# 代数体上の直交群の非正規玉河数の密度について

早坂紀彦, 雪江明彦 (東北大学大学院理学研究科)

ここで述べる結果は早坂紀彦と雪江明彦の共同研究によるものである．論文のプレプリントは [6], [7], [15] で (論文が出るまでは)

http://www.math.tohoku.ac.jp/~yukie/index-j.html

でダウンロードできる．

## 1 主結果

まず主結果を述べてから背景や歴史などについて解説する．論文では任意の代数体上で考察しているが，ここでは簡単のため $\mathbb{Q}$ 上で考察することにする．

この解説論文では主に

$$G = \mathrm{GL}(1) \times \mathrm{GL}(n),\ V = \mathrm{Sym}^2\mathrm{Aff}(n) \tag{1.1}$$

を考える．$x \in V$ を変数 $v_1, \ldots, v_n$ の 2 次形式

$$x(v) = \sum_{i \le j} x_{ij} v_i v_j$$

とみなす．これを対称行列

$$M_x = \begin{pmatrix} 2x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{12} & 2x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & 2x_{nn} \end{pmatrix}$$

と同一視する．ただし，標数 2 の体上ではこれは成り立たないが，この解説論文の中では実際に標数 2 の体上の考察をすることは無いので，問題は無いだろう．

$g \in \mathrm{GL}(n)$ なら，$v$ を行ベクトルとみなして $gx(v) = x(vg)$ と定義する．$\alpha \in \mathrm{GL}(1)$ なら，$\alpha$ の $x$ への作用は通常のスカラー倍で定義する．これにより $G$ の $V$ への

作用が定まる．この作用は $G$ から $\mathrm{GL}(V)$ への表現ともみなせる．この表現の核を $\widetilde{T}=\mathrm{Ker}(G\to\mathrm{GL}(V))$ とおく．簡単な考察により，

$$\widetilde{T}=\{(t^{-2},tI_n)\mid t\in\mathrm{GL}(1)\}$$

となることがわかる．$(G,V)$ は概均質ベクトル空間とよばれるものの 1 つだが，概均質ベクトル空間については後で少し解説する．この空間の generic point の集合を $V^{\mathrm{ss}}=\{x\in V\mid P(x)=\det M_x\neq 0\}$ とおく．

$x\in V^{\mathrm{ss}}$ に対し

$$\begin{aligned}\mathrm{O}(x)&=\{g\in\mathrm{GL}(n)\mid gx=x\},\\ \mathrm{SO}(x)&=\{g\in\mathrm{GL}(n)\mid gx=x,\det g=1\},\\ \mathrm{GO}(x)&=\{g\in\mathrm{GL}(n)\mid \exists\gamma\in\mathrm{GL}(1),gx=\gamma x\}\end{aligned}$$

とおく．$\mathrm{GO}(x)$ は similitude の群である．$\mathrm{PGO}(x)=\mathrm{GO}(x)/\{tI_n\}$ とおく．また，$\mathrm{SO}(x)$ をその中心で割った群を $\mathrm{PSO}(x)$ とおく．一般に代数群 $G$ の代数群としての 1 を含む連結成分 (identity component) を $G^\circ$ と書く．$\mathrm{GL}(1)$ は連結な代数群だが，$\mathrm{GL}(1)_{\mathbb{R}}=\mathbb{R}^\times$ を $\mathbb{R}$ の古典的な位相で考えると連結ではない．代数群としては $\mathrm{PGO}(x)^\circ=\mathrm{PSO}(x)$ である．なお $K$ を基礎体を含む任意の体とするとき $\mathrm{PGO}(x)^\circ_K=\mathrm{GO}(x)^\circ_K/K^\times$ だが，$n$ が偶数のとき，$\mathrm{SO}(x)_K\to\mathrm{PSO}(x)_K=\mathrm{PGO}(x)^\circ_K$ は必ずしも全射ではない．簡単な考察により，$G_x/\widetilde{T}\cong\mathrm{PGO}(x)$ がわかる．ただし，$G_x$ は $x$ の stabilizer である．

$S_n$ を $\mathrm{PGO}(x)^\circ$ $(x\in V^{\mathrm{ss}}_{\mathbb{Q}})$ という形をした $\mathbb{Q}$ 上の代数群の $\mathbb{Q}$ 同型類の全体の集合とする．$0\leq i\leq[\frac{n}{2}]$ に対し，$S_n$ の元で符号が $(i,n-i)$ であるような $x\in V^{\mathrm{ss}}_{\mathbb{Q}}$ を代表元に持つような類の集合を $S_{n,i}$ とおく．$x\in V^{\mathrm{ss}}_{\mathbb{Q}}$ に対して判別式と呼ばれる正の整数 $\Delta_x$ を後で定義する．

主結果を述べるのにもう少しだけ定義をする．以降 $r=\left[\frac{n}{2}\right]$ とおく．$\mathbb{A}$, $\mathbb{A}^\times$ を $\mathbb{Q}$ のアデール環, イデール群とする．$dg''_{x,\mathbb{A}}$ を岩澤分解によって定義された $\mathrm{PGO}(x)^\circ_{\mathbb{A}}$ 上の測度とする．この測度を使って $V(x)=\mathrm{vol}(\mathrm{PGO}(x)^\circ_{\mathbb{A}}/\mathrm{PGO}(x)^\circ_{\mathbb{Q}})$ とおく．なお $G_x^\circ\cong\mathrm{GO}(x)^\circ$ であり，任意の体 $\mathbb{Q}\subset K$ に対し $G^\circ_{x\,K}\to(G^\circ_x/\widetilde{T})_K$ は全射なので (Hilbert の定理 90 により),

$$\mathrm{PGO}(x)^\circ_{\mathbb{A}}/\mathrm{PGO}(x)^\circ_{\mathbb{Q}}\cong G^\circ_{x\,\mathbb{A}}/G^\circ_{x\,\mathbb{Q}}\widetilde{T}_{\mathbb{A}}$$

である．

$\Gamma(s)$ を通常のガンマ関数とし，$\Gamma_{\mathbb{R}}(s)=\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})$ とおく．素数 $p$ に対し

$$\begin{aligned}E_p&=1-\frac{3}{4}p^{-2}-\frac{1}{4}p^{-3}-p^{-r-1}+\frac{1}{2}p^{-r-2}+\frac{1}{2}p^{-r-3}+\frac{1}{4}p^{-2r-2}-\frac{1}{4}p^{-2r-3},\\ E'_p&=1-p^{-2}-p^{-2r-1}+p^{-2r-2}+\frac{1}{4}p^{-3}\frac{(1-p^{-1})^2(1-p^{-(r-1)})(1-p^{-2r})}{1-p^{-2}}\end{aligned}$$

とおく．

以下の 2 つの定理が主結果である．なお $n$ が奇数なら $\mathrm{PGO}(x)=\mathrm{PGO}(x)^\circ\cong\mathrm{PSO}(x)\cong\mathrm{SO}(x)$ である．

**定理 1.2** $n = 2r+1 \geq 3$ が奇数なら次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
&\lim_{X\to\infty} X^{-\frac{n+1}{2}} \sum_{\substack{x,y\in S_{n,\mathbb{i}} \\ \Delta_x\Delta_y<X}} \mathrm{vol}(\mathrm{SO}(x)_{\mathbb{A}}/\mathrm{SO}(x)_{\mathbb{Q}})\mathrm{vol}(\mathrm{SO}(y)_{\mathbb{A}}/\mathrm{SO}(y)_{\mathbb{Q}}) \\
&= \frac{2^{-n+\mathbb{i}(n-\mathbb{i}+1)+2}}{n+1}\left(\prod_{1\leq j\leq \mathbb{i}}\Gamma_{\mathbb{R}}(j)\prod_{1\leq j\leq n-\mathbb{i}}\Gamma_{\mathbb{R}}(j)\prod_{1\leq j\leq r}\zeta(2j)\right)^2\prod_p E_p.
\end{aligned}$$

**定理 1.3** $n = 2r \geq 4$ が偶数なら次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
&\lim_{X\to\infty} X^{-\frac{n+1}{2}} \sum_{\substack{x\in S_{n,\mathbb{i}} \\ \Delta_x<X}} \mathrm{vol}(\mathrm{PSO}(x)_{\mathbb{A}}/\,\mathrm{PSO}(x)_{\mathbb{Q}}) \\
&= \frac{2^{-n+\frac{\mathbb{i}(n-\mathbb{i}+1)}{2}+2}}{n+1}\prod_{1\leq j\leq \mathbb{i}}\Gamma_{\mathbb{R}}(j)\prod_{1\leq j\leq n-\mathbb{i}}\Gamma_{\mathbb{R}}(j)\prod_{1\leq j\leq r}\zeta(2j)\prod_p E'_p.
\end{aligned}$$

$n = 2$ の場合も証明できるが，この場合は次のよく知られた Goldfeld–Hoffstein の定理 [5] になる.

**定理 1.4 (Goldfeld–Hoffstein，1985)** $h_F, R_F$ を 2 次体 $F$ の類数，レギュレーターとするとき，次が成り立つ.

$$\lim_{X\to\infty} X^{-\frac{3}{2}} \sum_{\substack{[F:\mathbb{Q}]=2 \\ 0<\Delta_F\leq X}} h_F R_F = \frac{\pi^2}{36}\prod_p(1-p^{-2}-p^{-3}+p^{-4}),$$

$$\lim_{X\to\infty} X^{-\frac{3}{2}} \sum_{\substack{[F:\mathbb{Q}]=2 \\ 0<-\Delta_F\leq X}} h_F = \frac{\pi}{18}\prod_p(1-p^{-2}-p^{-3}+p^{-4}).$$

## 2 ガウス予想とジーゲルの定理

以下この結果の背景と歴史について解説する．この節ではガウス予想について述べる.

2 次体 $F$ の order とは 1 を含む $F$ の部分環 $R$ で $\mathbb{Z}$ 加群としては階数が 2 であるものである．$F$ に含まれる階数 2 の $\mathbb{Z}$ 加群 $M$ が $R$ に属するとは，$R = \{x \in F \mid XM \subset M\}$ となることである．$R$ に属する 2 つの加群 $M_1, M_2$ が狭義の同値とはノルムが正の元 $\gamma \in F$ があり，$M_1 = \gamma M_2$ となることである．2 次体の order はその『判別式』(ここでは定義しないが) によって定まるので，それを $\mathcal{O}_D$ と書く.

$\mathcal{O}_D$ に属する加群の狭義の同値類の数は有限であることが知られている．この数を $h_D$ と書く．またレギュレーターの類似 $R_D$ を定義することもできる．ガウスは次を予想した.

**予想 2.1 ガウス予想**

$$\sum_{-X<D<0} h_D \sim \frac{4\pi}{21\zeta(3)} X^{\frac{3}{2}}.$$

ここで，2 次体 $F$ は固定していない．つまり，判別式 $D$ のオーダーが含まれる 2 次体 $F$ は全ての 2 次体を考えるものとする．また $D>0$ の場合にも同様の主張を考えることができる ($\pi$ は $\pi^2$ になるが)．ガウス予想は $D<0$ の場合には Lipschutz [10] により 1865 年に証明された．$D>0$ の場合には Siegel により 1944 年に証明された．Siegel [13] はさらに，2 変数 2 次形式だけでなく，変数の数が任意の整数係数 2 次形式の整同値類に対し，対応する特殊直交群 $\mathrm{SO}(x)$ の測度 $\mathrm{vol}(\mathrm{SO}(x)_{\mathbb{R}}/\mathrm{SO}(x)_{\mathbb{Z}})$ を定式化し，$x$ の判別式 $\Delta_x$ に対して

$$\lim_{X\to\infty} X^{-\frac{n+1}{2}} \sum_{|\Delta_x|<X} \mathrm{vol}(\mathrm{SO}(x)_{\mathbb{R}}/\mathrm{SO}(x)_{\mathbb{Z}}) = \frac{2}{n+1}\prod_{i=2}^{n}\Gamma_{\mathbb{R}}(i)$$

であることを証明した．ただし，$x$ は非退化な整数係数 2 次形式の同値類で $|\Delta_x|<X$ であるもの全体を動くものとし，$\mathrm{SO}(x)_{\mathbb{R}}$ 上の測度はある意味で正規化されたものとする．その後，ガウス予想の誤差項については Mertens, Vinogradov, 新谷, Chamizo-Iwaniec などによって，より精密な評価が得られている．これらの文献については [1] を参考にされたい．

これらは本質的に $\mathbb{Z}$ 上の同値類に関する結果である．一般的には $\mathbb{Q}$ 上の同値類を数えるほうが難しい場合が多い．それは何故かというと，例えばある領域に含まれる整数点の個数はその領域の体積で近似でき，それを考察するのにテクニカルな難しさがある場合も多いが，少なくとも領域の体積というとっかかりはある．しかし，$\mathbb{Q}$ 上の同値類はもっとまばらであり，まばらなのは領域の体積のようなもので直接考察することができないから難しいのである．しかし，$\mathbb{Z}$ 上の同値類の考察と無関係ではなく，$\mathbb{Z}$ 上の同値類に後で解説する『フィルター化プロセス』というものを適用することにより得られる場合もある．

2 変数 2 次形式の空間の場合には，$\mathbb{Z}$ 上の同値類 (ただしスカラー倍は考察する) を考えれば $h_D R_D$ を考察することになるが，$\mathbb{Q}$ 上の同値類を考えると $h_F R_F$ を考察することになる．なお $\mathbb{Q}$ 上の同値類の集合は 2 次以下の体の同型類を 1 対 1 に対応するが，その stabilizer が対応する 2 次体の GL(1) になるので，$h_F R_F$ を考察することになるのである ([14])．Goldfeld-Hoffstein は 2 変数 2 次形式の空間を考察したわけではなく，重さ半整数の Eisenstein 級数を考察した．したがって我々の定式化とは異なるが，1 つの 2 次体 $F$ に対し無限個の判別式 $D$ のオーダーがあるという曖昧さを初めて取り除いた仕事になっている．

2 変数 2 次形式の空間の考察では Datskovsky [2] が 1993 年にこの場合のゼータ関数の考察による Goldfeld-Hoffstein の定理の別証明を与えている．

## 3 Tauber 型定理

ここでは以下の密度定理の基本となる Tauber 型定理について復習する.

$a_n \geq 0$ が与えられたとき,

$$f(s) = \sum_n \frac{a_n}{n^s}$$

をその生成関数という. 次の定理は Tauber 型定理の一番簡単な場合である.

**定理 3.1 Tauberian 型定理** $f(s)$ は $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ で絶対収束し, $c > 0$ があり, $\mathrm{Re}(s) \geq c$ で $s = c$ で一位の極を持つ以外は正則であり, $s = c$ での留数は $A$ であるとする. このとき,

$$\sum_{n<X} a_n \sim \frac{A}{c} X^c.$$

なお $s = c$ での極の位数は 1 でなくてもよいが, ここでは 1 位の極である場合しか考察しない.

**定理 3.2 Landau (1915)** $f(s)$ が関数等式とある条件を満たせば

$$\sum_{n<X} a_n \sim (\text{極から定まる項}) + \text{誤差項}.$$

この定理の条件は大雑把にいうと, 関数等式で現れるガンマ関数の商で, 分母と分子のオーダーがある意味で一致するというものである. 詳しいことはここでは述べることはできない. 2 次形式の空間の場合, $n \geq 4$ なら Landau の定理を適用すると, 誤差項のほうが 2 番目の極から定まる項より大きい. したがって, 誤差項を期待できる場合において, Tauber 型の定理はまだ望ましい状態ではなく, 非常に改良の余地があるといえる.

## 4 標準的代表元, 判別式

**定義 4.1** $G$ は簡約群, $\chi$ を基礎体上定義された $G$ の指標, $V$ を $G$ の有限次元表現とする. このとき, 定数でない $V$ 上の多項式 $P$ があり, $P(gx) = \chi(g)P(x)$ となるとき, $(G, V)$ を概均質ベクトル空間という.

正確には $(G, V, \chi)$ と書くべきかもしれないが, $V$ が既約表現なら, $\chi$ は本質的には 1 つしかないことがわかる. 我々は既約表現の場合だけを考えるので, $(G, V)$ と書くことにする.

以降 $(G, V)$ は既約と仮定する. 上の定義の $P$ を相対不変式という. 任意の相対不変式は最低次の相対不変式のべきの定数倍であることが知られている ($V$ が既約表現なので). $V^{\mathrm{ss}} = \{x \in V \mid P(x) \neq 0\}$ とおく. $x \in V^{\mathrm{ss}}$ に対し $G_x$ が簡約群なら, $(G, V)$ は正則であるという.

佐藤–木村 [11] により既約で正則な概均質ベクトル空間は本質的には 29 のタイプに分類されることが知られている．典型的な例は，$n$ 変数 2 次形式の空間 $\mathrm{Sym}^2\mathbb{Q}^n$ や 3 変数 2 次形式の空間 $\mathrm{Sym}^3\mathbb{Q}^2$ などである．

以下 $(G,V)$ は $\mathbb{Q}$ を基礎体とする，既約正則な概均質ベクトル空間であると仮定する．

**定義 4.2** (1) $p$ が素数，$x \in V_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{ss}}$ なら，次の条件が満たされるとき $x$ は標準的であるという．

$$(*) \qquad y \in G_{\mathbb{Q}_p}x \cap V_{\mathbb{Z}_p} \Longrightarrow \mathrm{ord}_p(P(y)) \geq \mathrm{ord}_p(P(x))$$

(2) $x \in V_{\mathbb{R}}^{\mathrm{ss}}$ なら，$|P(x)| = 1$ であるとき $x$ は標準的であるという．

$p$ が素数で $x \in V_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{ss}}$ なら，標準的な $y \in G_{\mathbb{Q}_p}x$ を選んで $\Delta_{x,p} = |P(y)|_p^{-1}$ と定義する．$x \in V_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ss}}$ なら，

$$\Delta_x = \prod_p \Delta_{x,p}$$

と定義する．

# 5 $n$ が奇数の場合の考察

$n$ が奇数の場合と $n$ が偶数の場合の考察はかなり異なるので，この節では $n$ が奇数の場合を考える．$n$ の偶奇にかかわらず，$n \geq 3$ なら

$$G_{\mathbb{Q}} \backslash V_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ss}} \cong S_n$$

であることがわかる．この形の主張が書いてあるところを知らないので，証明を一応 [6] で書いたが,『古典的』であるというべきことだろう．

$n$ が奇数の場合は前節の Tauber 型の定理を直接適用することによって主結果が得られてしまう．Dirichlet 級数 $\widetilde{Z}_i(s)$ を

$$\widetilde{Z}_i(s) = \sum_{\mathrm{PGO}(x)^\circ \in S_{n,\mathbb{i}}} \frac{V(x)}{\Delta_x^s} \tag{5.1}$$

と定義する．これは概均質ベクトル空間 (1.1) のゼータ関数ではない．$n$ が奇数の場合は $G_{\mathbb{Q}} \backslash V_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ss}}$ がほとんど $G_{\mathbb{Q}_v} \backslash V_{\mathbb{Q}_v}^{\mathrm{ss}}$ $(v = p, \infty)$ の積で表すことができる．伊吹山–斎藤は [8] で，あるテクニックを使って概均質ベクトル空間 (1.1) のゼータ関数を 2 つのオイラー積の和で表したが，そのテクニックを使うと，(局所密度の考察を経て) $\widetilde{Z}(s)$ も次のように 2 つのオイラー積の和で書けることがわかる．

$$\widetilde{Z}_i(s) = C_{\infty,i}\left(\prod_p L_1(s) + \prod_p L_2(s)\right)$$

ただし，$C_{\infty,i} > 0$ は無限素点の考察で定まる定数であり，$L_1(s), L_2(s)$ は次の形をしている．

$$L_1(s) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{2}p^{-(s-r)} + \cdots\right), \quad L_2(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{2}p^{-(s-r)} + \cdots\right).$$

以下 $\widetilde{Z}_i(s)^2$ が $s = r+1$ で 1 位の極を持つことの証明の概略を述べる．当然

$$\widetilde{Z}(s)^2 = C_{\infty,i}^2 \left(L_1(s)^2 + 2L_1(s)L_2(s) + L_2(s)^2\right)$$

である．$\widetilde{Z}(s)$ が $\mathrm{Re}(s) > r+1$ で正則であることはほぼ明らかである．$s = r+1$ の周りの挙動が知りたいところだが，$L_1(s)L_2(s)$, $L_2(s)^2$ は $s = r+1$ で正則であることがわかる．したがって，肝心な部分は $L_1(s)^2$ である．リーマンゼータ $\zeta(s)$ と比べることにより，$L_1(s)^2$ を調べる．

$$\begin{aligned}\zeta(s-r)^{-1}L_1(s)^2 &= \prod_p (1 - p^{-(s-r)}) \left(1 + \frac{1}{2}p^{-(s-r)} \cdots\right)^2 \\ &= \prod_p (1 - p^{-(s-r)}) \left(1 + p^{-(s-r)} \cdots\right)\end{aligned}$$

となるが，オイラー積を展開すると，$p^{-(s-r)}$ の項が無くなるので，$\zeta(s-r)^{-1}L_1(s)^2$ は $s = r+1$ で正則になる．この $s = r+1$ での値を計算すると，定理 1.2 の $E_p$ になることがわかる．したがって，

$$\widetilde{Z}_i(s)^2 = C_{\infty,i}^2 \textstyle\prod_p E_p \zeta(s-r) + \text{正則関数}$$

となり，$\widetilde{Z}_i(s)^2$ は $s = r+1$ で 1 位の極を持つ．

$\widetilde{Z}_i(s)$ の定義 (5.1) を使うと，

$$\widetilde{Z}_i(s)^2 = \sum_{x,y \in S_{n,i}} \frac{V(x)V(y)}{(\Delta_x \Delta_y)^s}.$$

となる．$\frac{2}{n+1}C_{\infty,i}^2$ は定理 1.2 のオイラー積以外の部分になるので，定理 3.1 を適用すると，定理 1.2 が得られる．証明はしてないが，$n$ odd なら多分

$$\sum_{\Delta_x < X} V(x) \ll X^{\frac{n+1}{2}}$$

である．

# 6　大域ゼータ関数と標準軌道積分

この節では $n$ が偶数の場合を考察する．この場合は概均質ベクトル空間 (1.1) のゼータ関数の大域的な考察と局所的な考察が必要である．$n$ が奇数の場合のような考

察が可能かどうかは不明だが，仮に可能であったとしても $n$ が奇数の場合の考察よりはずっと難しいはずである．

まず大域ゼータ関数を定義する．$(G,V)$ を既約正則な概均質ベクトル空間とする．また表現 $G \to \mathrm{GL}(V)$ は忠実であると仮定する．$P(x)$ を相対不変式，$P(gx) = \chi(g)P(x)$ とする．$G_{\mathbb{A}}$ 上の不変測度 $dg$ を選んでおく．$L_0$ を $x \in V_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ss}}$ で $G_x$ の中心が split トーラスを含まないものよりなる集合とする．$\Phi$ を $V_{\mathbb{A}}$ 上の Schwartz–Bruhat 関数，つまり $V_{\mathbb{R}}$ 上では $e^{-x_1^2-\cdots}$ のような関数で，有限素点ではサポートがコンパクトで局所的に定数であるようなものとする．複素変数 $s \in \mathbb{C}$ に対し大域ゼータ関数 $Z(\Phi,s)$ を次で定義する．

**定義 6.1**

$$Z(\Phi,s) = \int_{G_{\mathbb{A}}/G_{\mathbb{Q}}} |\chi(g)|^s \sum_{x \in L_0} \Phi(gx)dg$$

$Z(\Phi,s)$ が $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ で絶対収束することは Weil, 井草, 佐藤–新谷, 雪江, 斎藤 などにより証明された．我々の場合 (1.1) には，$n \geq 3$ なら，$L_0 = V_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ss}}$ であり，$n = 2$ なら，$L_0$ は $\mathbb{Q}$ 上既約な 2 次形式の集合になる．

**定義 6.2** $x \in L_0$ なら，$V(x) = \mathrm{vol}(G_{x\,\mathbb{A}}^{\circ}/G_{x\,\mathbb{Q}}^{\circ})$ とおき，$G_x^{\circ}$ の非正規玉河数という．

うまい名前が思いつかなかったので非正規玉河数と呼んだが，何かよい呼びかたを御存じの方は是非教えていただきたいものである．$Z(\Phi,s)$ はある意味では $V(x)$ の生成関数となる．それを説明するために標準軌道積分について述べる．

$v = p,\infty$ とする．定数 $c = \dim V/\deg P$ とおくと $|P(y)|_v^{-c}dy$ は $V_{\mathbb{Q}_v}$ 上の不変測度である．$G_{\mathbb{Q}_v}/G_{x\,\mathbb{Q}_v}^{\circ}$ 上の不変測度 $dg'_{x,v}$ を $F$ が $V_{\mathbb{Q}_v}$ 上の可測関数なら，

$$\int_{G_{\mathbb{Q}_v}/G_{x\,\mathbb{Q}_v}^{\circ}} F(gx)dg'_{x,v} = \int_{y \in G_{\mathbb{Q}_v}x} F(y)|P(y)|_v^{-c}dy$$

となるように定める．

詳しくは書かないが，$G_{x\,\mathbb{Q}_v}^{\circ}$ は岩澤分解を持つことが知られているので，それにより不変測度 $dg''_{x,v}$ を定めることができる．$dg'_{x,v}dg''_{x,v}$ は $G_{\mathbb{Q}_v}$ 上の不変測度なので，定数 $b_{x,v} > 0$ があり，

$$dg_v = b_{x,v}dg'_{x,v}dg''_{x,v}$$

となる．

**定義 6.3** $\Phi$ を $V_{\mathbb{Q}_v}$ 上の Schwartz–Bruhat 関数, $s \in \mathbb{C}$ とするとき，

$$Z_{x,v}(\Phi,s) = b_{x,v}\int_{G_{\mathbb{Q}_v}/G_{x\,\mathbb{Q}_v}^{\circ}} |\chi(g'_{x,v})|_v^s \Phi(g'_{x,v}x)dg'_{x,v}$$

とおき，局所軌道積分という．また，$x \in V_{\mathbb{Q}_v}^{\mathrm{ss}}$ なら標準的な $y \in G_{\mathbb{Q}_v}x$ を選んで

$$\Xi_{x,v}(\Phi,s) = Z_{y,v}(\Phi,s)$$

を標準局所軌道ゼータ関数という．

$x \in V_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ss}}$, $\Phi = \otimes \Phi_v$ が Schwartz–Bruhat 関数 なら，

$$\Xi_x(\Phi_v, s) = \prod_v \Xi_{x,v}(\Phi_v, s)$$

とおき，大域標準軌道積分と呼ぶ．すると，次が成り立つ．

**命題 6.4**

$$Z(\Phi, s) = \sum_{G_{\mathbb{Q}} \backslash L_0} \frac{V(x)}{\Delta_x^s} \Xi_x(\Phi_v, s).$$

ここで，$Z(\Phi, s)$ の解析的な性質がよくわかったとして，もし $\Xi_x(\Phi_v, s)$ の部分が無ければ，Tauber 型定理を直接適用して $V(x)$ の密度を得ることができる．しかし，実際には $\Xi_x(\Phi_v, s)$ があるので，何とかしてこの部分を取り除くことをしなければならない．それはフィルター化プロセスというであり，次節で解説する．

# 7 フィルター化プロセス

フィルター化プロセスとは $\mathbb{Q}$ 上の同値類の密度を得るための方法で，Datsukovsky–Wright [3] で定式化された．しかし内在的には Davenport–Heilbronn [4] で使われている．なお，$\mathbb{Z}$ 上の同値類に関しては密度定理の 2 番目の項が決定されたこともあるが，フィルター化プロセスによって $\mathbb{Q}$ 上の同値類の密度の 2 番目の項が決定されたことは一度もない．フィルター化プロセスの改良が望まれるところである．

フィルター化プロセスを正確に述べることはここではできないが，これを適用するためには大体次のようなことが必要である．

**フィルター化プロセスで必要なこと**

(0) $Z(\Phi, s)$ の極の主要部を求める．

(1) 有限個の $p$ を除き，標準局所軌道積分の $p$-展開の定数項が 1 であることを示す．

(2) 標準局所軌道積分の一様評価を示す．

(3) 密度定理の定数をオイラー積として求め，それが有限の値であることを示す．

前説の終わりで $Z(\Phi, s)$ の展開について述べたが，$\Xi_x(\Phi, s)$ の寄与を除くとしたら，(1) が成り立たなければならないことはわかっていただけるのではないかと思う．$\Xi_x(\Phi, s) = 1 + \cdots$ となったとして，1 以外の部分を取り除くとしたら，何らかの評価が成り立っていなければならないことは明らかである．それが (3) の意味するところだが，2 次形式の空間の場合には後でもう少し正確に述べることにする．

ある意味では，$\mathbb{Z}$ 上の同値類を減らしていって，無限個の密度定理のさらなる極限をとるようなことを考えているので，各々の場合に密度定理が比較的よくわかってい

なければならない．だから (1) が必要であり，$\mathbb{Z}$ 上の同値類を減らしていったときの極限が存在しなければならないので，(3) が必要である．

2 次形式の空間のゼータ関数の場合，大域ゼータ関数の極の留数 (主要部) は次のようにして決定された．

- 新谷 [12] 1975 正定値な形式の部分
- 雪江 [16] 1993 全ての場合
- 伊吹山–斎藤 [8] 1995 “明示公式”

伊吹山–斎藤の明示公式とは，$n$ が奇数なら，大域ゼータ関数がリーマンゼータ関数の積の 2 つの和であり，$n$ が偶数なら，大域ゼータ関数がリーマンゼータ関数と重さ半整数の Eisenstein 級数の積の 2 つの和であることを意味する．$n$ が偶数の場合，これは大域ゼータ関数が $n=2$ の場合と同じくらいの難しさであるということを意味する．$n=2$ なら，大域ゼータ関数と重さ半整数の Eisenstein 級数は大体同じくらいの難しさである．

2 次形式の場合の大域ゼータ関数の極の主要部に関しては，後で少しだけ解説する．フィルター化プロセスの (3) についてはこの解説論文では述べない．

# 8 標準局所軌道積分の定数項

$p>0$ を素数とする．以下 $\Phi$ が $V_{\mathbb{Z}_p}$ の特性関数の場合を考え，$\Xi_{x,p}(\Phi,s)$ の代わりに $\Xi_{x,p}(s)$ と書く．

$$\Xi_{x,p}(s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_{x,n}p^{-ns}$$

と書けるが，$x\in V^{\mathrm{ss}}_{\mathbb{Q}_p}$ がが標準的なら $n<0$ に対し $a_{x,n}=0$ である．

候補となる $x$ に対して次を示したい．

(a) $x$ は標準的

(b) $a_{x,0}=1$ (フィルター化プロセスの (1) にあたる.)

これらを示すために，Datskovsky [2], Kable–Yukie [9] では『$\Omega$ 集合』という概念が使われたが，$G_x$ がトーラスでないときは都合が悪かった．$G_x$ がトーラスでないときも適用できるような方法が望ましいが，[15] では次の簡明な判定法を示した．

$K_p$ を，それによって岩澤分解が成立する $G_{\mathbb{Q}_p}$ の極大コンパクト部分群とする．$\mathrm{GL}(n)$ に関しては $\mathrm{GL}(n)_{\mathbb{Z}_p}$ がとれる．[15] では次が示されている．

**命題 8.1** 次の (c), (d) が成り立てば (a), (b) が成り立つ．

(c) $g\in G_{\mathbb{Q}_p}$, $gx\in V_{\mathbb{Z}_p}$ なら $\chi(g)\in\mathbb{Z}_p$.

(d) さらに $\chi(g) \in \mathbb{Z}_p^\times$ なら $g \in K_p G^\circ_{x\,\mathbb{Q}_p}$.

簡単な例を考える．2 変数 2 次形式の空間で $x = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2p \end{pmatrix}$. の場合に上の (c), (d) が成り立つことを示して，一般にどんな考察をしなければならないかを説明することにする．$p \neq 2$ と仮定する．

$g \in G_{\mathbb{Q}_p}$ で $gx \in V_{\mathbb{Z}_p}$ とする．岩澤分解により $g$ は次の形とする．

$$g = \left( t, \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{pmatrix} \right).$$

なお，$\widetilde{T}$ の元をかけることにより，$g$ の $(2,2)$-成分は 1 と仮定してよい．簡単な計算により，

$$gx = \begin{pmatrix} 2tt_1^2 & 2tt_1u \\ 2tt_1u & 2t(p+u^2) \end{pmatrix}, \quad \chi(g) = (tt_1)^2.$$

である．

したがって，$gx \in V_{\mathbb{Z}_p}$ なら

$$tt_1^2,\ tt_1u,\ t(p+u^2) \in \mathbb{Z}_p.$$

したがって，

$$p(tt_1)^2 = (tt_1^2)t(p+u^2) - (tt_1u)^2 \in \mathbb{Z}_p.$$

$\mathrm{ord}_p(p) = 1$ なので，$tt_1 \in \mathbb{Z}_p$ である．これで (c) が示せた．

ここであたりまえでないことをしている．$p(tt_1)^2 \in \mathbb{Z}_p$ という条件から，$\mathrm{ord}_p(p)$ は奇数で $\mathrm{ord}_p((tt_1)^2)$ は偶数ということから，$tt_1 \in \mathbb{Z}_p$ と結論することができた．もし分数べきが許されるなら，$tt_1 \in p^{-\frac{1}{2}}\mathbb{Z}_p$ となるが，実際には分数べきはないので，$tt_1 \in \mathbb{Z}_p$ となる．いってみれば，$p$ のべきを 1/2 だけ『稼いだ』ことになるのである．この場合は非常に簡単だが，一般にはこのような考察は分岐，不分岐などの条件に依存した手強い考察になる．このような考察が，標準局所軌道積分の定数項が 1 であることの証明に必要な典型的な考察である．

(d) も示す．もし，さらに $tt_1 \in \mathbb{Z}_p^\times$ なら

$$t_1 = (tt_1^2)(tt_1)^{-1} \in \mathbb{Z}_p, \quad u = (tt_1)^{-1}(tt_1u) \in \mathbb{Z}_p.$$

$\mathrm{ord}(p+u^2) \leq 1$ なので，$t \in p^{-1}\mathbb{Z}_p$ である．もし $t \in \mathbb{Z}_p$ なら，$t, t_1 \in \mathbb{Z}_p$ で $tt_1 \in \mathbb{Z}_p^\times$ なので，$t, t_1 \in \mathbb{Z}_p^\times$ である．これより $u \in \mathbb{Z}_p$ もわかり，$g \in K_p$ となる．

$\mathrm{ord}(t) = -1$ なら

$$g = \left( p^{-1}, \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ pu & 1 \end{pmatrix} \right).$$

を考えればよい．

$$h = \left( p^{-1}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

は $G_{x\,\mathbb{Q}_p}$ の元で $gh^{-1} \in K_p$ となる．ここでは示さないが，$G_{x\,\mathbb{Q}_p}/G^{\circ}_{x\,\mathbb{Q}_p}$ の代表元として $K_p$ の元がとれることがわかるので，(d) が示せた．したがって，$x$ は標準的であり，$\Xi_{x,p}(s)$ の定数項が 1 であることがわかった．

# 9　井草ゼータ 対 標準軌道ゼータ

2 次形式の空間の場合に標準局所軌道積分の一様評価を定式化し，その概要を述べる．また，井草ゼータ関数との関連について述べる．この節では偶数 $n = 2r$ に対し $V = \mathrm{Sym}^2\mathbb{Q}^n$ を考える．素数 $p \neq 2$ を固定する．

前に述べたように $c = \dim V/\deg P = \frac{n+1}{2}$ とする．このとき，$F(s) = \int_{V_{\mathbb{Z}_p}} |P(x)|^{s-c} dx$ を井草ゼータ関数という．$V^{\mathrm{ss}}_{\mathbb{Q}_p}$ は 5 つの軌道よりなることがわかる．$f_1(s), \ldots, f_5(s)$ を 5 つの軌道に対応する $\Xi_{x,p}(s)$ とする．すると，$F(s)$ は $f_i(s)$ で次のように表せる ([15] 参照).

$$\begin{aligned} F(s) &= A_1(p) f_1(s) + A_2(p) f_2(s) \\ &\quad + p^{-(s-\frac{n-1}{2})} A_3 f_3(s) + p^{-(s-\frac{n-1}{2})} A_4(p) f_4(s) + p^{-(2s-n+2)} A_5(p) f_5(s). \end{aligned}$$

ここで $A_1(p), \ldots, A_5(p)$ は 1 に近い定数である．

この場合の井草ゼータ関数は伊吹山–斎藤 [8] によって計算された．知りたいのは $s = n/2 = r$ の周りでの振舞である．$s = r + \epsilon$ を代入すると，

$$p^{-2-2\epsilon} A_5(p) f_5(r+\epsilon) \leq F(r+\epsilon)$$

となる．したがって，$f_5(r+\epsilon)$ は大体 $p^2 F(r+\epsilon)$ で評価できるが，$p^2$ は $p$ が大きくなるにしたがって大きくなるので，井草ゼータから得られる情報は都合が悪い．よって，軌道積分そのものを調べなければならない．

この場合の一様評価とは

$$f_1(s), \ldots, f_5(s) \leq L(p^{-s})$$

となるオイラー因子 $L(p^{-s})$ で，$\mathrm{Re}(s) > r$ で $\prod_p L(p^{-s})$ が絶対収束するものを見つけるということである．伊吹山–斎藤 [8] も明示公式の証明で使ったが，これには 2 次形式の Jordan 分解というものを使う．

# 10　標準軌道積分の一様評価

Jordan 分解について解説する．次の定理は古典的である．

**定理 10.1** 任意の $x \in V_{\mathbb{Z}_p}^{\mathrm{ss}}$ は $\mathrm{GL}(n)_{\mathbb{Z}_p}$ の元で

$$\begin{pmatrix} p^{t_1}A_1 & 0 & 0 \\ 0 & p^{t_2}A_2 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix} \tag{10.2}$$

という形の元に移る．ただし，$t_1 < t_2 < \cdots$, $\det A_i \in \mathbb{Z}_p^\times$ である．これを Jordan 分解という．

$A_i$ のサイズ を $n_i$ とおく．(10.2) という形の $x$ の集合を $S(\{n_i\},\{t_i\})$ とし，$D(\{n_i\},\{t_i\}) = \mathrm{GL}(n)_{\mathbb{Z}_p} S(\{n_i\},\{t_i\})$ とおく．$x$ を標準的な元とする．$Y_x = (G_{\mathbb{Q}_p}x \cap V_{\mathbb{Z}_p})\backslash K_p x$ とおく．

$$\Xi_{x,p}(s) - 1 = b_{x,p}|P(x)|_p^{-s} \int_{Y_x} |P(y)|_p^{s-\frac{n+1}{2}} dy$$

となるので，$\Xi_{x,p}(s) - 1$ を評価するためには次の積分を考えればよい．

$$\int_{Y_x \cap D(\{n_i\},\{t_i\})} |P(y)|_p^{s-\frac{n+1}{2}} dy.$$

$S(\{n_i\},\{t_i\})$ の stablizer はやさしいので，$\mathrm{vol}(D(\{n_i\},\{t_i\}))$ を記述することができる．

$$Q(\{n_i\},\{t_i\}) = \sum t_i \frac{n_i(n_i+1)}{2} + \sum t_i n_i n_j$$

とおくと，1 に近い定数 $A$ があり，

$$\mathrm{vol}(D(\{n_i\},\{t_i\})) \leq A p^{-Q(\{n_i\},\{t_i\})}$$

となる．$y \in D(\{n_i\},\{t_i\})$ なら，$|P(y)|_p = p^{-\sum t_i n_i}$ となることはすぐにわかるので，

$$\int_{Y_x \cap D(\{n_i\},\{t_i\})} |P(y)|_p^{s-\frac{n+1}{2}} dy \leq A p^{-Q(\{n_i\},\{t_i\})} p^{-(s-\frac{n+1}{2})\sum t_i n_i}$$

である． 右辺は正体のよくわかったものなので，組合せ論的な考察でほとんどの $\{n_i\},\{t_i\}$ は無視できることがわかり，有限個の $\{n_i\},\{t_i\}$ の可能性に帰着できる．その有限個の $\{n_i\},\{t_i\}$ については個別に調べると，評価がうまくいかないものは，分岐，不分岐などの条件から，ありえない場合であることが証明されるなどして一様評価が証明できる．詳しくは論文を参照されたい．

## 11 大域ゼータの極の主要部の決定の概略

最後に大域ゼータの極の主要部の決定の概略を解説する．$V_{\mathbb{Q}}$ は $V_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ss}}$ と階数が $i$ の形式の集合 $S_i$ よりなる．$\Theta_i(\Phi, g) = \sum_{x \in S_i} \Phi(gx)$ とおく．大域ゼータ関数の考察で

Poisson の和公式を使うと

$$\sum_i \Theta_i(\widehat{\Phi}, g^\iota) - \sum_i \Theta_i(\Phi, g) \tag{11.1}$$

を考えることになる．ただし $\widehat{\Phi}$ はある双線形形式に関するフーリエ変換で，$g^\iota$ はある involution である．$\Theta_i(\Phi, g)$ が $\{g \in \mathrm{GL}(n)_{\mathbb{A}} \mid |\det g| = 1\}/\mathrm{GL}(n)_{\mathbb{Q}}$ 上可積分なら扱いが簡単であることはよく知られている．(11.1) は $\{g \in \mathrm{GL}(n)_{\mathbb{A}} \mid |\det g| = 1\}/\mathrm{GL}(n)_{\mathbb{Q}}$ 上可積分だが，各々の項は可積分ではないかもしれない．実は可積分でないものは $i = 2, n-1$ になる．したがって，何らかの形で発散積分が打ち消し合って可積分な関数になっているはずである．その打ち消し合いを Eisenstein 級数を使って間接的に実現するのが大域ゼータの極の主要部の決定のポイントである．

2 次形式の空間の場合，$\Theta_{n-1}(\widehat{\Phi}, g^\iota)$ と $\Theta_2(\Phi, g)$, $\Theta_2(\widehat{\Phi}, g^\iota)$ と $\Theta_{n-1}(\Phi, g)$ が打ち消しあってほぼ可積分になる．打ち消し合いが起きる本質的な理由は

直交座標での積分 = 定数 × 極座標での積分

ということが成り立っているからである．もう少しだけ説明すると，Eisenstein 級数の異なる極大方物部分群に対応する定数項の考察で定数倍の差ができるが，その差がたまたま上の積分の間の定数に一致して，ある種の解析的な問題を解決することができるのである．

# 参考文献


[1] F. Chamizo and H. Iwaniec. On the gauss mean-value formula for class number. *Nagoya Math. J.*, 151:199–208, 1998.

[2] B. Datskovsky. A mean value theorem for class numbers of quadratic extensions. *Contemporary Mathematics*, 143:179–242, 1993.

[3] B. Datskovsky and D.J. Wright. Density of discriminants of cubic extensions. *J. Reine Angew. Math.*, 386:116–138, 1988.

[4] H. Davenport and H. Heilbronn. On the density of discriminants of cubic fields. II. *Proc. Royal Soc.*, A322,:405–420, 1971.

[5] D. Goldfeld and J. Hoffstein. Eisenstein series of 1/2-integral weight and the mean value of real Dirichlet series. *Invent. Math.*, 80:185–208, 1985.

[6] N. Hayasaka and A. Yukie. On the density of unnormalized tamagawa numbers of orthogonal groups I. preprint.

[7] N. Hayasaka and A. Yukie. On the density of unnormalized tamagawa numbers of orthogonal groups II. preprint.

[8] T. Ibukiyama and H. Saito. On zeta functions associated to symmetric matrices. I. An explicit form of zeta functions. *Amer. J. Math.*, 117(5):1097–1155, 1995.

[9] A.C. Kable and A. Yukie. The mean value of the product of class numbers of paired quadratic fields. I. *Tohoku Math. J. (2)*, 54(4):513–565, 2002.

[10] R. Lipschutz. In *Sitzungsber.*, pages 174–185. Akad. Berlin, 1865.

[11] M. Sato and T. Kimura. A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants. *Nagoya Math. J.*, 65:1–155, 1977.

[12] T. Shintani. On zeta-functions associated with vector spaces of quadratic forms. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect IA*, 22:25–66, 1975.

[13] C.L. Siegel. The average measure of quadratic forms with given discriminant and signature. *Ann. of Math.*, 45:667–685, 1944.

[14] D.J. Wright and A. Yukie. Prehomogeneous vector spaces and field extensions. *Invent. Math.*, 110:283–314, 1992.

[15] A. Yukie. On the density of unnormalized tamagawa numbers of orthogonal groups III. preprint.

[16] A. Yukie. *Shintani zeta functions*, volume 183 of *London Math. Soc. Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.