．
Step 2. 次に $G \notin S_k(\mathit{\Gamma}_n)^*$ を示すために，Hida [Hi2] による 1 変数保型形式の合同素イデアルの $\dfrac{\langle f,f\rangle}{\Omega(f,+;A_{\mathfrak{p}})\Omega(f,-;A_{\mathfrak{p}})}$ を用いた特徴付けを使う．

注意． $n=2$ のとき上の定理は Harder の予想の特別な場合となり，[Br] および [Kat1] で証明されている．なお，Harder の予想については [Ha] 参照のこと．なお，これに関しては後でもう一度ふれる．
注意． 上の定理の本質的な仮定は (1) である．仮定 (3),(4) は技術的なもので容易に取り除くことができるはずである．仮定 (2) は必ずしも技術的なものといえない．す

なわち，１つの素イデアル$\mathfrak{P}$を固定して基本判別式を動かしたとき$\mathbf{L}(k-n/2,f,\chi_D)$が$\mathfrak{P}$で割れないものがあるかどうかはデリケートな問題である．それでも，これを取り除きたい．また，上の定理の逆が成り立つかどうかも興味あるところである．そこで，次の予想を提起したい．

予想 B. K,f を上のとおりとする．$\mathfrak{P}$をKの素イデアルで$(2k-1)!$を割らないものとする．このとき$\mathfrak{P}$が$I_n(f)$の$(S_k(\mathit{\Gamma}_n)^*)^{\perp}$に関する合同素イデアルであることと$\mathfrak{P}$が$\mathbf{L}(k,f)\prod_{i=1}^{n/2-1}\mathbf{L}(2i+1,f,\mathrm{Ad})$を割ることは同値である．

例. $n=4$ かつ $k=18$ とする．このとき dim $S_{18}(\Gamma_4)$ が大体 16 に等しい．
(C. Poor-D. Yuen [P-Y] による.) 一方，

$$\dim\ S_{18}(\Gamma_4)^* = \dim\ S_{32}(\Gamma_1) = 2$$

である．原始形式 $f\in S_{32}(\Gamma_1)$ をとる．このとき $[\mathbf{Q}(f):\mathbf{Q}]=2$ である．さて，$211=\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ と $\mathbf{Q}(f)$ において素イデアル分解される．さらに，

$$N_{\mathbf{Q}(f)/\mathbf{Q}}(\mathbf{L}(18,f)) = 2^7\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13\cdot 211,$$
$$\tilde{\xi}(6) = 2^{-2}\cdot 3^{-2}\cdot 7^{-1}$$

$$N_{\mathbf{Q}(f)/\mathbf{Q}}(\prod_{i=1}^{4}\mathbf{L}(24-i,f)) = 2^{19}\cdot 3^{13}\cdot 5^5\cdot 7^8\cdot 11^2\cdot 13^5\cdot 17^5\cdot 19^3\cdot 23\cdot 503\cdot 1307\cdot 14243,$$

かつ

$$N_{\mathbf{Q}(f)/\mathbf{Q}}(\mathbf{L}(16,f,\chi_1)) = N_{\mathbf{Q}(f)/\mathbf{Q}}(\mathbf{L}(16,f)) = 2^5\cdot 3^2\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13^2$$

であることがわかる．(W. A. Stein [Ste] http://modular.fas.harvard.edu/index.html 参照)
さらに，直接計算により$\mathfrak{P}$は$I_4(f)$の$\mathbf{C}I_4(g)$に関する合同素イデアルではないことがわかる． ここで$g\in S_{32}(\Gamma_1)$はfとは異なる原始形式である． 以上により，$\mathfrak{P}$または$\mathfrak{P}'$は$I_4(f)$の$S_{18}(\Gamma_4)^{*\perp}$に関する合同素イデアルであることがわかる．

上の次元の様子をみると，$I_4(f)$と合同な non-Ikeda lift を具体的に構成することは難しいことに注意されたい．$n=2$のときの例は [Br],[Kat-3] にある．

さて，Harder は [Ha] において Saito-Kurokawa lift と non-Saito Kurokawa lift の合同を含む一般的な予想を提起しており，そのモチーフ論的解釈を与えている．それ故，次の問題は興味深いと思われる．

問題 C. 予想 B のモチーフ論的解釈を見出せ．また，予想 B のベクトル値保型形式への一般化を考えよ．

また，次の問題も考えて見る価値があると思う．

問題 D. 問題 A,B を他のリフトについて考えよ．例えば，[Ik2] で予想されている Miyawaki lift の周期関係式を証明し，Miyawaki lift と non-Miyawaki lift の合同素イデアルがどのような L 関数の特殊値で特徴づけられるか考察せよ．

5 合同の数論幾何への応用およびコメント

上に述べた合同はそれ自体興味深いものであるが，保型形式に付随する Selmer 群の非自明な捩れ元を生み出す可能性があるという点でも意義深い．このことを，まず，J. Brown の結果を例にとって簡単に説明しよう．一般に V を p-進 Galois 表現とする．T を $Gal(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$-安定な V の格子とし，$W = V/T$ とおく．このとき，$H^1_f(\mathbf{Q}_l, V)$ を

$$H^1_f(\mathbf{Q}_l, V) = \begin{cases} \ker(H^1(\mathbf{Q}_l, V) \longrightarrow H^1(I_l, V)) & l \neq p \\ \ker(H^1(\mathbf{Q}_l, V) \longrightarrow H^1(\mathbf{Q}_l, V \otimes B_{crys})) & l = p \end{cases}$$

と定義する． ここで，I_l は惰性群，B_{crys} は Fontaine の p-進周期環である．さらに，Bloc-Kato 群 $H^1_f(\mathbf{Q}_l, W)$ および W の Selmer 群 $H^1_f(\mathbf{Q}, W)$ を

$$H^1_f(\mathbf{Q}_l, W) = \mathrm{im}(H^1(\mathbf{Q}_l, V) \longrightarrow H^1(\mathbf{Q}_l, W)),$$

$$H^1_f(\mathbf{Q}, W) = \ker\Big(H^1(\mathbf{Q}, W) \longrightarrow \oplus_l \frac{H^1(\mathbf{Q}_l, W)}{H^1_f(\mathbf{Q}_l, W)}\Big)$$

で定義する．さて，原始形式 $g \in S_{2k-n}(\varGamma_1)$ と素数 p に対して V_p を g に付随する p-進 Galois 表現とする．T_p を $Gal(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$-安定な V_p の格子とし，$W_p = V_p/T_p$ とおく．次は Bloch-Kato 予想からの帰結である．

予想 C. $\mathfrak{P}$ が $\mathbf{L}(k, g)$ を割れば，p は $H^1_f(\mathbf{Q}, W_p(1-k))$ を割る..

予想 C を上に述べた合同を利用して解いてみよう．Hecke 固有形式 F に付随する Galois 表現 $\rho_F : Gal(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \longrightarrow GL_4(E)$ が存在して，$l \neq p$ のとき

$$\det(I - \rho_F(Frob_l)X) = L_l(X, F, \underline{\mathrm{Sp}})$$

となる．ここで

$$L_l(X, F, \underline{\mathrm{Sp}}) = (1-\alpha_0(l)X)(1-\alpha_0(l)\alpha_1(l)X)(1-\alpha_0(l)\alpha_1(l)X)(1-\alpha_0(l)\alpha_1(l)\alpha_2(l)X)$$

である．特に $F \notin S_k(\varGamma_2)^*$ ならば ρ_F は絶対既約であり，その他諸々の数論幾何的にみて良い性質を持つ．さて，原始形式 $g \in S_{2k-2}(\varGamma_1)$ について $\mathfrak{P}$ が $\mathbf{L}(k, g)$ を割るとしよう．このとき，定理 4.4 からある Hecke 固有形式 $G \in S_k(\varGamma_2)$ かつ $G \notin S_k(\varGamma_2)^*$ が存在して，

$$\bar{\rho}_{I_2(g)} \equiv \bar{\rho}_G$$

となる．ここで 表現 ρ に対して $\bar{\rho} = \rho \bmod \mathfrak{P}$ とする．さて，Saito-Kurokawa lift の性質より

$$\rho_{I_2(g)} = \begin{pmatrix} \epsilon^{k-2} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_g & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon^{k-1} \end{pmatrix}$$

となることが知られている．ここで ϵ は p 次円分指標である．よって，上に述べた合同と少しの計算で基底を取り替えることより

$$\bar{\rho}_G = \begin{pmatrix} \bar{\epsilon}^{k-2} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \bar{\rho}_g & a_{23} \\ 0 & 0 & \bar{\epsilon}^{k-1} \end{pmatrix}$$

かつ $a_{12} = 0$ または $a_{21} = 0$ とできる．また，Herbrand の定理より $a_{13} = 0$ を示すことができる．さらに計算をすすめることにより $a_{23} \neq 0$ を示すことができこれが $H^1_f(\mathbf{Q}, W_p(1-k))$ の非自明な元を与え証明が完成する． 詳細は [Br] を参照のこと．

上の考察より，次のような夢を見たくなるのは至極当然のことであろう．

夢 (妄想?)　定理 4.4 を利用して保型形式に付随する他の Selmer 群の非自明な捩れ元を構成できないか？

例えば，２次あるいは３次の対称テンソル表現に付随する Selmer 群に対して考えることは興味深い．ただし，上の方法を実行するためには $S_k(\varGamma_n)$ の Hecke 固有形式に付随する Galois 表現の存在が必要となるが，$n \geq 3$ のときにはその存在は知られていないので，現在のところはまだ夢物語に過ぎない．しかし将来どうなるかわからないし，それを仮定して考察を進めることは意義があると思う．

いずれにしても，周期関係式という解析的な事実がこのような数論に関係があることは興味深いことと思われる．このような分野に多くの若い人達が参入することを期待して本稿を終えることにする．

References

[A] A. N. Andrianov, Quadratic forms and Hecke operators, Springer, 1987.

[Bo] S. Böcherer, Über die Fourier-Jacobi-Entwicklung Siegelscher Eisensteinreihen II, Math. Z. 189(1985), 81-110.

[Br] J. Brown, Saito-Kurokawa lifts and applications to the Bloch-Kato conjecture, to appear in Compositio Math.

[C-K] Y. Choie and W. Kohnen, On the Petersson norm of certain Siegel modular forms, Ramanujan J. 7(2003), 45-48.

[D-H-I] K. Doi, H. Hida, and H. Ishii, Discriminant of Hecke fields and twisted adjoint L-values for GL(2), Invent. Math. 134(1998), 547-577.

[F] M. Furusawa, On Petersson norms for some liftings, Math. Ann. 248(1984), 543-548.

[Ha] G. Harder, Eisensteinkohomologie und die Konstruktion gemischter Motive, Lecture Notes. in Math. 1562, Springer-Verlag, Berlin 1993.

[Hi1] H. Hida, Congruences of cusp forms and special values of their zeta functions, Invent Math. 63(1981), 225-261,

[Hi2] ___________,On congruence divisors of cusp forms as factors of the special avlues of their zeta functions, Invent. Math. 64(1981), 221-262
[Hi3] ___________, Modular forms and Galois cohomology, Cambridge Univ. Press, 2000
[Ib] T. Ibukiyama, On Jacobi forms and Siegel modular forms of half integral weights, Comment. Math. Univ. St. Paul. 41 (1992), no. 2, 109-124.
[Ik1] T. Ikeda, On the lifting of elliptic modular forms to Siegel cusp forms of degree $2n$, Ann. of Math. 154(2001), 641-681.
[Ik2] ___________, Pullback of lifting of elliptic cusp forms and Miyawaki's conjecture, Duke Math. J. 131 (2006), 469-497.
[Kal] V. L. Kalinin, Analytic properties of the convolution of Siegel modularf orms of genus n, Math. USSR Sbornik 48(1984), 193-200.
[Kat1] H. Katsurada, Congruence of Siegel modular forms and special values of their standard zeta functions, to appear in Math. Z.
[Kat2] ___________, Congruence of Siegel modular forms and their zeta functions, Proc. of the 8-th Autumn Workshop on Number theory, 47-59
[Kat3] ___________, Excat values of standard zeta functions of Siegel modular forms, Preprint(2007)
[Kat-Kaw1] H. Katsurada and H. Kawamura, A certain Dirichlet series of Rankin-Selberg type associated with the Ikeda lifting, To appear in Jounal of Number Theory.
[Kat-Kaw2] ___________, Ikeda's conjecture on the Petersson product of the Ikeda lifting, Preprint 2007.
[Ki] Y. Kitaoka, Dirichlet series in the theory of Siegel modular forms, Nagoya Math. J. 95(1984), 73-84.
[Ko] W. Kohnen, Modular forms of half-integral weight on $\Gamma_0(4)$, Math. Ann. 48(1980), 249-266.
[K-S] W. Kohnen and N-P. Skoruppa, A certain Dirichlet series attached to Siegel modular forms of degree 2, Invent. Math. 95, 541-558(1989).
[K-Z] W. Kohnen and D. Zagier, Values of L-series of modular forms at the center of the critical strip, Invent. Math. 64, 175-198(1981)
[Mi] S. Mizumoto, Poles and residues of standard L-functions attached to Siegel modular forms, Math. Ann. 289(1991) 589-612.
[M-S] A. Murase and T. Sugano, Inner product formula for Kudla lift, Proc. of the Conference "Automorphic Forms and Zeta Functions(2006), 280-313.
[O] T. Oda, On the poles of Andrianov L-functions, Math. Ann. 256(1981), 323-340.
[P-Y] C. Poor and D. Yuen, Private communication (2005).
[Sh] G. Shimura, The special values of the zeta functions associated with cusp forms, Comm. pure appl. Math. 29(1976), 783-804.

[Ste] W. A. Stein, The modular forms data base,
http://modular.fas.harvard.edu/index.html
[Su] T. Sugano, Jacobi forms and the theta lifting, Comment. Math. Univ. St.Paul. 44(1995), 1-58.
[Y] T. Yamazaki, Rankin-Selberg method for Siegel cusp forms, Nagoya Math. J. 120 (1990), 35-49.