枠付き頂点作用素代数の対称性と分類問題

東京大学大学院数理科学研究科
日本学術振興会特別研究員 PD
山内 博
yamauchi@ms.u-tokyo.ac.jp

2006 年 8 月 5 日

1 はじめに

今回の講演では枠付きと呼ばれるクラスに属する頂点作用素代数について、その基礎理論の概略と私達の最近の論文 [LaY] で得られた結果について話をさせて頂きました。このクラスにはモンスター単純群を全自己同型群に持つムーンシャイン頂点作用素代数をはじめ、特に対称性の高い様々な頂点作用素代数が属しており[1]、その構造を詳しく調べる事でそれらに秘められた対称性が解き明かされることが期待されています。本稿では講演内容に合わせつつ、なるべく基礎知識なしに読めるように心がけて書かせて頂きました。頂点作用素代数の専門家以外の方にもどのようなことを扱っているのか分かりやすくするために、序盤ではこれまでの代数学シンポジウムの報告集 [松尾, 山田] と内容が重なる部分が多くなってしまいましたが、ご容赦ください。

記号・記法　本稿では基礎体は全て複素数体 $\mathbb{C}$ で考えます。テンソル積 $\otimes$ は特に明記しない場合には $\mathbb{C}$ 上の線形空間のテンソル積 $\otimes_{\mathbb{C}}$ を表します。$p \in \mathbb{Z}$ に対して環 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ を $\mathbb{Z}_p$ で表します[2]。$\mathbb{Z}_2^n$ の加法的部分群を二元線形符号 (binary linear code)、または単に符号と呼びます[3]。$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_2^n$ に対しその台を $\mathrm{supp}(\alpha) := \{i \mid \alpha_i = 1\}$ と定めます。また、$\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_2^n$ として $\mathbb{Z}_2^n$ 上の標準的な内積を $\langle \alpha, \beta \rangle := \sum_i \alpha_i \beta_i \in \mathbb{Z}_2$ と定めます。符号 C に対してその双対を $C^\perp := \{\alpha \in \mathbb{Z}_2^n \mid \langle \alpha, C \rangle = 0\}$ と定め、$C^\perp = C$ となるとき C を**自己双対的** (self-dual) といいます。また任意の $\alpha \in C$ について $\mathrm{wt}(\alpha) := |\mathrm{supp}(\alpha)|$ が 4 の倍数であるとき、C を**重偶** (doubly even) といいます。線形空間 A に対し A を係

[1] 他の例としては散在型有限単純群の中ではモンスターに次いで大きな位数を持つベビーモンスター単純群を全自己同型群に持つベビーモンスター頂点作用素代数 (cf. [H, Y]) も枠付き頂点作用素代数になっています。

[2] p が素数の場合、他の文献では $\mathbb{Z}_p$ で p 進体を表すことがありますので、ご注意ください。

[3] 講演では binary code のことを二進符号と呼びましたが、二進と呼ぶと 2 進体上の符号と紛らわしい為、通常は二元符号と呼ばれるとの意見がありましたので、本稿では変更させて頂きました。

数とする形式的巾級数の空間を

$$\begin{aligned} A[\![z]\!] &:= \{\textstyle\sum_{n\geq 0} a_n z^n \mid a_n \in A\} \\ A[\![z,z^{-1}]\!] &:= \{\textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n \mid a_n \in A\} \\ A(\!(z)\!) &:= \{\textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n \mid a_n \in A, \quad a_n = 0 \quad \text{for} \quad n \ll 0\} \end{aligned}$$

と定めます。$n \in \mathbb{Z}$ について、形式的な二項展開を

$$(z+w)^n := \sum_{i\geq 0} \binom{n}{i} z^{n-i} w^i \in \mathbb{C}[\![z,z^{-1}]\!][\![w]\!]$$

と定めます。$n<0$ のとき $(z+w)^n \neq (w+z)^n$ となることに注意してください。$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n \in A[\![z,z^{-1}]\!]$ に対し、その形式的留数を $\mathrm{Res}_z f(z) := a_{-1}$, 即ち z^{-1} の係数として定めます。

2 頂点作用素超代数

ここでは頂点作用素代数 (Vertex Operator Algebra, 略して VOA) を少しだけ一般化した、頂点作用素超代数の定義を与えます。より詳しい解説は [FLM, K, MN, 松尾, 山田] を参考にしてください。

定義 1. **頂点作用素超代数**とは 4 つ組 $(V, Y(\cdot,z), \mathbb{1}, \omega)$ からなるデータであって、以下の条件を満たすものです。

(1) $V = V^0 \oplus V^1$ は $\mathbb{Z}_2$-次数の付いた $\mathbb{C}$-上の線形空間であり、各 $\mathbb{Z}_2$-斉次空間は $V^i = \oplus_{n\geq 0} V_{n+i/2}$ $(i=0,1)$ と次数付けられていて、その各斉次空間 $V_{n+i/2}$ は有限次元である。

(2) **頂点作用素** $Y(\cdot,z)$ は V から $\mathrm{End}(V)[\![z,z^{-1}]\!]$ への線形写像であって、$a \in V$ について

$$Y(a,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{(n)} z^{-n-1} \quad (a_{(n)} \in \mathrm{End}(V)) \tag{2.1}$$

と展開したとき、任意の $b \in V$ について $a_{(n)}b = 0$ が十分大きな n について成り立つ。即ち、$Y(\cdot,z) : V \otimes V \to V(\!(z)\!)$; $a \otimes b \mapsto Y(a,z)b = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{(n)} b z^{-n-1}$ となっている。また、$\mathbb{Z}_2$-斉次な $a \in V^i$, $b \in V^j$ $(i,j \in \mathbb{Z}_2)$ について、$Y(a,z)b \in V^{ij}(\!(z)\!)$ が成り立っている。

(3) $\mathbb{Z}_2$-斉次な $a \in V^i$, $b \in V^j$ に対して、ある (正の) 整数 $N \in \mathbb{Z}$ が存在して、V 上で**局所可換性** (locality)

$$(z_1 - z_2)^N Y(a,z_1) Y(b,z_2) = (-1)^{ij} (-z_2 + z_1)^N Y(b,z_2) Y(a,z_1) \tag{2.2}$$

が成り立つ。

(4) **真空元** $\mathbb{1} \in V_0$ が存在し、$Y(\mathbb{1}, z) = \mathrm{id}_V$ 及び任意の $a \in V$ について

$$Y(a,z)\mathbb{1} \in a + V[\![z]\!]z$$

が成り立つ。

(5) **共形ベクトル** $\omega \in V_2$ が存在し、$Y(\omega, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L(n) z^{-n-2}$ と展開したとき、次のヴィラソロ交換関係式

$$[L(m), L(n)] = (m-n)L(m+n) + \delta_{m+n,0}\frac{m^3-m}{12}c \quad (c \in \mathbb{C}) \tag{2.3}$$

が成り立つ。ここで定数 c は V の**中心電荷**と呼ばれる。

(6) 共形ベクトル ω の頂点作用素の展開係数において、$L(0)$ は V_n 上 n 倍で作用し、また任意の $a \in V$ について $Y(L(-1)a, z) = [L(-1), Y(a,z)] = \partial_z Y(a,z)$ が成り立つ。ここで ∂_z は z に関する形式的微分 $\partial_z : z^n \mapsto nz^{n-1}$ $(n \in \mathbb{Z})$ を表す。

以上が頂点作用素超代数の定義です。V の $\mathbb{Z}_2$-斉次な部分空間 V^0, V^1 はそれぞれ偶部分、奇部分と呼ばれ、偶部分 V^0 はそれ自身頂点作用素による演算で閉じており、部分代数をなします。$V^1 = 0$ となる頂点作用素超代数は頂点作用素代数と呼ばれます。特に、偶部分 V^0 だけを考えると、$(V^0, Y(\cdot, z), \mathbb{1}, \omega)$ は頂点作用素代数をなします。通常、頂点作用素超代数 $(V, Y(\cdot,z), \mathbb{1}, \omega)$ は省略して単に V と書かれます。この定義から直ちに頂点作用素超代数の例を挙げよ、と言われたら非専門家には難しいと思われます。そこで少し、頂点作用素超代数とはどのような代数なのか解説したいと思います。まず頂点作用素超代数の定義から頂点作用素に関する次の性質を導くことができます。

命題 1. V を頂点作用素超代数、$a \in V^i$, $b \in V^j$ $(i, j \in \mathbb{Z}_2)$ とするとき、次が成り立つ。

(1) $Y(\cdot, z) : V \ni a \mapsto Y(a,z) \in \mathrm{End}(V)[\![z, z^{-1}]\!]$ は単射である。

(2) $Y(a,z)b = (-1)^{ij} e^{zL(-1)} Y(b, -z)a.$

(3) $Y(a_{(n)}b, z) = \mathrm{Res}_x\{(x-z)^n Y(a,x)Y(b,z) - (-1)^{ij}(-z+x)^n Y(b,z)Y(a,x)\}.$

(1) より頂点作用素超代数のイデアルには右左の区別がなく、全て両側イデアルになるになることが分かります。(3) より、$Y(a,z)$ と $Y(b,z)$ が定まっていれば、$Y(a_{(n)}b, z)$ は自動的に定まることが分かります。一般に、$\mathbb{Z}_2$-次数付き線形空間 $M = M^0 \oplus M^1$ 上の線形変換を係数とする形式的巾級数 $a(z) \in \mathrm{End}(M)[\![z, z^{-1}]\!]$ が、任意の $v \in M$ について $a(z)v \in M(\!(z)\!)$ となるとき、M 上の**場** (field) と呼ばれます。$\mathrm{End}(M)^0 := \mathrm{End}(M^0) \oplus \mathrm{End}(M^1)$, $\mathrm{End}(M)^1 := \mathrm{Hom}(M^0, M^1) \oplus \mathrm{Hom}(M^1, M^0)$ とおくと $\mathrm{End}(M) = \mathrm{End}(M)^0 \oplus \mathrm{End}(M)^1$ と $\mathrm{End}(M)$ にも $\mathbb{Z}_2$-次数が入ります。M 上の場 $a(z)$ はその係数がこの $\mathbb{Z}_2$-次数につ

いて同斉次であるとき、$\mathbb{Z}_2$-斉次な場といいます。M 上の $\mathbb{Z}_2$-斉次な二つの場 $a(z) \in \mathrm{End}(M)^i[\![z, z^{-1}]\!]$, $b(z) \in \mathrm{End}(M)^j[\![z, z^{-1}]\!]$ $(i, j \in \mathbb{Z}_2)$ はある整数 $N \in \mathbb{Z}$ が存在して、

$$(z_1 - z_2)^N a(z_1)b(z_2) = (-1)^{ij}(-z_2 + z_1)^N b(z_2)a(z_1)$$

となるとき、互いに局所可換であるといいます。$n \in \mathbb{Z}$ として、$a(z)$ と $b(z)$ の n-**正規積**

$$a(z)_{(n)}b(z) := \mathrm{Res}_x\{(x - z)^n a(x)b(z) - (-1)^{ij}(-z + x)^n b(z)a(x)\}$$

はまた M 上の $\mathbb{Z}_2$-斉次な場になることが確認できます。重要な事実として、次の補題が成り立ちます。

補題 2. (Dong の補題) $a(z), b(z), c(z)$ を互いに局所可換な M 上の場とするとき、任意の $n \in \mathbb{Z}$ について $a(z)_{(n)}b(z)$ も $c(z)$ と局所可換である。

以上の事実を踏まえて、頂点作用素超代数の構成について簡単に説明しましょう。まず、定義 (5) の条件より、頂点作用素超代数にはヴィラソロ代数が含まれていなければなりません。ここで**ヴィラソロ代数**とは、$\mathrm{Vir} = \oplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathbb{C}L(n) \oplus \mathbb{C}c$ であって、関係式 (2.3) 及び $[\mathrm{Vir}, c] = 0$ により定まる無限次元リー代数です[4]。関係式 (2.3) より、次の局所可換性が直接確認できます:

$$(z_1 - z_2)^4 Y(\omega, z_1)Y(\omega, z_2) = (z_1 - z_2)^4 Y(\omega, z_2)Y(\omega, z_1).$$

関係式 (2.2) より、頂点作用素超代数 V の元 a の頂点作用素 $Y(a, z)$ は $Y(\omega, z)$ と局所可換でなければなりません。そこで、M として Vir-加群であって、中心 c がスカラー倍で作用しており、$\omega(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} L(n)z^{-n-2}$ が M 上の場、即ち任意の $v \in M$ について、$L(n)v = 0$ $(n \gg 0)$ となっているものを考えます。そして、$\omega(z)$ と局所可換な M 上の $\mathbb{Z}_2$-斉次な場 $a(z)$ であって、$[L(-1), a(z)] = \partial_z a(z)$ を満たすものを考えます。これらのうち、どの二つの場もまた互いに局所可換であるものを集めてきます。M 上の恒等写像 id_M はどの場とも互いに局所なので、これも含めておきます。Dong の補題により、互いに局所可換な場の正規積で得られる場はまた局所可換になりますので、上で集めた場から正規積で生成される場の空間を V とおけば、これが場の空間としての頂点作用素超代数となります。この考えでは $\mathrm{End}(M)[\![z, z^{-1}]\!]$ の部分空間として頂点作用素超代数を構成していますが、命題 1 (1) にあるように、どのような頂点作用素超代数もある場の空間とみなすことができます。まとめると、頂点作用素超代数とは、ヴィラソロ代数の定める場 $\omega(z)$ と局所可換性な場を集め、それらの正規積で張られた場のなす代数と言えます。

この場を使った考えを使うと、頂点作用素代数の加群も自然に定義することができます。

[4] この記述は正確ではありません。正しくは Vir の基底の元である c は定数ではなく、中心の元として定めます。しかし、これから考える Vir-加群上では全て中心はスカラーで作用するので、ここではこの説明で済ますことにします。

定義 2. V を頂点作用素代数としたとき、線形空間 M が V-加群であるとは、各 $a \in V$ について M 上の互いに局所可換な場 $Y_M(a,z) \in \mathrm{End}(M)[\![z,z^{-1}]\!]$ が定まっており、$Y_M(\mathbb{1},z) = \mathrm{id}_M$ 及び次の準同型条件

$$Y_M(a_{(n)}b,z) = Y_M(a,z)_{(n)}Y_M(b,z)$$

が任意の $a,b \in V$ について成り立つことである。

つまり、頂点作用素代数の表現とは、与えれた頂点作用素代数からある線形空間上の場がなす頂点作用素代数への頂点作用素代数としての準同型として定められます。

具体例：中心電荷 1/2 のヴィラソロ頂点作用素超代数　これから扱う頂点作用素代数の材料とも言える、中心電荷 1/2 の単純ヴィラソロ頂点作用素代数 $L(1/2,0)$ の具体的な構成を与えます[5]。$\mathcal{A}$ を生成元 $\{\psi_{n+1/2} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ 及び関係式 $\psi_r\psi_s + \psi_s\psi_r = \delta_{r+s,0}$ で定まる $\mathbb{C}$ 上のクリフォード代数とします。$\mathcal{A}$ において $\{\psi_{n+1/2} \mid n \geq 0\}$ で生成される部分代数を $\mathcal{A}^+$ とし、$\mathbb{C}\mathbb{1}$ を自明な $\mathcal{A}^+$-加群とします。誘導加群

$$M := \mathcal{A} \underset{\mathcal{A}^+}{\otimes} \mathbb{C}\mathbb{1}$$

を考えます。M には自然な基底 $\{\psi_{-r_1}\psi_{-r_2}\cdots\psi_{-r_k}\mathbb{1} \mid r_1 > r_2 > \cdots > r_k > 0,\ k \geq 0\}$ が取れます。$\psi(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi_{n+1/2}z^{-n-1}$ とおくとこれは M 上の場になっており、次の局所可換性を満たします:

$$(z_1 - z_2)\psi(z_1)\psi(z_2) = (z_2 - z_1)\psi(z_2)\psi(z_1).$$

また、

$$\omega(z) := \frac{1}{2}\psi(z)_{(-2)}\psi(z) = \mathrm{Res}_x\{(x-z)^{-2}\psi(x)\psi(z) + (-z+x)^{-2}\psi(z)\psi(x)\}$$

とおき、その展開係数を $\omega(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L(n)z^{-n-2}$ とおくと、次のヴィラソロ交換関係式が M 上で成り立ちます。

$$[L(m),L(n)] = (m-n)L(m+n) + \delta_{m+n,0}\frac{m^3-m}{24}.$$

これから、M は中心電荷 1/2 の Vir-加群となることが分かります。明らかに

$$M^i := \mathrm{Span}\{\psi_{-r_1}\ldots\psi_{-r_k}\mathbb{1} \mid r_1 + \cdots + r_k \in \mathbb{Z} + i/2\}, \quad i = 0,1$$

[5] ここでは $L(1/2,0)$ 及びその既約加群の一つである $L(1/2,1/2)$ の構成法のみを紹介しますが、同様の方法で残る一つの既約加群 $L(1/2,1/16)$ も具体的に構成することができます。さらには、$L(1/2,0)$-加群間の交絡作用素も全て具体的に構成することができます。これらは良く知られた事実ですが、詳細について興味がある方は例えば [Y] を参考にしてみてください。

は Vir-部分加群になっており、$M = M^0 \oplus M^1$ と自然な $\mathbb{Z}_2$-次数分解が得られます。先ほど定めた場 $\psi(z)$ はこの $\mathbb{Z}_2$-次数に関する奇斉次な場になっています。そこで $\psi(z)$ 及び恒等場 $\mathbb{1}(z) = \mathrm{id}_M$ を用いて $\mathrm{End}(M)[\![z, z^{-1}]\!]$ において正規積により頂点作用素超代数を生成させることができます。これを $\mathfrak{A}$ と書くことにしましょう。M 上に頂点作用素 $Y(\cdot, z) : M \to \mathrm{End}(M)[\![z, z^{-1}]\!]$ を $Y(\mathbb{1}, z) = \mathbb{1}(z)$, $Y(\psi_{-1/2}\mathbb{1}, z) = \psi(z)$ とし、これを正規積を用いて帰納的に

$$Y(\psi_{-r_1}\psi_{-r_2}\cdots\psi_{-r_k}\mathbb{1}, z) := \psi(z)_{(-r_1-1/2)}Y(\psi_{-r_2}\cdots\psi_{-r_k}\mathbb{1}, z)$$

と定め、M 全体に線形に拡張すると、$\omega(z) = Y(\frac{1}{2}\psi_{-3/2}\psi_{-1/2}\mathbb{1}, z)$ であり、Goddard の一意性定理 (cf. [K]) より構造 $(M, Y(\cdot, z), \mathbb{1}, \frac{1}{2}\psi_{-3/2}\psi_{-1/2}\mathbb{1})$ は $\mathfrak{A}$ と同型な頂点作用素超代数構造になることが知られています。実は M^i, $i = 0, 1$, は互いに非同型な既約 Vir-加群になっていることが知られており (cf. [KR])、それゆえ上で構成した頂点作用素超代数は単純になります。ヴィラソロ代数の表現論において $M^0 = L(1/2, 0)$, $M^1 = L(1/2, 1/2)$ と書かれるため、頂点作用素代数としても $M = L(1/2, 0) \oplus L(1/2, 1/2)$ と書くことにします。こうして構成した頂点作用素超代数 M の偶部分である $L(1/2, 0)$ を中心電荷 1/2 の単純ヴィラソロ頂点作用素代数といいます。

3 頂点作用素代数の自己同型

これから扱うのは全て頂点作用素代数であって、単純なものに限ることにします。ここで頂点作用素代数が単純とは、通常通り非自明なイデアルを持たないという意味です。

定義 3. 頂点作用素代数 $(V, Y(\cdot, z), \mathbb{1}, \omega)$ の線形変換 f が 任意の $a, b \in V$ について $fY(a, z)b = Y(fa, z)fb$ を満たし、さらに $f\mathbb{1} = \mathbb{1}$, $f\omega = \omega$ となるとき[6]、f を V の自己同型という。V の自己同型のなす群を $\mathrm{Aut}(V)$ で表す。

頂点作用素代数の構造とその自己同型群には密接な関係があることが知られています。V を単純な頂点作用素代数、G を $\mathrm{Aut}(V)$ の有限部分群として、V^G で V の G-不変元達のなす部分代数とします。自己同型の定義から真空元 $\mathbb{1}$ 及び共形ベクトル ω は V^G に含まれているため、$(V^G, Y(\cdot, z), \mathbb{1}, \omega)$ もまた頂点作用素代数をなします。$\mathrm{Irr}(G)$ を G の既約指標全体の集合とし、$\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ について M_χ で χ を指標とする既約 G-加群を表すことにすると、V を $\mathbb{C}[G]$-加群と見て次のように分解することができます:

$$V = \bigoplus_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} M_\chi \otimes \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(M_\chi, V).$$

[6]実は $f\mathbf{1} = \mathbf{1}$ は省くことができます。

ここで $V_\chi := \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(M_\chi, V)$ とおくと、V 上 $\mathbb{C}[G]$ と V^G の作用は可換であることから、V_χ は自然に V^G-加群になります。このとき次の Schur-Weyl 型の双対性が成り立つことが知られています。

定理 3. ([DM, DLM]) V を $\mathbb{C}[G]\otimes V^G$-加群と見た分解 $V = \oplus_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} M_\chi \otimes V_\chi$ において

(1) 全ての $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ について $V_\chi \neq 0$.

(2) V_χ は既約 V^G-加群である。特に V^G は単純である。

(3) $V_\chi \simeq V_\mu \iff \chi = \mu$.

この結果を最も単純なケースである有限巡回群 $G = \langle g \rangle$ の場合に適用してみましょう。$|g|$ を G の位数として、$0 \le i \le |g|-1$ に対して

$$V^i := \{a \in V \mid ga = \zeta^i a\}, \quad \zeta = e^{2\pi\sqrt{-1}/|g|}$$

とおきます。このとき $V^0 = V^G$ は V の単純な部分代数であり、定理 3 より V^i は互いに非同型な既約 V^G-加群となります。そして、V^G-加群として V は

$$V = V^0 \oplus V^1 \oplus \cdots \oplus V^{|g|-1}$$

と分解します。この考察から、頂点作用素代数の有限位数の自己同型はある単純な部分代数による既約分解を作り、各既約加群上に 1 の巾根を割り当てることで得られることが分かります。では、どのような部分代数をとれば自己同型が定義できるのでしょうか。そのような部分代数を定めるのに前節で構成したヴィラソロ頂点作用素代数 $L(1/2, 0)$ を使うことができます。

宮本の自己同型　頂点作用素代数 V に $L(1/2, 0)$ が部分代数として含まれている場合を考えます。$L(1/2, 0)$ はヴィラソロ頂点作用素代数と名づけられているように、その共形ベクトルによって生成されています。$L(1/2, 0)$ の共形ベクトルを e とすると、e は $L(1/2, 0)$ 上定義 1 (5)(6) にある ω の性質を満たしますが、V 上では (6) を満たすとは限りません。定義 1 の (5) だけを満たす V の元を**ヴィラソロ元**といいます。V の共形ベクトルはもちろんヴィラソロ元になります。ヴィラソロ元は全てヴィラソロ頂点作用素代数を部分代数として生成しますが、特に $L(1/2, 0)$ を生成するヴィラソロ元を**イジング元**と呼ぶことにし、イジング元 e が生成する部分代数 $L(1/2, 0)$ を表す場合には e を明記するため $\mathrm{Vir}(e)$ と書くことにします。

e を V のイジング元としましょう。定義 2 より V 自身は $\mathrm{Vir}(e) \simeq L(1/2, 0)$-加群になります。頂点作用素代数としての $L(1/2, 0)$ の既約加群は $L(1/2, 0)$, $L(1/2, 1/2)$, $L(1/2, 1/16)$ の 3 つに限り、また任意の $L(1/2, 0)$-加群は完全可約であることが知られています (cf. [DMZ])。

そこで、$L(1/2,0)$ による V の既約分解を考えます。$V_e(h)$ で V の既約 $\mathrm{Vir}(e) \simeq L(1/2,0)$-部分加群であって、$L(1/2,h)$ と同型なもの全ての和を表すものとすると、次の等型成分分解を得ます。

$$V = V_e(0) \oplus V_e(1/2) \oplus V_e(1/16). \tag{3.1}$$

このとき $V_e(0)$ は V の部分代数をなし、分解 (3.1) から V の自己同型を構成することができます。

定理 4. ([Mi1]) e を V のイジング元とし、$\mathrm{Vir}(e)$ による V の既約分解 (3.1) を考える。
(1) 分解 (3.1) において、$V_e(0) \oplus V_e(1/2)$ 上恒等的、$V_e(1/16)$ 上 -1 倍とする線形変換 τ_e は V の自己同型を定める。
(2) 固定点部分代数 $V^{\langle \tau_e \rangle} = V_e(0) \oplus V_e(1/2)$ において、$V_e(0)$ 上恒等的、$V_e(1/2)$ 上 -1 倍とする線形変換 σ_e は $V^{\langle \tau_e \rangle}$ の自己同型を定める。

この定理から、イジング元があれば (自明になることもありますが) 頂点作用素代数の自己同型を構成することができます。イジング元 $e \in V$ から構成される自己同型 $\tau_e \in \mathrm{Aut}(V)$ 及び $\sigma_e \in \mathrm{Aut}(V^{\langle \tau_e \rangle})$ を**宮本の自己同型**といいます。

4　枠付き頂点作用素代数

前節で頂点作用素代数にイジング元がある場合、その表現論を用いることで自己同型が定義できることを見ました。イジング元はヴィラソロ元ではありますが、共形ベクトルと違って頂点作用素代数全体の構造を統制するものではありません。そこでいくつかのイジング元によって全体の構造が統制されている頂点作用素代数のクラスとして枠付き頂点作用素代数 (framed VOA) の概念を定義します。

定義 4. 単純な頂点作用素代数 $(V, Y(\cdot,z), \mathbb{1}, \omega)$ において、イジング元の集合 $\{e^i \in V \mid 1 \le i \le n\}$ が存在して、$\omega = e^1 + \cdots + e^n$ かつ $i \ne j$ のとき $[Y(e^i,z_1), Y(e^j,z_2)] = 0$ となってとき、V を**枠付き頂点作用素代数**という。

上の定義にある共形ベクトルのイジング元の和への分解 $\omega = e^1 + \cdots + e^n$ を**イジング枠**といいます。枠付き頂点作用素代数において、イジング枠は一般に一意的ではありませんが、兎に角イジング枠が一つでも存在する場合に枠付きと呼びます[7]。

枠付き頂点作用素代数の例　L を偶格子であって 4-枠を持つもの、即ち $x^i \in L$, $1 \le i \le \mathrm{rank}(L)$ で $\langle x^i, x^j \rangle = 4\delta_{i,j}$ となる元が存在するとします。このとき L に付随する格子頂点作用素代数 V_L にはイジング枠が存在し、枠付き頂点作用素代数となります [DMZ]。特

[7] 補題 5 より、枠を成すイジング元の個数 n は一定であり、V の中心電荷の 2 倍の値となります。

に E_8 格子やリーチ格子を含むニーマイヤー格子に付随する頂点作用素代数は全て枠付きです。また、最も重要かつ興味を惹く例として、モンスター単純群をその自己同型群に持つムーンシャイン頂点作用素代数 $V^\natural$ [FLM, DMZ] が挙げられます。

このように枠付き頂点作用素代数には高い対称性を持った例がたくさんあり、その構造に興味が沸きます。枠付き頂点作用素代数の構造を述べる前に、いくつかの一般的な事実を述べます。

補題 5. $(V^i, Y^i(\cdot, z), \mathbb{1}^i, \omega^i)$ $(i = 1, 2)$ を頂点作用素代数とするとき、($\mathbb{C}$ 上の) テンソル積 $(V^1 \otimes V^2, Y^1(\cdot, z) \otimes Y^2(\cdot, z), \mathbb{1}^1 \otimes \mathbb{1}^2, \omega^1 \otimes \mathbb{1}^2 + \mathbb{1}^1 \otimes \omega^2)$ もまた頂点作用素代数をなす[8]。また、$V^1 \otimes V^2$ が単純であることと、V^1 及び V^2 両方が単純であることは同値である。

命題 6. V^1, V^2 を頂点作用素代数とする。
(1) M^i $(i = 1, 2)$ を V^i-加群とするとき、$M^1 \otimes M^2$ は $V^1 \otimes V^2$-加群となる。
(2) 任意の既約 $V^1 \otimes V^2$-加群は既約な V^i-加群 M^i のテンソル積 $M^1 \otimes M^2$ となっている。
(3) 全ての V^i-加群が完全加約ならば、任意の $V^1 \otimes V^2$-加群も完全加約である。

V を枠付き頂点作用素代数、$\omega = e^1 + \cdots + e^n$ を V のイジング枠とします。イジング元の定義から、各 e^i が生成する部分代数 $\mathrm{Vir}(e^i)$ は $L(1/2, 0)$ と同型です。また、 $\mathrm{Vir}(e^i)$ らは互いに可換な部分代数になっており、それゆえ $e^1, \ldots, e^n$ で生成される部分代数を F とおくと、F は $\mathrm{Vir}(e^i)$ らのテンソル積と同型になります。

$$F = \mathrm{Vir}(e^1) \otimes \cdots \otimes \mathrm{Vir}(e^n) \simeq L(1/2, 0)^{\otimes n}.$$

イジング元の集合 $\{e^i \mid 1 \leq i \leq n\}$ を与えることと上記の部分代数 F を与えることは同値なので、部分代数 F のことも用語の乱用でイジング枠と呼びます。補題 5 より F は単純な部分代数であり、命題 6 より V は F-加群として完全加約です。さらに既約 $F \simeq L(1/2, 0)^{\otimes n}$-加群は

$$L(1/2, h_1) \otimes \cdots \otimes L(1/2, h_n), \quad h_i \in \{0, 1/2, 1/16\} \tag{4.1}$$

で与えられます。よって、V は F-加群として次のような分解を持ちます:

$$V = \bigoplus_{h_i \in \{0, 1/2, 1/16\}} m_{h_1, \ldots, h_n} L(1/2, h_1) \otimes \cdots \otimes L(1/2, h_n). \tag{4.2}$$

上の分解において整数 $m_{h_1, \ldots, h_n}$ は重複度を表します。この分解は多くの情報を含んでいますが、頂点作用素代数の構造を直接見るためには複雑すぎます。そこで自己同型の作用に基づいてこの分解を整えます。定理 4 より各イジング元 e^i は自己同型 τ_{e^i} を定め、これらは上の分解を保ちます。頂点作用素代数に有限群が作用する場合、定理 3 にある分

[8] V^i の中心電荷を c^i とすると、$V^1 \otimes V^2$ の中心電荷は $c^1 + c^2$ となります。

解を構成することができます。各既約 F-加群 X に対し、その 1/16-語 $\tau(X)$ を次のように定義します:

$$\tau(L(1/2,h_1)\otimes\cdots\otimes L(1/2,h_n)) := (16h_1,\ldots,16h_n)\in\mathbb{Z}_2^n. \tag{4.3}$$

即ち、1/16 がある位置に 1 を、他の位置には 0 を配置して作られる二元符号語と定めます。そして二元符号語 $\alpha\in\mathbb{Z}_2^n$ に対して

$$V^\alpha := \sum_{\tau(X)=\alpha} X, \qquad X\subset V \ \text{：既約 } F\text{-部分加群} \tag{4.4}$$

とし、$D:=\{\alpha\in\mathbb{Z}_2^n \mid V^\alpha\neq 0\}$ と定義します。このとき分解 (4.2) は次のようにまとめられます。

$$V=\bigoplus_{\alpha\in D} V^\alpha \tag{4.5}$$

分解 (4.5) を V の F に関する**1/16-語分解**と呼びます。各イジング元 e^i に対しその宮本対合 $\tau_{e^i}\in\mathrm{Aut}(V)$ を対応させることで群準同型

$$\tau:\mathbb{Z}_2^n\ni\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_n)\longmapsto\tau_\beta:=\prod_{i\in\mathrm{supp}(\beta)}\tau_{e^i}=\tau_{e^1}^{\beta_1}\cdots\tau_{e^n}^{\beta_n}\in\mathrm{Aut}(V) \tag{4.6}$$

を作ることができます。定義から容易に分かるように、V^α 上 τ_β はスカラー倍 $(-1)^{\langle\alpha,\beta\rangle}$ で働き、$\ker\tau=D^\perp:=\{\beta\in\mathbb{Z}_2^n\mid\langle\beta,D\rangle=0\}$ となります。それゆえ、分解 (4.5) は群 $\tau(\mathbb{Z}_2^n)\subset\mathrm{Aut}(V)$ に関して定理 3 にある分解を与えており、$G=\tau(\mathbb{Z}_2^n)$ として固定部分代数 $V^G=V^0$ は単純部分代数、そして各 V^α は既約 V^0-部分加群になっていることが分かります。また、$a\in V^\alpha$, $b\in V^\beta$ とするとき、$Y(a,z)b\in V^{\alpha+\beta}((z))$ であり、それゆえ分解 (4.5) により V は D で次数付けられた代数構造を持つことも分かります。そのため、V を F の拡大とみた (4.2) より、V を V^0 の拡大とみた (4.5) の方が扱い易くなります。

では、部分代数 V^0 はどのような構造を持っているのでしょうか。1/16-語分解の定義から V^0 は F-加群として次のような分解を持ちます。

$$V^0=\bigoplus_{h_i\in\{0,1/2\}} m_{h_1,\ldots,h_n}L(1/2,h_1)\otimes\cdots\otimes L(1/2,h_n). \tag{4.7}$$

定理 4 より V^0 上には σ-型の自己同型 σ_{e^i} が定義可能であり、対応

$$\sigma:\mathbb{Z}_2^n\ni\delta=(\delta_1,\ldots,\delta_n)\longmapsto\sigma_\delta:=\prod_{i\in\mathrm{supp}(\delta)}\sigma_{e^i}=\sigma_{e^1}^{\delta_1}\cdots\sigma_{e^n}^{\delta_n}\in\mathrm{Aut}(V^0) \tag{4.8}$$

により群準同型 σ を構成できます。$H=\sigma(\mathbb{Z}_2^n)$ とおくと、V^0 は単純なので定理 3 より固定点部分代数 $(V^0)^H$ も単純になります。それゆえ、$(V^0)^H=L(1/2,0)^{\otimes n}=F$, 即ち $m_{0,\ldots,0}=1$ となります。ここで

$$C:=\{\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_n)\in\mathbb{Z}_2^n\mid m_{\beta_1/2,\ldots,\beta_n/2}\neq 0\}\subset\mathbb{Z}_2^n \tag{4.9}$$

とおくと、分解 (4.7) は次のようになります。

$$V^0 = \bigoplus_{\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_n)\in C} m_{\beta_1/2,\ldots,\beta_n/2} L(1/2, \beta_1/2) \otimes \cdots \otimes L(1/2, \beta_n/2). \tag{4.10}$$

各等型成分 $m_{\beta_1/2,\ldots,\beta_n/2} L(1/2, \beta_1/2) \otimes \cdots \otimes L(1/2, \beta_n/2)$ 上 σ_δ はスカラー倍 $(-1)^{\langle\beta,\delta\rangle}$ で働くため、分解 (4.10) は自己同型 $H = \sigma(\mathbb{Z}_2^n)$ の作用に関して定理 3 にある分解を与えていることが分かります。それゆえ、$m_{\beta_1/2,\ldots,\beta_n/2} L(1/2, \beta_1/2) \otimes \cdots \otimes L(1/2, \beta_n/2)$ は既約 $(V^0)^H = F$-加群となり、$\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in C$ について $m_{\beta_1/2,\ldots,\beta_n/2} = 1$ となることが分かります (cf. [DMZ])。また、$\sigma(\mathbb{Z}_2^n)$ の作用から分解 (4.10) は V^0 に F の拡大として C で次数付けられた代数構造を持つことも分かります。ここまでをまとめると、単純な頂点作用素代数 V にイジング枠 $F = \mathrm{Vir}(e^1) \otimes \cdots \otimes \mathrm{Vir}(e^n)$ が与えられたとき、V の F-加群としての分解を考えることで拡大の系列 $F \subset V^0 \subset V$ と二つの二元符号 C, D による分解

$$V = \bigoplus_{\alpha\in D} V^\alpha, \quad V^0 = \bigoplus_{\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_n)\in C} L(1/2, \beta_1/2) \otimes \cdots \otimes L(1/2, \beta_n/2) \tag{4.11}$$

が得られることが分かりました。この二元符号の組 (C, D) を V の F に関する**構造符号**と呼びます。構造符号については次の性質が成り立つことが知られています。

命題 7. ([DGH, Mi2]) (C, D) を枠付き頂点作用素代数の構造符合とする。
(1) C 及び D は線形偶符号である。
(2) 任意の $\alpha \in D$ について、$\mathrm{wt}(\alpha)$ は 8 の倍数である。
(3) C と D は互いに直交する。

次節で見るように、構造符号は強い双対性が成り立ち、 V の構造及び表現を大きく規定します。

5　構造符号の双対性

　枠付き頂点作用素代数には (4.10) で与えられる形をした部分代数が含まれており、この部分代数は二元符号 C で次数付けられていました。より強く、符号 C は (4.10) の形をした頂点作用素代数の構造を完全に決めることが知られています。

定理 8. ([Mi2]) 任意の偶線形符号 $C \subset \mathbb{Z}_2^n$ に対し、$L(1/2, 0)^{\otimes n}$-加群

$$V_C = \bigoplus_{\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_n)\in C} L(1/2, \beta_1/2) \otimes \cdots \otimes L(1/2, \beta_n/2)$$

には $L(1/2, 0)^{\otimes n}$ の拡大として単純な頂点作用素代数が同型を除いて一意に存在する。

この定理から、V_C は符号 C のみで決まるので、C に付随した**符号頂点作用素代数**と呼ばれます。符合頂点作用素代数の表現論は [Mi2] で議論されており、C の中心拡大を用いることでその表現が全て分類されています。

定理 9. ([Mi2]) 偶線形符号 $C \subset \mathbb{Z}_2^n$ に付随する頂点作用素代数 V_C について、
(1) V_C の表現は加法群 C の $\mathbb{C}^*$ による中心拡大を用いて記述される。
(2) 任意の V_C-加群は完全加約である。
(3) 任意の既約 $L(1/2,0)^{\otimes n}$-加群 W について、W を $L(1/2,0)^{\otimes n}$-部分加群として含む既約 V_C-加群が存在する。また、既約 V_C-加群の同型類の数は有限個である。

定理にあるように符号頂点作用素代数 V_C の表現論には C の中心拡大の表現が現れ、有限次元半単純結合代数の表現論に帰着させることができます[9]。このように話がうまく行く最大の理由は V_C はイジング枠 $L(1/2,0)^{\otimes n}$ の単純カレント拡大と呼ばれる非常に良い拡大をなしている点にあります[10]。枠付き頂点作用素代数は符号頂点作用素代数の拡大となっており、その構造を調べるのに符合頂点作用素代数の表現論が強力な役割を果たしてくれます。定理にある符合頂点作用素代数の表現論をフル活用することで、次の双対性が構造符号の間に成り立つことが証明できます。

定理 10. ([LaY]) (C,D) を枠付き頂点作用素代数の構造符号とするとき、任意の $\alpha \in D$ について、$C_\alpha := \{\beta \in C \mid \mathrm{supp}(\beta) \subset \mathrm{supp}(\alpha)\}$ には $\mathrm{supp}(\alpha)$ を台とする重偶自己双対的符号が含まれている。

定理 10 は構造符号に非常に強い制限を与え、特に構造符号について包含関係 $D \subset C \subset D^\perp$ が成り立つことも分かります。定理にある双対性は符合頂点作用素代数の表現を考える場合には非常に良い条件であり、この条件から任意の枠付き頂点作用素代数はその符号頂点作用素部分代数の単純カレント拡大になっていることが証明できます。

定理 11. ([LaY]) V を枠付き頂点作用素代数、F をそのイジング枠とし、(C,D) を V の F に関する構造符号とする。拡大の列 $F \subset V_C \subset V$ において V/V_C は V_C の D-次数付き単純カレント拡大をなす。

この定理より任意の枠付き頂点作用素代数はイジング枠に高々2回の単純カレント拡大を施すことで得られることが分かります。単純カレント拡大の理論は良く整備されており、一旦単純カレント拡大であることが分かると色々なことが直ちに証明できるようになります [Y][11]。

[9] C の中心拡大が現れる理由は頂点作用素代数の場合と異なり、頂点作用素超代数 $L(1/2,0) \oplus L(1/2,1/2)$ のテンソル積はそのままでは頂点作用素超代数にはならず、適切な余輪体による補正が必要になる点にあります。この補正のため、表現の上にも余輪体による捻りが入り、C の中心拡大を考える必要が出てきます。

[10] 単純カレント拡大の定義及びその基礎理論については [Y] を参照してください。

[11] 例えば、任意の単純カレント拡大の表現論はある有限次元半単純結合代数の表現でコントロールされることが一般に証明できます。

系 12. ([LaY]) 同じ中心電荷を持つ枠付き頂点作用素代数の同型類は有限個である。

系 13. $C, D \subset \mathbb{Z}_2^n$ として (C, D) をある枠付き頂点作用素代数の構造符号とするとき、同じ構造符号を持つ枠付き頂点作用素代数の同型類の個数は $\mathrm{Hom}(D, \mathbb{Z}_2^n/C)$ の位数以下である。

これらの結果により、枠付き頂点作用素代数の同型類の分類が可能であることが分かります。頂点作用素代数の理論においては、保型形式との関係から正則という性質を持つものが特に重要です。ここで頂点作用素代数 V が**正則** (holomorphic) であるとは、任意の V-加群は完全加約であり、さらに既約な V-加群は V 自身に限ることです。定理 11 より全ての枠付き頂点作用素代数の表現は完全加約であることが分かりますので、枠付き頂点作用素代数の場合には正則性は既約加群がどれだけあるかが問題になります。枠付き頂点作用素代数の場合には正則性は構造符号だけから決まることが知られています。

定理 14. ([DGH, Mi3]) V を枠付き頂点作用素代数、(C, D) をその構造符号とするとき、V が正則であることと $C = D^{\perp}$ は同値である。

この定理及び命題 7、定理 10 から正則な枠付き頂点作用素代数の構造符号 (C, D) は以下の性質を満たすことが分かります。

(i) $C, D \subset \mathbb{Z}_2^n$ とするとき、n は 16 の倍数である。
(ii) $C = D^{\perp}$.
(iii) C は偶線形符号である。
(iv) 任意の $\alpha \in D$ について $8|\mathrm{wt}(\alpha)$ である。
(v) 任意の $\alpha \in D$ について C_α には $\mathrm{supp}(\alpha)$ を台とする重偶自己双対的符号が含まれている。

これらの条件は (C, D) を構造符号に持つ正則な枠付き頂点作用素代数が存在するための必要条件を集めたものですが、実は十分条件になっている事も証明できます。

定理 15. ([LaY]) (C, D) が正則な枠付き頂点作用素代数の構造符号であるための必要十分条件は上記の (i)–(v) である。

条件 (i)–(v) は一見とても複雑ですが、次のように簡単な条件に置き換えることができます。

補題 16. n を 16 の倍数、$D \subset \mathbb{Z}_2^n$ として、組 $(D^{\perp}, D)$ が上記の (ii)–(v) を満たすことと (iv) 及び $(11\ldots1) \in D$ を満たすことは同値である。

補題にある条件を満たす符号 D を分類し、正則な枠付き頂点作用素代数を分類するのは興味ある問題だと思われます。分類問題と関連して、正則な頂点作用素代数の中でも

ムーンシャイン頂点作用素代数 $V^\natural$ は格別重要なものと考えられており、[FLM] では正則な頂点作用素代数として $V^\natural$ の特徴付けに関する予想が提出されました。この問題に関して、枠付きという仮定をおけば正しい事が最近になって証明することができました。

定理 17. $V=\oplus_{n\geq 0}V_n$ を $V_1=0$ を満たす中心電荷 24 の正則な枠付き頂点作用素代数とすれば、V は $V^\natural$ に同型である。

6 枠固定自己同型群

最後に枠固定自己同型群の構造について述べます。一般に頂点作用素代数 V とその自己同型群 G が与えられたとき、V の表現が良く分かっていてもその固定点部分代数 V^G の表現論は非常に難しいものになります (cf. [山田])。しかし、V が枠付きで、V^G も枠付きであるならば、V^G の表現は簡単に決定できます。ではどのような G に対して、V^G もまた枠付きになるのでしょうか。F を V のイジング枠として、次で定義される枠固定部分群を考えます。

$$\mathrm{Stab}_V^{\mathrm{pt}}(F):=\{g\in\mathrm{Aut}(V)\mid g|_F=\mathrm{id}_F\}. \tag{6.1}$$

このとき容易に分かるように、$F\subset V^G$ となることと、$G\subset\mathrm{Stab}_V^{\mathrm{pt}}(F)$ であることは同値になります。枠固定部分群の構造は V の構造符号だけで決定する事ができます。$\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n),\beta=(\beta_1,\dots,\beta_n)\in\mathbb{Z}_2^n$ に対し $\mathbb{Z}_2^n$ を環と見た場合の積を $\alpha\cdot\beta=(\alpha_1\beta_1,\dots,\alpha_n\beta_n)$ と書くことにします。

定理 18. ([LaY]) V を枠付き頂点作用素代数、$F=\mathrm{Vir}(e^1)\otimes\cdots\otimes\mathrm{Vir}(e^n)$ をそのイジング枠、そして (C,D) を V の F に関する構造符号とする。$P:=\{\xi\in\mathbb{Z}_2^n\mid\xi\cdot D\subset C\}$ とおく時、次が成り立つ。

(1) P は線形符号をなす。

(2) $C^\perp\subset P$.

(3) 次の群完全系列が存在する:

$$1\longrightarrow\mathbb{Z}_2^n/D^\perp\longrightarrow\mathrm{Stab}_V^{\mathrm{pt}}(F)\longrightarrow P/C^\perp\longrightarrow 1.$$

謝辞

今回、代数学シンポジウムで講演することを薦めてくださった宮本雅彦氏並びに集会を円滑に進めてくださった関係者の皆様に感謝いたします。

参考文献

[DGH] C. Dong, R.L. Griess and G. Höhn, Framed vertex operator algebras, codes and the moonshine module, *Comm. Math. Phys.* **193** (1998), 407–448.

[DLM] C. Dong, H. Li and G. Mason, Compact automorphism groups of vertex operator algebras, *Internat. Math. Res. Notices* **18** (1996), 913–921.

[DM] C. Dong and G. Mason, On quantum Galois theory, *Duke Math. J.* **86** (1997), 305–321.

[DMZ] C. Dong, G. Mason and Y. Zhu, Discrete series of the Virasoro algebra and the moonshine module, Proc. Symp. Pure. Math., American Math. Soc. **56** II (1994), 295–316.

[FLM] I.B. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, Vertex Operator Algebras and the Monster, Academic Press, New York, 1988.

[H] G. Höhn, The group of symmetries of the shorter moonshine module, math.QA/0210076.

[K] V. G. Kac, Vertex algebras for beginners, second edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[KR] V. G. Kac and A. K. Raina, Bombay Lectures on Highest Weight Representations of Infinite Dimensional Lie algebras, World Scientific, Singapore, 1987.

[LaY] C.H. Lam and H. Yamauchi, On the structure of framed vertex operator algebras and their frame stabilizers, `math.QA/0605176`.

[LL] J. Lepowsky and H. Li, Introduction to vertex operator algebras and their representations, Birkhäuser, Boston, 2004.

[MN] A. Matsuo and K. Nagatomo, Axioms for a vertex algebra and the locality of quantum fields, MSJ Memoirs 4, Mathematical Society of Japan, 1999.

[Mi1] M. Miyamoto, Griess algebras and conformal vectors in vertex operator algebras, *J. Algebra* **179** (1996), 528–548.

[Mi2] M. Miyamoto, Representation theory of code vertex operator algebras, *J. Algebra* **201** (1998), 115-150.

[Mi3] M. Miyamoto, A new construction of the moonshine vertex operator algebra over the real number field, to appear in *Ann. of Math.*

[松尾] 松尾 厚, 頂点作用素代数とそのモジュラー不変性についての概説, 第 47 回代数学シンポジウム報告集 (2002), 92–107,

[山田] 山田 裕理, 頂点作用素代数のオービフォルド, 第 49 回代数学シンポジウム報告集 (2004), 122–138.

[Y] H. Yamauchi, A theory of simple current extensions of vertex operator algebras and applications to the moonshine vertex operator algebra, Ph.D. thesis, University of Tsukuba, 2004.; `http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yamauchi/math/phd/myphd.pdf`