On indecomposable totally reflexive modules

高橋　亮*
（明治大学理工学部数学科）

0　はじめに

全反射加群（totally reflexive module）は，射影加群と Gorenstein 局所環上の極大 Cohen-Macaulay 加群の共通の一般化にあたる有限生成加群である。Auslander-Bridger ([1, 3]) が 1960 年代に G 次元と呼ばれる不変量の概念を導入・展開したが，全反射加群は G 次元の値が 0 である加群のことである。Avramov-Martsinkovsky-Holm の定理（[5, 11]）により，G 次元が有限値をとる加群 M はみな $0 \to Y \to X \to M \to 0$（ただし X は全反射加群で Y は射影次元が有限の加群）という形の短完全系列をもつので，G 次元が有限の加群の理解は全反射加群の理解に帰着する。また，1990 年代に Enochs-Jenda（[8]）が定義した G 射影加群は，全反射加群の無限生成加群への拡張である。（有限生成 G 射影加群は全反射加群のことである。）彼らは G 入射加群，G 平坦加群という加群も定義し，これらが射影加群，入射加群，平坦加群の間の関係と類似する性質をもつことを見出し，さらに鎖複体への拡張も行っている。一方で Jørgensen（[14]）は G 射影加群に関する相対 Ext 加群が well-defined であることを示している。この一連の概念は“Gorenstein homological algebra”と呼ばれている。このように全反射加群はそれのもつ性質において近年注目を集めているが，Gorenstein でない環の場合は，射影的でない全反射加群が存在するか否かを判定する方法もまだ見出されていない。それどころか，非自明な全反射加群が存在するような非 Gorenstein 環の例を構成することですら容易ではない。このような現況の下，本稿では全反射加群がどれぐらい存在するかということについて考察する。

* *E-mail:* takahasi@math.meiji.ac.jp

1　定義と例

以下，R を可換な Noether 局所環とし，$\mathfrak{m}$ を R のただ一つの極大イデアル，k を R の剰余体，すなわち $k = R/\mathfrak{m}$ とする。また $\mathrm{mod}\, R$ を有限生成 R 加群の圏とする。まず，全反射加群の定義から始める。

定義 1.1. $(-)^* = \mathrm{Hom}_R(-, R)$ とおく。有限生成 R 加群 M は次の二条件をみたすとき，**全反射的**であるという。

(1) 自然な準同型 $M \to M^{**}$ が同型，すなわち M は反射的である。

(2) $\mathrm{Ext}_R^{>0}(M \oplus M^*, R) = 0$ である。

全反射 R 加群全体のなす $\mathrm{mod}\, R$ の充満部分圏を $\mathcal{G}(R)$ で表す。定義からすぐわかることとして，

注意 1.2. (1) 任意の有限生成自由加群は全反射的である。

(2) R が Gorenstein 環ならば，有限生成 R 加群が全反射的であることと極大 Cohen-Macaulay であることは同値である。

与えられた加群が全反射的かどうかを判断するには，次の命題が基本的である。

命題 1.3. [7] 有限生成 R 加群 M に対して次の二条件は同値である。

(1) M は全反射的である。

(2) 自由加群の鎖複体

$$F_\bullet = (\cdots \xrightarrow{d_2} F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{d_0} F_{-1} \xrightarrow{d_{-1}} F_{-2} \xrightarrow{d_{-2}} \cdots)$$

で，

(i) $F_\bullet$ と $(F_\bullet)^* = \mathrm{Hom}_R(F_\bullet, R)$ はホモロジーがない（すなわち完全系列）

(ii) M は d_1 の余核

となるものが存在する。

上記の命題の条件 (2) をみたすような鎖複体 $F_\bullet$ は M の**完全（自由）分解**と呼ばれる。

ここで，いくつか全反射加群の例を与える。注意 1.2 より，Gorenstein 局所環上では全反射加群は極大 Cohen-Macaulay 加群のことなのでたくさん例がある。たとえば R が Artin Gorenstein 環ならば任意の有限生成 R 加群が全反射的である。そこで以下では Gorenstein でない環上の全反射加群の例をあげる。

例 1.4. k を体とする。

(1) $R = k[[x,y,z]]/(x^2, xy, y^2, z^2)$ とおく。このとき R は Artin かつ非 Gorenstein である。$M = R/zR$ とおくと，M は完全分解

$$\cdots \xrightarrow{z} R \xrightarrow{z} R \xrightarrow{z} \cdots$$

をもつので，全反射的である。また，

$$A = \begin{pmatrix} x & z \\ -z & y \end{pmatrix}, \quad B = \widetilde{A} = \begin{pmatrix} y & -z \\ z & x \end{pmatrix}$$

とおき，A と B の余核をそれぞれ N, L とおくと，

$$\cdots \xrightarrow{A} R^2 \xrightarrow{B} R^2 \xrightarrow{A} R^2 \xrightarrow{B} \cdots$$

は N と L の完全分解になるので，N と L は全反射的である。

(2) free rank が一定でないような完全分解をもつ全反射加群もある。$R = k[[x,y,z,w]]/(x^2, xz - y^2, xw - yz, yw - z^2, w^2)$ とおく。この R も Artin かつ非 Gorenstein である。$M = R/(x,w)$ とおくと，M は完全分解

$$\cdots \xrightarrow{A_3} R^3 \xrightarrow{A_2} R^2 \xrightarrow{A_1} R \xrightarrow{A_0} R \xrightarrow{{}^tA_1} R^2 \xrightarrow{{}^tA_2} R^3 \xrightarrow{{}^tA_3} \cdots$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} xw \end{pmatrix}, \qquad A_1 = \begin{pmatrix} x & w \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} x & 0 & w \\ 0 & w & -x \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} x & 0 & w & 0 \\ 0 & w & 0 & x \\ 0 & 0 & -x & w \end{pmatrix}, \quad \cdots$$

をもつので全反射的である。

（今はたまたま $M \cong M^*$ なので完全分解の free rank が対象になっているが，一般にはそうはならない。たとえば $S = k[[s, t]]$ の部分環 $R = k[[s^3, s^4, s^5, t^4, t^5, t^6]]$ においてイデアル $M = (t^4, t^5, t^6)R$ の完全分解は free rank が対象にならない。）

(3) Gorenstein でない整閉整域上でも全反射加群はある。$S = k[[x^3, x^2y, xy^2, y^3]] \subseteq k[[x, y]]$，$T = k[[z^2, zw, w^2]] \subseteq k[[z, w]]$ とし，$R = S\widehat{\otimes}_k T = k[[x^3, x^2y, xy^2, y^3, z^2, zw, w^2]] \subseteq k[[x, y, z, w]]$ とおく。このとき R は 4 次元 Cohen-Macaulay 整閉整域で，Gorenstein ではない。M を勝手な T 上の極大 Cohen-Macaulay 加群とすると，R 加群 $R \otimes_T M$ は全反射的である。

（この構成法では基礎環は必ず 4 次元以上になるが，渡辺敬一氏との共同研究で，代数閉体上の任意の種数 2 以上の滑らかな射影曲線から，2 次元の Gorenstein でない Cohen-Macaulay 整閉整域とその上の自由でない全反射加群を構成する方法を与えている。詳しくは [23] を見てほしい。）

2 有限 Cohen-Macaulay 表現型との関連

$\mathrm{mod}\, R$ の充満部分圏 $\mathcal{X}$ に対し，$\mathrm{ind}\,\mathcal{X}$ と書いて $\mathcal{X}$ に属する直既約 R 加群の同型類の集合を表す。また，$\mathrm{CM}(R)$ で極大 Cohen-Macaulay 加群全体のなす $\mathrm{mod}\, R$ の充満部分圏を表す。まず次の定義を思い出す。

定義 2.1. R を Cohen-Macaulay 局所環とする。$\mathrm{ind}\,\mathrm{CM}(R)$ が有限集合のとき，R は**有限 Cohen-Macaulay 表現型**と呼ばれる。同様に，$\mathrm{ind}\,\mathrm{CM}(R)$ が可算集合のとき，R は**可算 Cohen-Macaulay 表現型**と呼ばれる。

次の Buchweitz-Greuel-Herzog-Knörrer-Schreyer の定理は，有限 Cohen-Macaulay 表現型の Cohen-Macaulay 環に関する主結果の一つである。

定理 2.2. [10, 9, 15, 6] k を標数 0 の代数閉体とし，R を k を含む完備 Gorenstein 局所環とする。R は有限 Cohen-Macaulay 表現型であると仮定する。このとき $R = k[[x, y, z_2, z_3, \dots, z_d]]/(f)$ と書けて，f は次のいずれかである。

(A_n) $\quad x^2 + y^{n+1} + z_2^2 + z_3^2 + \cdots + z_d^2 \quad (n \geq 1)$

(D_n) $\quad x^2y + y^{n-1} + z_2^2 + z_3^2 + \cdots + z_d^2 \quad (n \geq 4)$

(E_6) $\quad x^3 + y^4 + z_2^2 + z_3^2 + \cdots + z_d^2$

(E_7) $\quad x^3 + xy^3 + z_2^2 + z_3^2 + \cdots + z_d^2$

(E_8) $\quad x^3 + y^5 + z_2^2 + z_3^2 + \cdots + z_d^2$

さらに，$\mathrm{ind}\,\mathcal{G}(R) = \mathrm{ind}\,\mathrm{CM}(R)$ に属する加群が完全に分類できる。

このように Gorenstein で $\mathrm{ind}\,\mathcal{G}(R)$ が有限集合になる環 R についてはよくわかっている。そこで，Gorenstein でない場合はどうか？そもそもそのような環があるのか？という疑問が生じる。すべての全反射加群が自由加群になる場合（たとえば R が Gorenstein でない Golod 環の場合）は $\mathrm{ind}\,G(R) = \{R\}$ なので $\mathrm{ind}\,\mathcal{G}(R)$ は有限集合であるが，そのような自明なケース以外には無いように思われる：

予想 2.3. R を非 Gorenstein 局所環とし，自由加群でない全反射加群 X が存在すると仮定する。このとき $\mathrm{ind}\,\mathcal{G}(R)$ は無限集合である。

この予想の根拠となる結果を説明するために少し準備をする。

定義 2.4. $\mathcal{X}$ を $\mathrm{mod}\,R$ の充満部分圏とする。

(1) $\phi : X \to M$ を $X \in \mathcal{X}$ から $M \in \mathrm{mod}\,R$ への R 加群準同型とする。任意の準同型 $\phi' : X' \to M$（$X' \in \mathcal{X}$）が ϕ を経由するとき（すなわち $\mathrm{Hom}_R(X', \phi) : \mathrm{Hom}_R(X', X) \to \mathrm{Hom}_R(X', M)$ が全射のとき），ϕ を M の**右 $\mathcal{X}$ 近似**という。

(2) 任意の有限生成 R 加群が右 $\mathcal{X}$ 近似をもつとき，$\mathcal{X}$ は（$\mathrm{mod}\,R$ の中で）**反変有限**であるという。

注意 2.5. $\mathcal{X}$ を $\mathrm{mod}\,R$ の充満部分圏とし，加法的に閉じているとする。すなわち有限直和と直和因子をとる操作で閉じているものとする。このときもし $\mathrm{ind}\,\mathcal{X}$ が有限集合ならば，$\mathcal{X}$ は反変有限である。実際，$\mathrm{ind}\,\mathcal{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ と書き，$X = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n$ とおく。M を任意の有限生成 R 加群とし，$\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m$ を R 加群 $\mathrm{Hom}_R(X, M)$ の生成系とすると，

$$(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m) : X^{\oplus m} \longrightarrow M$$

は M の右 $\mathcal{X}$ 近似となることが容易にわかる。

さて，予想 2.3 を modify して次の予想をたてる。

予想 2.6. 非自由な $X \in \mathcal{G}(R)$ が存在するとする。このとき $\mathcal{G}(R)$ が反変有限ならば，R は Gorenstein 環である。

注意2.5より，予想2.6は予想2.3よりも強い。予想2.6について次の結果を得ている。

定理 2.7. [18, 19, 20] R を Hensel とし，深度が 2 以下（たとえば Krull 次元が 2 以下）であるとする。このとき予想2.6は正しい。したがって予想2.3も正しい。つまり，R が Gorenstein でない Hensel 局所環で深度が 2 以下ならば，非自由な全反射 R 加群が一つでもあれば非同型な直既約全反射 R 加群が無限個ある。

Auslander-Buchweitz の Cohen-Macaulay 近似定理（[4]）は Gorenstein 環に対しては「Gorenstein 局所環上では，極大 Cohen-Macaulay 加群の圏，すなわち全反射加群の圏は反変有限である」という主張であるが，定理2.7は，R が非自由な全反射加群をもつ深度 2 以下の Hensel 局所環ならば，この主張の逆も成り立つことを意味している。

さて，予想2.3を別方向から考える。$\operatorname{Sing} R$ を R の特異軌跡とする。すなわち，

$$\operatorname{Sing} R = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid R_{\mathfrak{p}} \text{は正則でない}\}$$

定理 2.8. [2, 16, 12] R を Cohen-Macaulay 局所環とし，有限 Cohen-Macaulay 表現型であるとする。このとき R は高々孤立特異点である。すなわち，$\operatorname{Sing} R \subseteq \{\mathfrak{m}\}$ である。

この定理は，R が完備のときに Auslander が示し，R が優秀環のときに Leuschke-Wiegand が示し，R が一般のときに Huneke-Leuschke が示した。Huneke-Leuschke の証明から次がわかる。

補題 2.9. $\operatorname{ind} \mathcal{G}(R)$ が有限集合のとき，任意の $M \in \mathcal{G}(R)$ と任意の $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R - \{\mathfrak{m}\}$ に対して $R_{\mathfrak{p}}$ 加群 $M_{\mathfrak{p}}$ は自由加群である。

この補題を利用して次を示すことができる。

定理 2.10. [21] R が Hensel で X が巡回加群ならば予想2.3は正しい。つまり，R が Hensel 非 Gorenstein で非自由巡回全反射加群が一つでもあれば，直既約な全反射 R 加群の同型類が無限個ある。

例 2.11. (1) 例 1.4 の (1)(2) の環 R については，定理 2.7 または定理 2.10 により，直既約な全反射加群の同型類が無限個存在する。

(2) 例 1.4 の (1) の環 $R = k[[x, y, z]]/(x^2, xy, y^2, z^2)$ について，k が無限体ならば以下のようにして具体的に無限個の非同型な全反射加群を構成することができる。

元 $a, b \in k$ に対し，$M_{a,b} = R/(z + ax + by)$ とおく。このとき，

$$\cdots \xrightarrow{z+ax+by} R \xrightarrow{z-ax-by} R \xrightarrow{z+ax+by} \cdots$$

は $M_{a,b}$ の完全分解になるので，$M_{a,b}$ は全反射加群である。よって k が無限体ならば $\{M_{a,b}\}_{a,b\in k}$ は無限個の互いに非同型な直既約全反射 R 加群となる。（しかし (1) は k が有限体でも非同型な直既約全反射 R 加群が無限個あると言っている。）

3 可算 Cohen-Macaulay 表現型との関連

1980 年代に Schreyer は可算 Cohen-Macaulay 表現型の Cohen-Macaulay 局所環について次の予想を提示した。

予想 3.1. [17] R を解析的な Cohen-Macaulay 局所 $\mathbb{C}$ 代数（たとえば $\mathbb{C}$ 上のべき級数環の準同型像であるような Cohen-Macaulay 環）とし，可算 Cohen-Macaulay 表現型であるとする。このとき，$\operatorname{Sing} R$ の次元は 1 以下である。すなわち任意の $\mathfrak{p} \in \operatorname{Sing} R$ に対して $\dim R/\mathfrak{p} \leq 1$ である。

Huneke-Leuschke は数年前に次の定理を証明した。

定理 3.2. [13] R を Cohen-Macaulay 局所優秀環とし，可算 Cohen-Macaulay 表現型であるとする。また，R が完備であるか，剰余体 k が非可算集合であると仮定する。このとき $\operatorname{Sing} R$ は 1 次元以下である。

すなわち，これは上記の Schreyer の予想は肯定的に解決する結果である。Huneke-Leuschke の証明を整理すると，加群の同型類の集合 $\operatorname{ind} \mathrm{CM}(R)$ の可算性を素イデアルの集合 $\operatorname{Sing} R$ の可算性に読み替えていることがわかる。そこで同様に $\operatorname{ind} \mathcal{G}(R)$ の可算性を素イデアルの集合の可算性に読み替えることを考える。

$$W(R) = \left\{ \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \;\middle|\; \begin{array}{l} M_{\mathfrak{p}} \text{が } R_{\mathfrak{p}} \text{上非自由であるような} \\ M \in \mathcal{G}(R) \text{ が存在する} \end{array} \right\}$$

$$W^0(R) = \{\mathfrak{p} \in W(R) \mid \mathfrak{p} \text{ が } R \text{ 上の正則元を含む}\}$$

とおく。

定理 3.3. R が完備であるか，剰余体 k が非可算集合であるとする。$\mathrm{ind}\,\mathcal{G}(R)$ は可算集合であると仮定する。このとき

(1) 任意の $\mathfrak{p} \in W^0(R)$ に対して $\dim R/\mathfrak{p} \leq 1$ が成り立つ。

(2) R が Serre の (S_1) 条件をみたすならば，任意の $\mathfrak{p} \in W(R)$ に対して $\dim R/\mathfrak{p} \leq 1$ が成り立つ。

有限生成 R 加群 M に対し，$\mathrm{NF}(M)$ で M の非自由軌跡を表す。すなわち

$$\mathrm{NF}(M) = \{\, \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, R \mid M_{\mathfrak{p}} \text{は } R_{\mathfrak{p}} \text{上非自由} \,\}$$

これは $\mathrm{Spec}\, R$ の閉部分集合になる。定理 3.3 の証明のキーとなるのが次の補題である。

補題 3.4. 任意の $\mathfrak{p} \in W^0(R)$ に対し $\mathrm{NF}(M) = V(\mathfrak{p})$ となる $M \in \mathcal{G}(R)$ が存在する。

この補題より $W^0(R)$ は R のイデアルの集合

$$\left\{ \sqrt{\mathrm{Ann}\,\mathrm{Ext}^1(X,Y)} \;\middle|\; X, Y \in \mathrm{ind}\,\mathcal{G}(R) \right\}$$

の部分集合になることがわかる。$\mathrm{ind}\,\mathcal{G}(R)$ が可算集合ならばこの集合も可算なので，$W^0(R)$ も可算となる。こうして定理 3.3 の (1) がしたがう。(2) も同様にして示される。

注意 3.5. 定理 3.3 は実際はもう少し一般化された形で書けて，Gorenstein 環の準同型像という弱い仮定のもとに上記の Huneke-Leuschke の定理を含む。詳しくは [22] を見よ。

最後に非可算個の非同型な直既約全反射加群をもつ環の例をいくつか与える。

例 3.6. [22]

(1) k を体とし，$R = k[[x,y,z,w]]/(x^2, yz, yw)$ とおく。このとき R は完備局所環で，$\dim R = 2$，$\mathrm{depth}\, R = 1$ なので Cohen-Macaulay ではないが，(S_1) 条件はみたしている。$M = R/xR$ とおくとこれは全反射 R 加群である。$\mathfrak{p} = (x,y)R$ は R の素イデアルで，$M_{\mathfrak{p}}$ は $R_{\mathfrak{p}}$ 上自由ではないので，$\mathfrak{p}$ は $W(R)$ に属する。しかし $\dim R/\mathfrak{p} = 2$ なので，定理 3.3 より $\mathrm{ind}\,\mathcal{G}(R)$ は非可算集合である。

(2) S を深度が正の完備局所環とし，$R = S[[x,y,z]]/(x^2)$ とおく。$\mathfrak{n}$ を S の極大イデアルとし，$\mathfrak{p} = \mathfrak{n}R + xR$ とおくと f は R の素イデアルで，$\dim R/\mathfrak{p} = 2$ である。S は深度が正なので S 上の正則元 $f \in \mathfrak{n}$ が存在し，R は S 上忠実平坦なのでこれは R 上の正則元でもある。したがって $\mathfrak{p}$ は R 上の正則元を含む。$M = R/xR$ とおくとこれは全反射 R 加群で，$R_\mathfrak{p}$ 加群 $M_\mathfrak{p}$ は自由でないので，$\mathfrak{p}$ は $W^0(R)$ に属する。よって定理 3.3 より，$\operatorname{ind}\mathcal{G}(R)$ は非可算集合である。

(3) S を体でない完備局所整域とし，$R = S[[x,y,z]]/(x^2)$ とおく。このとき (2) より直既約全反射 R 加群の同型類が非可算個あることがわかるが，ここではそのような加群を具体的に構成してみる。

$f \in S[[z]] \subseteq R$ に対し，$\mathfrak{p}^f = (x, y - zf)R$ とおく。$\mathfrak{p}^f$ は R の素イデアルで，R 加群として直既約かつ全反射であることがわかる。また $\mathrm{NF}(\mathfrak{p}^f) = V(\mathfrak{p}^f)$ であり，$\mathfrak{p}^f = \mathfrak{p}^g$ ならば $f = g$ である。よって，相異なる二元 $f, g \in S[[z]]$ に対し，$\mathfrak{p}^f$ と $\mathfrak{p}^g$ は互いに非同型な直既約全反射 R 加群である。言い換えれば写像 $S[[z]] \ni f \mapsto \mathfrak{p}^f \in \operatorname{ind}\mathcal{G}(R)$ は単射である。$S[[z]]$ は非可算集合なので，集合 $\{\mathfrak{p}^f\}_{f \in S[[z]]}$ も非可算である。こうして，非可算個の互いに同型でない直既約全反射加群が得られた。

参考文献

[1] Auslander, M. Anneaux de Gorenstein, et torsion en algèbre commutative. Séminaire d'Algèbre Commutative dirigé par Pierre Samuel, 1966/67. Texte rédigé, d'après des exposés de Maurice Auslander, Marquerite Mangeney, Christian Peskine et Lucien Szpiro. École Normale Supérieure de Jeunes Filles *Secrétariat mathématique, Paris* 1967.

[2] Auslander, M. Isolated singularities and existence of almost split sequences. *Representation theory, II (Ottawa, Ont., 1984)*, 194–242, Lecture Notes in Math., 1178, *Springer, Berlin*, 1986.

[3] Auslander, M.; Bridger, M. Stable module theory. Memoirs of the American Mathematical Society, No. 94 *American Mathematical Society, Providence, R.I.* 1969.

[4] Auslander, M.; Buchweitz, R.-O. The homological theory of maximal Cohen-Macaulay approximations. Colloque en l'honneur de Pierre Samuel (Orsay, 1987). *Mém. Soc. Math. France (N.S.)* No. 38 (1989), 5–37.

[5] Avramov, L. L.; Martsinkovsky, A. Absolute, relative, and Tate cohomology of modules of finite Gorenstein dimension. *Proc. London Math. Soc. (3)* **85** (2002), no. 2, 393–440.

[6] Buchweitz, R.-O.; Greuel, G.-M.; Schreyer, F.-O. Cohen-Macaulay modules on hypersurface singularities. II. *Invent. Math.* **88** (1987), no. 1, 165–182.

[7] Christensen, L. W. Gorenstein dimensions. Lecture Notes in Mathematics, 1747. *Springer-Verlag, Berlin*, 2000.

[8] Enochs, E. E.; Jenda, O. M. G. Gorenstein injective and projective modules. *Math. Z.* **220** (1995), no. 4, 611–633.

[9] Greuel, G.-M.; Knörrer, H. Einfache Kurvensingularitäten und torsionsfreie Moduln. *Math. Ann.* **270** (1985), no. 3, 417–425.

[10] Herzog, J. Ringe mit nur endlich vielen Isomorphieklassen von maximalen, unzerlegbaren Cohen-Macaulay-Moduln. *Math. Ann.* **233** (1978), no. 1, 21–34.

[11] Holm, H. Gorenstein homological dimensions. *J. Pure Appl. Algebra* **189** (2004), no. 1-3, 167–193.

[12] Huneke, C.; Leuschke, G. J. Two theorems about maximal Cohen-Macaulay modules. *Math. Ann.* **324** (2002), no. 2, 391–404.

[13] Huneke, C.; Leuschke, G. J. Local rings of countable Cohen-Macaulay type. *Proc. Amer. Math. Soc.* **131** (2003), no. 10, 3003–3007.

[14] Jørgensen, P. Existence of Gorenstein projective resolutions and Tate cohomology. *J. Eur. Math. Soc.* (to appear).

[15] Knörrer, H. Cohen-Macaulay modules on hypersurface singularities. I. *Invent. Math.* **88** (1987), no. 1, 153–164.

[16] Leuschke, G.; Wiegand, R. Ascent of finite Cohen-Macaulay type. *J. Algebra* **228** (2000), no. 2, 674–681.

[17] Schreyer, F.-O. Finite and countable CM-representation type. *Singularities, representation of algebras, and vector bundles (Lambrecht, 1985)*, 9–34, Lecture Notes in Math., 1273, *Springer, Berlin*, 1987.

[18] Takahashi, R. On the category of modules of Gorenstein dimension zero. II. *J. Algebra* **278** (2004), no. 1, 402–410.

[19] Takahashi, R. Modules of G-dimension zero over local rings of depth two. *Illinois J. Math.* **48** (2004), no. 3, 945–952.

[20] Takahashi, R. On the category of Gorenstein dimension zero. *Math. Z.* **251** (2005), no. 2, 249–256.

[21] Takahashi, R. On the number of indecomposable totally reflexive modules. Preprint (2005).

[22] Takahashi, R. An uncountably infinite number of indecomposable totally reflexive modules. Preprint (2005).

[23] Takahashi, R.; K.-i. Watanabe Totally reflexive modules constructed from smooth projective curves of genus $g \geq 2$. Preprint (2005).

[24] Yoshino, Y. Cohen-Macaulay modules over Cohen-Macaulay rings. London Mathematical Society Lecture Note Series, 146. *Cambridge University Press, Cambridge*, 1990.