GT-ADMISSIBLE VARIETIES

寺杣　友秀

1. Introduction

$\mathbf{P}^1 - \{0,1,\infty\}$ の基本群の周期から多重ゼータ値が現れる。また Mixed Tate motif の圏における extension group は K-theory により計算可能なので、その様子はある程度はわかっているといってもよい。これらのなすベクトル空間の次元の様子から、$\mathbf{Z}$ 上の mixed Tate motif の周期がすべて多重ゼータ値で表されることが予想される。$\mathbf{P}^1 - \{0,1,\infty\}$ の基本群の自己同型の部分群として現れる Grothendieck-Teichmuller group と mixed Tate motif の基本群との関係によって定式化される。これが Deligne-Ihara 予想と呼ばれる予想で、上にあげたすべての $\mathbf{Z}$ 上の mixed Tate motif の周期が多重ゼータ値でかけるか、という予想は Deligne-Ihara 予想に現れる写像の injectivity として解釈される。この injectivity は $\mathbf{Z}$ 上の mixed Tate motif を生成する object でそれらが $\mathbf{P}^1 - \{0,1,\infty\}$ に由来するものを構成する、という問題に言い換えられる。この問題はいまだに完全な解決をみていないが、この報告では $\mathbf{Z}$ 上の mixed Tate motif を生成する比較的わかりやすい object を構成することと、どのような幾何学的対象が Grothendieck-Teichmuller group に由来するか、という点についてわかったことを述べようと思う。

2. Algebroid と Grothendieck-Teichmuller 群

この章では Algebroid に値をもつ functor の functorial isomorphism として Grothendieck-Teichmuller 群を定義する。この定義の利点として algebroid から構成されるものには自然に Grothendieck-Teichmuller 群が作用することが定義からただちに従う。

定義 2.1 (Algebroid)**.** (1) S を集合,K を標数 0 の体とする。S 上の K-*algebroid* $\mathcal{U}$ *(あるいは単に algebroid)* とは
   (a) $a, b \in S$ により *index* 付けされた K-ベクトル空間 $\mathcal{U}_{ab}$ と
   (b) *associative* な積 $\mathcal{U}_{bc} \otimes \mathcal{U}_{ab} \to \mathcal{U}_{ac}$ をもち、
   (c) この積により $\mathcal{U}_{aa}$ は単位元をもつ環となり、
   (d) $\mathcal{U}_{ab}$ は $[a,b]$ を生成元とする *free right* $\mathcal{U}_{aa}$ *module (free left* $\mathcal{U}_{bb}$ *module) of rank 1* となるもの

   のことである。

(2) *comultiplication* $\Delta : \mathcal{U}_{ab} \to \mathcal{U}_{ab} \otimes \mathcal{U}_{ab}$ 等を考えることにより、*Hopf algebroid* も同様に定義される。

(3) $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ を集合 S_1, S_2 上の *algebroid* とする。*algebroid* の *morphism* $f : \mathcal{U}_1 \to \mathcal{U}_2$ とは集合 $f : S_1 \to S_2$ と線形写像 $f_{ab} : \mathcal{U}_{1,ab} \to \mathcal{U}_{2,f(a)f(b)}$ の組で積と *compatible* になるものである。

例 2.2. (1) X を位相空間として $S = X$ とするとき $x, y \in X$ に対して $\mathbf{Q}[\pi_1(X, x, y)]$ を考えるとこれは S 上の *algebroid* となる。ここで $\pi_1(X, x, y)$ は x, y を結ぶ *path* のホモトピー類である。さらに *augmentation ideal* による完備化 $\mathcal{U}(X)^B = \mathbf{Q}[\pi_1(X, x, y)]^\wedge$ を考えると, これも *algebroid* となる。これを *Betti fundamental algebroid* とよぶ。

(2) X を *affine algebraic variety,* $x, y \in X$ とする。$Nilcon(X)$ を *nilpotent connection* なす *Tannakaian category* とする。x, y より定まる *fiber fuctor* F_x, F_y の *tensor endomorphism* $\mathcal{U}(X)^{dR}_{xy} = End^{\otimes}(F_x, F_y)$ を考えると、*algebroid* になる。これを *de Rham fundamental algebroid* という。

(3) X が代数多様体の場合には S を X の *geometric point* の集合の部分集合として S 上の *etale fundamental groupoid* 上の群環を考えることにより *l-adic etale fundamental algebroid* $\mathcal{U}(X)^l$ が同様に定義される。これは S 上の $\mathbf{Q}_l$*-algebroid* となる。

(4) 上の三つの例は自然に *Hopf algebroid* の構造がはいる。さらに X が $\mathbf{C}$ の部分体 K 上に定義されているとき、*comparison isomorphism*

$$\mathcal{U}(X)^B \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C} \simeq \mathcal{U}(X)^{dR} \otimes_{\mathbf{K}} \mathbf{C}$$

がある。以下 *tensor* 積は *completed tensor product* を意味する。

(5) 上の構成法は X の *tangential point* の場合に一般化される。

さて Grothendieck-Teichmuller group を定義するために category $(Fund)$ を次のように object と morphism を定めて定義する。

(1) Object は$\mathcal{M}_{0,4}$,Δ^*(=punctured disk), $\mathcal{M}_{0,5}$, $\mathbf{P}^1 - \{0, \infty\}$ にそれぞれ $\mathbf{Z}$ 上定義された tangential point を付加して考えたもの。

(2) Morphism は $\Delta^* \to \mathcal{M}_{0,4}$, $\mathcal{M}_{0,4} \to \mathbf{P}^1 - \{0, \infty\}$ と infinitesimal inclusion $\mathcal{M}_{0,4} \to \mathcal{M}_{0,5}$, 及び tangential point を保つ自己同型で生成される。

さらに Δ^* のみからなる $(Fund)$ の full sub categroy を (Δ^*) と書く。3 つの基本群の理論 (l-adic etale realization, Betti realization, de Rham realization) に応じて、fundametal algebroid を考えることにより、$(Fund)$ から Hopf algebroid の圏への functor $\mathcal{U}^{et}$,$\mathcal{U}^B$,$\mathcal{U}^{dR}$ が定義される。

定義 2.3 (Associator,GT)**.** (1) $* = l, B, dR$ に対して $*$*-Grothendieck-Teichmuller group* GT_* を次の *functorial automorphism* によって定義する。

$$GT_* = Aut_{functor}(\mathcal{U}^*)$$

$\varphi \in GT_*$ に対して φ を (Δ^*) に制限することにより GT_* から

$$\mathbf{G}_m = Aut_{functor}(\mathcal{U}^* \mid_{(\Delta^*)})$$

への準同型 $\lambda : GT_* \to \mathbf{G}_m$ ができる。λ の *kernel* を $GT_*^{(1)}$ と書く。

(2) 集合 $\widetilde{Ass}$ を次の *functorial isomorphism* として定義する。

$$\widetilde{Ass} = Isom_{functor}(\mathcal{U}^B \otimes \mathbf{C}, \mathcal{U}^{dR} \otimes \mathbf{C})$$

上と同様に (Δ^*) への制限を考えることにより $\lambda : \widetilde{Ass} \to \mathbf{C}^\times \cdot (comp)$ なる写像をえる。ここで $(comp)$ は Δ^* の基本群に対する $Betti - deRham$ *comparison isom* とする。$\lambda^{-1}(comp)$ の元 *associator* という。

GT に関して次の結果が著しい。

定理 2.4 (Lochak-Ihara)**.** *$\varphi \in GT_*$ は $\mathcal{M}_{0,n}$ ($n \geq 4$) およびそれらの間の infinitesimal inclusion, projection により生成される圏から Hopf algebroid への functorial isomorphism に一意的に延長される。*

さらに $\mathbf{Z}$ 上の mixed Tate motif との関連をのべよう。$MTM_{\mathbf{Z}}$ を $\mathbf{Z}$ 上の unramified mixed Tate motif の圏とする。これは Tannakian category となり、$MTM_{\mathbf{Z}}$ 上の Hopf algebroid object などが定義される。さらに

定理 2.5 (Deligne-Goncharov)**.** *($Fund$) の object X に対してその tangential base point の集合 $\mid X \mid$ 上の $MTM_{\mathbf{Z}}$ 上の fundamental algebroid $\mathcal{U}(X)^{mot}$ が functorial に定義される。さらに $\mathcal{U}(X)^{mot}$ の $*$-realization ($* = l, B, dR$) は $\mathcal{U}(X)^*$ と自然に同型になる。*

いま $* = l, B, dR$ として $MTM_{\mathbf{Z}}$ の fiber functor ω_* を base point とする Tannaka fundamental group を $\pi_1(MTM_{\mathbf{Z}}, \omega_*)$ とおくと上の定理より次の代数群の写像がある。

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(MTM_{\mathbf{Z}}, \omega_*) & \xrightarrow{\varphi} & GT_* \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \mathbf{G}_m \end{array}$$

予想 2.6 (Deligne-Ihara)**.** 上の φ は同型であろう。

上の予想に関しては numerical な evidence がある。

注意 2.7.
(1) 上の φ の単射性は $\mathbf{Z}$ 上 *unramified* な *mixed Tate motif* が $(\mathcal{M}_{0,4}, \overrightarrow{01}, \overrightarrow{10})$ で生成されると言い換えられる。以下これを問題にしたい。
(2) 上の単射性の *profinite version* は *Belyi* の定理により知られている。つまりすべての $\mathbf{Q}$ の有限次代数拡大は $\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ の基本群への作用から得られる。

3. Hopf algebroid に由来する DGA と Galois 群の作用

ここの章では基礎体は $\mathbf{Q}$ とする。$\mathcal{U}$ を S の上の Hopf algebroid とする。Complex $C^\bullet(\mathcal{U})_q$ を

$$\begin{array}{ccccc} \cdots \quad \oplus_{p_0,p_1,p_2 \in S} \mathcal{U}_{p_0,q} \otimes \mathcal{U}_{p_1,q} \otimes \mathcal{U}_{p_2,q} & \to & \oplus_{p_0,p_1 \in S} \mathcal{U}_{p_0,q} \otimes \mathcal{U}_{p_1,q} & \to & \oplus_{p_0 \in S} \mathcal{U}_{p,q} \\ a \otimes b \otimes c & \mapsto & \begin{pmatrix} \epsilon(a) b \otimes c \\ -\epsilon(b) a \otimes c \\ +\epsilon(c) a \otimes b \end{pmatrix} & & \\ & & a \otimes b & \mapsto & \epsilon(a) b - \epsilon(b) a \end{array}$$

によって定義する。ここで complex の degree は $C^{-i}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}^{\otimes i+1}$ によって与えられる。ここで coproduct $\Delta : \mathcal{U}_{qr} \to \mathcal{U}_{qr} \otimes^{i+1}$ を用いて $\mathcal{U}_{qr} \otimes C^{-i}(\mathcal{U})_q \to C^{-i}(\mathcal{U})_r$ なる homomorphism が定まり、それによって $C^\bullet(\mathcal{U})$ は left $\mathcal{U}$ module の complex となる。

定義 3.1 (DGA of Hopf algebroid)**.** (1) *$\mathcal{U}$ の DGA $\Omega^\bullet(\mathcal{U})$ を*

$$\Omega^\bullet(\mathcal{U}) = Hom_{\mathcal{U}}(C^\bullet(\mathcal{U}), \mathbf{Q})$$

により定義する。$\Omega^\bullet(\mathcal{U})$ の積構造は $\omega \in \Omega^i, \eta \in \Omega^j$ に対して

$$(\omega \cdot \eta)(x_0 \otimes \cdots \otimes x_{i+j}) = (\omega \otimes \eta)(x_0 \otimes \cdots \otimes x_i \otimes \Delta(x_i) \otimes x_{i+1} \otimes \cdots \otimes x_{i+j})$$

と定める。この積構造は *associative* であり、*up to homotopy* で *greded commutative* である。

(2) *algebroid* の *homomorphism* $f : \mathcal{U}_1 \to \mathcal{U}_2$ に対して *contravariant* に $\Omega^\bullet(\mathcal{U}_2) \to \Omega^\bullet(\mathcal{U}_1)$ が定まる。従って *semi-simplicail Hopf algebroid* $\mathcal{U}_\bullet = \{\mathcal{U}_I\}_{I \in \mathcal{I}_i}$ が $I \in \mathcal{I}_{p+1}, J \in \mathcal{I}_p$ $\mathcal{U}_I \to \mathcal{U}_J$ なる形で与えられると、$\Omega(\mathcal{U}_\bullet)^\bullet$ が

$$\Omega(\mathcal{U}_\bullet)^\bullet : \oplus_{I \in \mathcal{I}_0} \Omega(\mathcal{U}_I)^\bullet \to \oplus_{I \in \mathcal{I}_1} \Omega(\mathcal{U}_I)^\bullet \to \dots$$

によって定まる。

注意 3.2. $\mathcal{U}$ は各 *base point* の *pair* 毎に *vector space* が定まるが $\Omega(\mathcal{U})^\bullet$ は *base point* によらずに定まる。*base point* に関する *compatibility* の情報は *algebroid* の *base point set* S に含まれている。従って上の *functoriality* は *up to homotopy* のみならず、*strict* に *functorial* である。*algebroid* ではなく *algebra* から出発すると、常に *base point* の取替えを考えねばならず、*functoriality* も *up to homotopy* でしか成立しない。従ってそのままでは *simplicial object* に対して *simplicial complex* が作れない。

$X_\bullet$ を $\mathbf{C}$ の部分体 K 上に定義された simplicial scheme とする。このとき $\overline{X}_\bullet$ を K の代数閉包への base change として、$\mathcal{U}(\overline{X}_\bullet)^{et}$ をこれから誘導される semi-simplicial Hopf algebroid とする。

命題 3.3. 各 $\overline{X_I}$ *($I \in \mathcal{I}_p$)* が $\mathbf{Q}_l - K\pi_1$ *space* であるとする。このとき

$$H^i(\Omega(\mathcal{U}(\overline{X}_\bullet)^{et})^\bullet) \to H^i_{et}(\overline{X_\bullet}, \mathbf{Q}_l)$$

なる自然な同型が存在する。さらにこれは $Gal(\overline{K}/K)$ 作用と *compatible* である。

4. GT-admissible varieties

上の構成法と Galois 群との compatibility を使って、Galois 群 $Gal(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ が GT_{et} の作用を通して作用する variety のクラスを定義したい。

$\mathcal{M}_{0,n}$ の tangential point を定義する。まず outer edge の数が n 個の planer trivalent graph の集合を考えてそれらの間に mirror であることによる同値類を考えると、それは $\mathcal{M}$ の tangential point を与える。すなわち graph の同値類 γ に対してこれは cross ratio を考えることにより

$$\Gamma(\mathcal{M}_{0,n}, \mathcal{O}) = \mathbf{Q}[t_4, \dots, t_n][t_i^{-1}, (t_i - 1)^{-1}, (t_i - t_j)^{-1}]$$

の subalgebra $R_0 = \mathbf{Q}[u_1, \dots, u_{n-3}]$ が定義できる。u_i の番号付けは inner edge に対応している。今 $R = \mathbf{Q}[[u_1, \dots, u_{n-3}]][u_i^{-1}]$ とおき、R の拡大

$$\tilde{R} = \mathbf{Q}[[u_1, \dots, u_{n-3}]][u_i^{\frac{1}{l^e}}, u_i^{-1}]_e$$

及び $\mathbf{Z}^{n-3} \to \mathbf{R}^\times$ を考えるとこれが $\mathcal{M}_{0,n}$ の tangential point となる。ここでは説明を省略するが、tangential point には同値という概念がさだまっている。

このような形の tangential point を $\mathcal{M}_{0,n}$ の standard な tangential point とよぶ。さらに環 A および $n_1,\dots,n_p$ に対して

$$A[[t_4^{(p)},\dots,t_{n_p}^{(p)}]][(t_i^{(p)})^{-1},(t_i^{(p)}-t_j^{(p)})^{-1}]_{p,i}$$

を作る操作を考える。$\mathbf{Q}$ から出発して上の操作を繰り返して得られる環には standard tangential point の集合が定義される。このような環とその上の standard tangential point 全体の集合の組を standard tangential ring という。$(\Gamma(\mathcal{M}_{0,n},\mathcal{O}),$ the set of planer graph modulo mirror) は standard tangential ring の例である。さらに A,B が standard tangential ring とするとき、ring hom $A\to B$ が standard という概念も次の stratified space の formal ring of flag を用いて定義される。

さてこれらの環の *Spec* を張り合わせて simplicial scheme を構成する。まず $X=(X,\mathcal{S})$ を stratified space とする。以下すべての strata $Z\in\mathcal{S}$ の X における closure$\overline{Z}$ は smooth であると仮定する。このとき Z を center とする X の blow up には S から定まる strata が自然に定まる。このようにして得られる stratified space を admissible blow up という。$\mathbf{A}^n$ 上に $x_i=0$,$(i=1,\dots,n)$, $x_i=x_j(i\neq j)$ により定まる strata を考えこれから admissible blow up を繰り返して得られる stratified space を standar stratifed space という。

stratifed scheme $(X,\mathcal{S})$ が affine stratified scheme であるとは各 $Z\in S$ 及び X が affine scheme であることをいう。$Z\in\mathcal{S}$ に対して $\Gamma(Z,\mathcal{O})$ を A_Z と書く。一般に affine stratified scheme $X=(Spec(A),\mathcal{S})$ があったとき、strata の列 $\sigma: X_n,X_{n-1},\dots,X_1$ で $X=\overline{X_n}\supset\overline{X_{n-1}}\supset\cdot\supset\overline{X_0}$ を満たすものを X の flag という。σ の formal ring of flag A_σ を次のように定義する。I_i を $\overline{X_i}$ の defining ideal, A/I_i の乗法的集合 S_i を $A_{X_i}=(A/I_i)[S_i^{-1}]$ となるようにとる。このとき A_σ を

$$A_\sigma=\cdots(\varprojlim_{m_2}(\varprojlim_{m_2}(A/I_1^{m_1})[S_1^{-1}])/I_2^{m_2})[S_2^{-1}])\dots$$

によって定義する。flag の refinement に対して formal ring の homomorphism が定義される。standard stratified space の flag の refinement から得られる tangential ring homomorphism と $\mathbf{A}^n\to\mathbf{A}^m$ なる projection, inclusion から誘導される tangential ring の morphism の合成を standard homomorphism と定義する。

さてこれで GT-admissible variety の定義ができる。

定義 4.1 (GT-admissible variety). (1) $X=(X,\mathcal{S})$ を $\mathbf{Q}$ 上の *affined stratified scheme* で有限個の *tangential point* の集合 T が与えられているとする。これが *GT-admissible* であるとは以下の条件をみたすことである。
(a) 各 *flag* σ に対してその *formal ring* A_σ に対して A_σ を *dominate* する T の部分集合 T_σ は空ではない。
(b) A_σ と T_σ は *standard tangential ring* になる。
(c) *flag* の *refinement* よりえられる *formal ring* の *homomorphism* は *tangential ring* の *homomorphism* として *standard* である。

(2) さらに *GT-admissible variety* の *morphism* とは *stratification* と *tangential scheme* の *morphism* で各 *formal ring* が *standard homomorphsism* となることである。

定理 4.2. $X_\bullet$ を *GT-admissible variety* と *GT-admissible* な *morphism* からなる *semi-simplicial scheme* とする。このような *simplicial scheme* を *GT-admissible simplicial scheme* という。このとき $H^i_{et}(X, \mathbf{Q}_l)$ には GT_l の作用が定まり、この作用を $Gal(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ へ制限したものが自然な作用と一致する。

5. Motif の universal object

この章では Bar construction を Beilinson の方法をもとに定義する。simplex Δ^n を

$$\Delta^n = \{0 < x_1 \cdots < x_n < 1\}$$

と定義する。このとき Δ_n の face の集合 $\sigma(\Delta^n)$ は

$$E = \{e_1, \dots, e_{n+1}\}$$

の全体でない部分集合と 1:1 に対応する。ここで

$$e_1 = \{0 = x_1\}, e_2 = \{x_1 = x_2\}, \dots, e_n = \{x_{n-1} = x_n\}, e_{n+1} = \{x_n = 1\}$$

たとえば $\{0 = x_1 = x_2 < x_3 = x_4 < x_5 < x_6 = 1\}$ なる face を記号で $(b12 \mid 34 \mid 5 \mid 6e)$ という様に書く。$A^\bullet$ を DGA とする。（以下 DGA は単位元を持ち associative は仮定する。）$A^\bullet \to B_0, A^\bullet \to B_1$ を DGA homomorphism とする。$\tau \in \sigma(\Delta^n)$ にたいして $A^\bullet_\tau$ を定義する。たとえば $\tau = (b12 \mid 34 \mid 5 \mid 6e)$ の場合は

$$A_\tau = B_{0,b12} \otimes A^\bullet_{34} \otimes A^\bullet_5 \otimes B_{1,6e}$$

という具合に定義する。ここで $B_{0,b12}$ は B_0 のコピー、$A^\bullet_{34}, A^\bullet_5$ は $A^\bullet$ のコピー、$B_{1,6e}$ は B_1 のコピーである。B_0, B_1 をそれぞれ DGA of begining, DGA of ending という。二つの face $\tau_1, \tau_2 \in \sigma(\Delta^n)$ で $\tau_1 < \tau_2$ である、すなわち τ_1 が τ_2 の face になっているとする。このとき $A^\bullet, B_0, B_1$ の積の構造と $A^\bullet \to B_0$, $A^\bullet \to B_1$ を用いて $A_{\tau_2} \to A_{\tau_1}$ なる complex homomorphism が定まる。これらを合わせて、B_0 で始まり $A^\bullet$ を通って、B_1 で終わる bar complex $Bar_n(B_0 \mid A^\bullet \mid B_1)$ を

$$\oplus_{\dim \tau = n} A_\tau \to \oplus_{\dim \tau = n-1} A_\tau \to \cdots \to \oplus_{\dim \tau = 1} A_\tau \to \oplus_{\dim \tau = 0} A_\tau \to 0$$

によって定義する。$Bar_n(B_0 \mid A^\bullet \mid B_1)$ の n に関する帰納極限をとったものを、$Bar(B_0 \mid A^\bullet \mid B_1)$ と書く。

定義 5.1. ϵ_1, ϵ_2 を $A^\bullet$ の二つの *augmentation* とする。$i \neq 0$ に対して $H^i(Bar(\epsilon_1 \mid A^\bullet \mid \epsilon_2)) = 0$ となるとき,*DGA* $A^\bullet$ は $K\pi_1$ であるという。

例 5.2. X を連結な多様体として $A^\bullet$ を C^∞-複素数値微分形式のなす *DGA* とする。$x_0, x_1 \in X$ に対して *augmentation* $\epsilon_i : A^\bullet \to \mathbf{C}$ が x_i での *evaluation* により定まる。$Bar(\epsilon_0 \mid A^\bullet \mid \epsilon_1)$ は $x_0 = x_1$ のときは *Chen* の *reduce bar complex* と *quasi-isomorphic* である。また

$$H^0(Bar(\epsilon_0 \mid A^\bullet \mid \epsilon_1))^* = \mathbf{C}[\pi_1(X, x_0, x_1)]^\wedge$$

この構成法は $A^\bullet$ として Bloch の cycle complex をとり augmentation として様々な realization や motif それ自身にとることができる。このようにしてできる"Bar object" は universal な object となると思われる。とくに $\mathbf{Q}$ 上の mixed Tate motif は Beilinson-Soule 予想を満たし、$K\pi_1$ property を持っているのでこのようにしてできる object は mixed Tate motif の三角圏での abelian ojbect (すなわち Levine の定義した t-structure の heart）になる。abelian object のなす category を $MTM_{\mathbf{Z}}$ と書く。

Universal object の構成についてのべる。以下 $S = Spec(\mathbf{Q})$ を基礎体とする。まず $\mathbf{Q}_S(i)$ $(i \in \mathbf{Z})$ で生成された DG-category $\mathcal{S}$ を

$$\underline{Hom}^j(\mathbf{Q}_S, \mathbf{Q}_S(i)) = \begin{cases} Z^i(\square^{2i-j}), & (i \neq 1) \\ 0, & (i = 1) \end{cases}$$
$$\underline{Hom}^j(\mathbf{Q}_S(k), \mathbf{Q}_S(i+k)) = \underline{Hom}^j(\mathbf{Q}_S, \mathbf{Q}_S(i))$$

により定義する。ここで $Z^\bullet(\square^\bullet)$ は Bloch の (cubic) cycle complex である。また composite

$$\underline{Hom}^j(\mathbf{Q}_S, \mathbf{Q}_S(i)) \otimes \underline{Hom}^{j'}(\mathbf{Q}_S, \mathbf{Q}_S(i')) \to \underline{Hom}^{j+j'}(\mathbf{Q}_S, \mathbf{Q}_S(i+i'))$$

は cycle の直積によって定める。$\mathcal{S}$ の DG-complex は再び DG-category となるこれを $\mathcal{D} = K\mathcal{S}$ とおく。この章の始めに定義した Bar complex にならって motivic bar complex を定義する。前と違う点は Tate twist による grading がついているところである。$\tau \in \sigma(\Delta^n)$ および $i_1, \dots, i_n \in \mathbf{Z}$ $0 = \sum_{p=1}^n i_p$ を満たすものに対して $\mathcal{D}$ の object $A_\tau(i_1, \dots, i_n)$ を次の様に定義する。たとえば $\tau = (b12 \mid 34 \mid 5 \mid 6e)$, のときはとおいて、$i_1 = i_2 = 0$ のときは

$$A_\tau(i_1, \dots, i_6) = \underline{Hom}^\bullet_{\mathcal{D}}(\mathbf{Q}_S, \mathbf{Q}_S(i_3+i_4)) \otimes \underline{Hom}^\bullet_{\mathcal{D}}(\mathbf{Q}_S, \mathbf{Q}_S(i_5)) \otimes \mathbf{Q}_S(i_6)$$

と定義し、$(i_1, i_2) \neq (0,0)$ の時は 0 と定義する。ひとつの face の codimension 1 の face はこの表示においては"|" の部分をひとつ取り除いたものになる。それが b を含む場合、b, e ともに含まない場合はそれぞれ augmentation あるいは cycle complex の積を使う。e を含む場合は注意を要する。たとえば $\tau = (b12 \mid 34 \mid 5 \mid 6e)$ の face $\tau' = (b12 \mid 34 \mid 56e)$ のときは

$$\begin{aligned}&\underline{Hom}^\bullet_{\mathcal{D}}\Big(\underline{Hom}^\bullet_{\mathcal{D}}(\mathbf{Q}_S, \mathbf{Q}_S(i_5)) \otimes \mathbf{Q}_S(i_6), \mathbf{Q}_S(i_5+i_6)\Big) \\ =&\underline{Hom}^\bullet_{DG/\mathbf{Q}}\Big(\underline{Hom}^\bullet_{\mathcal{D}}(\mathbf{Q}_S, \mathbf{Q}_S(i_5)), \underline{Hom}^\bullet_{\mathcal{D}}(\mathbf{Q}_S(i_6), \mathbf{Q}_S(i_5+i_6))\Big)\end{aligned}$$

を用いて id に対応する元をとってきて定義する。ここで $DG/\mathbf{Q}$ は $\mathbf{Q}$ vector space の complex のなす DG-category とする。このようにして $\mathcal{D}$ の DG-complex

$$Bar_n(\omega_{gr} \mid A^\bullet(\bullet) \mid mot) = \oplus_{\tau \in \Delta^n} \oplus_{i_1+\cdots+i_n=0} A_\tau(i_1, \dots, i_n)$$

を定義する。$Bar_n(\omega_{gr} \mid A^\bullet(\bullet) \mid mot)$ の n に関する帰納極限をとったものを $Bar_n(\omega_{gr} \mid A^\bullet(\bullet) \mid mot)$ と書く。このとき Bloch cycle complex が Beilinson-Soule conjecture をみたし、$K\pi_1$ であることを使えば

$$\mathbf{U} = H^0(Bar(\omega_{gr} \mid A^\bullet(\bullet) \mid mot))^*$$

は $MTM_{\mathbf{Z}}$ の object であることが結論される。ここで $M \in MTM_{\mathbf{Z}}$ に対して、M^* はその dual object である。さらに $A^\bullet$ を Bloch の cycle complex, ω_{gr} を associated graded realization に対する augmentation homomorphism とすると、$H^0(Bar(\omega_{gr} \mid A^\bullet \mid \omega_{gr}))$ の dual vector space には Hopf algebra の構造が定まる。次の章で $\mathcal{U}$-module の圏と $MTM_{\mathbf{Z}}$ の圏の関係について述べる。

注意 5.3. *Bar complex の coalgebra strucuture を使うと、*

$$\mathbf{U} \otimes \mathcal{U}_i \to \mathbf{U} \otimes \mathbf{Q}_S(-i)$$

なる $MTM_{\mathbf{Z}}$ の homomorphism が得られる。これを用いて $\widetilde{\mathbf{U}} = \mathbf{U} \otimes \mathbf{Q}((\mathbf{Q}_S(-1)))$ には $\mathcal{U}$-right module の構造が自然に定まる。ここで $\mathbf{Q}((\mathbf{Q}_S(-1)^{\pm}))$ は $\mathbf{Q}_S(-1)$ の Laurent power series ring である。$\mathbf{U} \otimes \mathbf{Q}_S(-m)$ 上に $\lambda \in \mathbf{Q}^\times$ の作用を λ^{-m} 倍で作用させることにより $\widetilde{\mathbf{U}}$ 上に $\mathbf{Q}^\times$ の作用が定まる。

6. Graded Tannakian category との関係

$MTM_{\mathbf{Z}}$ のなかで pure Tate motif のなす full subcategory を $PTM_{\mathbf{Z}}$ と書くとその inclusion は $\lambda : \pi_1(MTM_{\mathbf{Z}}, \omega_{gr}) \to \mathbf{G}_m = \pi_1(PTM_{\mathbf{Z}}, \omega_{gr})$ なる写像を定義する。fiber functor ω_{gr} は graded vector space の category を factor するので、この写像は $w : \mathbf{G}_m \to \pi_1(MTM_{\mathbf{Z}}, \omega_{gr})$ と factor する。$\pi_1(MTM_{\mathbf{Z}}, \omega_{gr})^{(1)} = Ker(\lambda)$ は unipotent な代数群なので、$\pi_1(MTM_{\mathbf{Z}}, \omega_{gr})^{(1)}$ の代数的な表現の圏とその Lie algebra

$$\mathcal{G}_{MTM} = Lie(\pi_1(MTM_{\mathbf{Z}}, \omega_{gr})^{(1)})$$

の表現の圏は同値となる。さきほどの splitting w を考えると adjoint action により $\mathbf{G}_m$ が $\mathcal{G}_{MTM}$ の Universal envelope algebra $\mathcal{U}(\mathcal{G}_{MTM})$ に作用する。その作用により $\mathcal{U}(\mathcal{G}_{MTM})$ は graded algebra となる。その grading を

$$\mathcal{U}(\mathcal{G}_{MTM}) = \hat{\oplus}_{i \geq 0} \mathcal{U}(\mathcal{G}_{MTM})_i$$

と書く。

定義 6.1 (Graded module)**.** *Left $\mathcal{U}(\mathcal{G}_{MTM})$-module M とその上の grading $M = \hat{\oplus}_j M_j$ が与えられているとき、$\mathcal{U}(\mathcal{G}_{MTM})_i \cdot M_j \subset M_{i+j}$ を満たすとき、M は graded left $\mathcal{U}(\mathcal{G}_{MTM})$-module であるという。graded module の圏は Tannakian category になる。*

このとき次のことに注意する。

命題 6.2. (1) *Category MTM と graded left $\mathcal{U}(\mathcal{G}_{MTM})$-module の圏は同値である。*
(2) *前の章にあらわれた $H^0(Bar(\omega_{gr} \mid A^\bullet \mid \omega_{gr}))$ には自然に grading が定まり、graded Hopf algebra の意味で*

$$H^0(Bar(\omega_{gr} \mid A^\bullet \mid \omega_{gr}))^* \simeq \mathcal{U}(\mathcal{G}_{MTM})$$

このとき Beilinson-Soule condition をみたす $K\pi_1$-DGA の Bar complex の理論の一般論より次の定理が成立する。

命題 6.3. (1) *$\mathcal{U}(\mathcal{G}_{MTM})$ 自身を graded left $\mathcal{U}(\mathcal{G}_{MTM})$-module と見たとき、これに対応する $MTM_{\mathbf{Z}}$ は上で構成した $\mathbf{U}$ と一致する。とくに $\omega_{gr}(\mathbf{U}) = \mathcal{U}(\mathcal{G}_{MTM})$ である。*

(2) *graded left* $\mathcal{U}(\mathcal{G}_{MTM})$*-module* $M = \hat{\oplus} M_i$ に対して $\mathbf{Q}^\times$ の作用を M_i 上では λ^{-i} 倍により定める。前の章で定義した $\widetilde{\mathbf{U}} = \mathbf{U} \otimes \mathbf{Q}((\mathbf{Q}(-1)))$ への $\mathcal{U}$ の作用を用いて $\widetilde{\mathbf{U}} \otimes_{\mathcal{U}} M$ を考えると $\mathbf{Q}^\times$ の *diagonal* な作用は $\widetilde{\mathbf{U}} \otimes_{\mathcal{U}} M$ への作用を誘導する。この作用を用いて M に対応する $MTM_{\mathbf{Z}}$ の *object* は

$$(\widetilde{\mathbf{U}} \otimes_{\mathcal{U}} M)^{\mathbf{Q}^\times}$$

により与えられる。ここで $\mathbf{Q}^\times$ は *diagonal* に作用するものとする。

7. BGL-bar complex

さて上で構成した $\mathbf{U}$ を用いれば、$\mathcal{U}(\mathcal{M}_{0,4})^{mot}$ によってすべての $MTM_{\mathbf{Z}}$ が生成される、ということを示すのに、$\mathbf{U}$ が GT-admissible であることを示せばよいことになる。これでもまだまだ問題が簡易化されたわけではないが、この章で考える BGL-bar complex を考えれば、$\mathbf{U}$ が GT-admissible であることを示すかわりに、BGL-bar complex が GT-admissible であればよいことになる。BGL-bar complex は $MTM_{\mathbf{Z}}$ 内で次の object と morphism で生成される subcategory に含まれる。

(1) Object としては、$GL_n/Spec(\mathbf{Z})$、$\mathbf{G}_m$ およびそれらの直積
(2) Morphism としては、
  (a) diagonal embedding $GL_n \to GL_{n+1}$,
  (b) direc sum $GL(V) \times GL(W) \to GL(V \oplus W)$,
  (c) tensor product $GL(V) \times GL(W) \to GL(V \otimes W)$,
  (d) product $GL(V) \times GL(V) \to GL(V)$, inverse $GL(V) \to GL(V)$ と
  (e) section $Spec(\mathbf{Z}) \to GL(V)$.

この章では BGL-bar complex $H^0(Bar(\omega_{gr} \mid C_\bullet(LBGL(\mathbf{Z}))) \mid Ch^\bullet_{mot})$ および morphism

$$H^0(Bar(\omega_{gr} \mid C_\bullet(LBGL(\mathbf{Z})) \mid Ch^\bullet_{mot})) \to \mathbf{U}$$

を述べる。ここでは証明は述べないが、この morphism は surjective であることが示せる。

まず、古典的な higher Chern class map の定義とその Levine による積構造を思い出そう。$BGL_n/\mathbf{Z}$ とは semi-simplicial scheme で次の様な図式で与えられた。

$$\cdots \xrightarrow{\partial_0,\partial_1,\partial_2,\partial_3} GL_n^{\times 3}/\Delta(GL_n) \xrightarrow{\partial_0,\partial_1,\partial_2} GL_n^{\times 2}/\Delta(GL_n) \xrightarrow{\partial_0,\partial_1} GL_n^{\times 1}/\Delta(GL_n)$$

ここで $(BGL_n)_i = BGL_n^{\times(k+1)}/\Delta(GL_n)$ で $\Delta(GL_n)$ は GL_n の diagonal image である。これに対して二つの $\mathbf{Q}$-complex が定義される。ひとつは $C_\bullet(BGL_n(\mathbf{Z}))$ で各成分は

$$C_i(BGL_n(\mathbf{Z})) = \oplus_{g \in (BGL_n)_i(\mathbf{Z})} \mathbf{Q}$$

で与えられる。もうひとつは $\underline{Hom}^\bullet(\mathbf{Q}_{BGL_n}, \mathbf{Q}_S)$ でこれは

$$\cdots \underline{Hom}^\bullet(\mathbf{Q}_{(BGL_n)_2}, \mathbf{Q}_S) \to \underline{Hom}^\bullet(\mathbf{Q}_{(BGL_n)_1}, \mathbf{Q}_S) \to \underline{Hom}^\bullet(\mathbf{Q}_{(BGL_n)_0}, \mathbf{Q}_S) \to$$

の associated simple complex である。$C_i(BGL_n(\mathbf{Z})) \to \underline{Hom}^\bullet(\mathbf{Q}_{(BGL_n)_i}, \mathbf{Q}_S)$ なる homomorphism より

$$C_\bullet(BGL_n(\mathbf{Z})) \to \underline{Hom}^\bullet(\mathbf{Q}_{BGL_n}, \mathbf{Q}_S)$$

なる homomorphism が定まる。ここで n に関する inductive limit をとり、両辺の i 次 cohomology をとれば、$H_i(BGL(\mathbf{Z}), \mathbf{Q}) \to Ext^{-i}(\mathbf{Q}_S, \mathbf{Q}[[c_1, c_2, \dots]]^*)$ なる写像を得る。ここで $c_k = \mathbf{Q}_S(-k)[-2k]$,$*$ は dual である。Chern character map

$$Ch^\bullet : \oplus_k \mathbf{Q}_S(-k)[-2k] \to \mathbf{Q}[[c_1, c_2, \dots]]$$

の dual を compose して、

$$H^{-i}(Ch^\bullet) : Ext^{-i}(\mathbf{Q}_S, \mathbf{Q}[[c_1, c_2, \dots]]^*) \to \oplus_k Ext^{-i}(\mathbf{Q}_S, \mathbf{Q}_S(k)[2k])$$

さらに Hurewiz map と plus construction の map を合成して $\pi_i(BGL(\mathbf{Z})^+) \to H_i(BGL(\mathbf{Z})^+) \simeq H_i(BGL(\mathbf{Z}))$ なる map が得られるので、

$$K_i(\mathbf{Z}) = \pi_i(BGL(\mathbf{Z})^+) \to \oplus_k Ext^{2k-i}(\mathbf{Q}_S, \mathbf{Q}_S(k))$$

を得る。K 群の方には Loday product, Ext の方には Bloch cycle complex の積構造が入るが、Chern character が BGL cohomology の coalgebra structure に関して algebra like element であることから、二つの積構造は一致する。Loday product に対応するものを motivic に構成することにより、BGL のほうでも Bar complex を構成する。

Loday product を復習しよう。$BGL(\mathbf{Z})^+$ は BQM の loop space ΩBQM と homotopy equivalent なので、loop sum により加法 $\oplus$ が定義される。この加法に関する引き算を $\ominus$ と書く。さらに tensor product より誘導される積の写像 $GL_n(\mathbf{Z}) \times GL_m(\mathbf{Z}) \to GL_{nm}(\mathbf{Z})$ により誘導される $BGL(\mathbf{Z})^+ \times BGL(\mathbf{Z})^+ \to BGL(\mathbf{Z})^+$ を $*$ であらわす。このとき $\mu : BGL(\mathbf{Z})^+ \times BGL(\mathbf{Z})^+ \to BGL(\mathbf{Z})^+$ を

$$\mu(x, y) = (x * y) \ominus (id * y) \ominus (x * id) \oplus (id * id)$$

と定義すると、$* \times BGL(\mathbf{Z}) \cup BGL(\mathbf{Z}) \times *$ が可縮なので

$$BGL(\mathbf{Z})^+ \wedge BGL(\mathbf{Z})^+ \to BGL(\mathbf{Z})^+$$

なる写像が定義される。さらにその homotopy を考えることにより

$$K_i(\mathbf{Z})_\mathbf{Q} \times K_j(\mathbf{Z})_\mathbf{Q} \to K_{i+j}(\mathbf{Z})_\mathbf{Q}$$

を得る。これが Loday product である。simplicial set $BGL(\mathbf{Z})$ はある simplicial scheme の $\mathbf{Z}$-valued point となるが、$BGL(\mathbf{Z})^+$ を simplicial scheme の $\mathbf{Z}$-valued point となるようにするのは困難である。さらに loop product は up to homotopy で定まっているのでこの積を up to homotopy でひとつ固定したとき、associativity は up to homotopy でしか期待できない。ひとつの解決策として Kan completion を考えることが考えられるが、かなり複雑になりそうなので（simplicial scheme の Kan completion も考えるのは面白とおもうが)、ここではひとまずおいておいて、BGL で BGL^+ を近似することにする。このとき loop sum は simplicial scheme の morphism によって表現されていることを考えると、loop inverse をどうあらわすか、というのが問題となる。ところがこれは virtual に loop inverse を付け加えるこのにより、(ちょうど自然数の集合から、整数の集合を構成する時のように、）ほしいものが構成される。ただ

し Loday product の motivic な類似が associative にはならない事が常につきまとう。しかし構成法がきわめて constructible であるために、associativity のくい違いは補正することができる。さらにこの構成法は GL_n の diagonal torus T_n に対しても functorial に構成され、T_n には対称群 $\mathbf{S}_n$ の作用が定義されるので Chern character なども定義される。

最後に Loop inverse が定義されるように $BGL/Spec\mathbf{Z}$ を modify する構成法について述べよう。以下 simplicial scheme, simplicial scheme の simplicial object,... という具合になっていくがそこのところは技術的なのであいまいに simplicial scheme と書くことにする。いま $f : X \to Y, g : Z \to Y$ を space の map としたとき、X と Z の Y 上の homotopy fiber product を

$$X \overset{h}{\times}_Y Z = \{(x, z, \gamma) \in X \times Z \times P(Y) \mid \gamma(0) = f(x), \gamma(1) = g(z)\}$$

と定義するここで、$P(Y)$ は Y の path の空間である。$BGL(\mathbf{Z})^+$ は loop space なので homotopy fiber

$$LBGL(\mathbf{Z})^+ := (BGL(\mathbf{Z})^+ \times BGL(\mathbf{Z})^+) \overset{h}{\times}_{BGL(\mathbf{Z})^+} \{*\}$$

は $BGL(\mathbf{Z})^+$ と homotopy 同値となる。ここで $\oplus : BGL(\mathbf{Z})^+ \times BGL(\mathbf{Z})^+ \to BGL(\mathbf{Z})^+$ は loop sum で与えられる map でこれはまた直和から与えられる群の準同型 $GL(\mathbf{Z}) \times GL(\mathbf{Z}) \to GL(\mathbf{Z})$ から誘導されるものと一致している。さらに $BGL(\mathbf{Z})^+$ は $\mathbf{Q}$-simply connected なので Eilenberg-Moore theorem により、$LBGL(\mathbf{Z})^+$ の singular cochain は bar cosimplicial space と呼ばれる次の cosimplicial space の simplicial singular cochain と quasi-isomorphic になる。記号を単純化するために、$A^+ = BGL(\mathbf{Z})^+ \times BGL(\mathbf{Z})^+$, $B^+ = BGL(\mathbf{Z})^+$, $C^+ = \{*\}$ とおく。自然数 n を fix して $\tau \in \Delta^n$ に対して space $LBGL(\mathbf{Z})^+_\tau$ を定める。たとえば、$\tau = (b12 \mid 34 \mid 5 \mid 6e)$ の場合、

$$LBGL(\mathbf{Z})^+_\tau = A^+_{b12} \times B^+_{34} \times B^+_5 \times C^+_{6e}$$

である。ここで A^+_{b12} は A^+ のコピー、等等である。τ を動かすと cosimplicial space が得られる。これが bar cosimplicial space である。さてここで自然は写像 $BGL(\mathbf{Z}) \to BGL(\mathbf{Z})^+$ は singular cochain の quasi-isomorphism を引き起こすことを考えよう。$A = BGL(\mathbf{Z}) \times BGL(\mathbf{Z})$, $B = BGL(\mathbf{Z})$, $C = \{*\}$ として、

$$LBGL(\mathbf{Z})_\tau = A_{b12} \times B_{34} \times B_5 \times C_{6e}$$

と定義することにより、$LBGL(\mathbf{Z})$ という cosimplicial space が同様に定まる。また自然な写像

$$C_\bullet(LBGL(\mathbf{Z})) \to C_\bullet(LBGL(\mathbf{Z})^+)$$

は quasi-isomorphism となる。さらに $LBGL(\mathbf{Z})$ には自然に underlying simplicial set の構造が入っていて、それは上の構成法からある simplicial scheme $LBGL/Spec\mathbf{Z}$ の $\mathbf{Z}$-valued point になっている。また $A = BGL(\mathbf{Z}) \times BGL(\mathbf{Z})$ で二つの成分を入れ替える写像は $LBGL(\mathbf{Z})$ の involution をあたえている。これを $\ominus$ の代わりとして用いて、Loday product を simplicial scheme のレベルで構成することができることになる。

8. まとめ及び主結果、予想

前の章では simplicial scheme $LBGL$ を定義した。$LBGL$ に対しても二つの complex $C_\bullet(LBGL(\mathbf{Z}))$, $\underline{Hom}^\bullet(\mathbf{Q}_{LBGL}, \mathbf{Q}_S)$ がさだまり、

$$C_\bullet(LBGL(\mathbf{Z})) \to \underline{Hom}^\bullet(\mathbf{Q}_{LBGL}, \mathbf{Q}_S) \text{“} \overset{Ch^\bullet_{mot}}{\to} \text{”} \underline{Hom}^\bullet(\mathbf{Q}_S, \mathbf{Q}_S(k)[2k])$$

なる complex の morphism が定まる。最後の morphism ”$\to$” はすこし微妙な問題を含んでいるが、ここでは触れないことにする。$C_\bullet(LBGL(\mathbf{Z}))$ の Loday product をもちいて前々章と同様の構成をすることにより

$$H^0(Bar(\omega_{gr} \mid C_\bullet(LBGL(\mathbf{Z})) \mid Ch^\bullet_{mot})$$

なる $MTM_{\mathbf{Z}}$ の object が構成される。また $C_\bullet(LBGL(\mathbf{Z}))$ の Loday product と $\underline{Hom}^\bullet(\mathbf{Q}_S, \mathbf{Q}_S(k)[2k])$ の cycle complex の積とは compatible であることから、

$$H^0(Bar(\omega_{gr} \mid C_\bullet(LBGL(\mathbf{Z})) \mid Ch^\bullet_{mot})) \to \mathbf{U} \tag{8.1}$$

なる射が定義される。主結果は次のように述べられる。

定理 8.1. *8.1* は全射である。従って $H^0(Bar(\omega_{gr} \mid C_\bullet(LBGL(\mathbf{Z})) \mid Ch^\bullet_{mot}))$ の *etale realization* への *Galois* 群の作用が *Grothendieck-Teichmuller* 群を *factor* すれば、*Deligne-Ihara* 予想の *injectivity* が成立する。

最後に予想を述べて報告を終えることにしよう。

予想 8.2. $H^0(Bar(\omega_{gr} \mid C_\bullet(LBGL(\mathbf{Z})) \mid Ch^\bullet_{mot}))$ の *etale realization* への *Galois* 群の作用は *Grothendieck-Teichmuller* 群を *factor* して作用する。

References

[DG] Deligne,P.-Goncharov,A.B., Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte, preprint in matharchive: http://xxx.lanl.gov, math.NT/0302267

[L] Levine,M., Mixed Motifes, Mathematical surveys and Monographs, (1998),AMS