p 進ゼータ関数とその数論的応用[1]

栗原　将人 (慶應義塾大学理工学部)

ゼータ関数と数論的対象物との関係を追求することは、整数論の中でも非常におもしろいテーマのひとつだが、数論的対象が各素数 p ごとの性質に分けられるとき、ゼータも p 進ゼータとして扱うほうがわかりやすいことが多い[2]。たとえば、代数体のイデアル類群は最も典型的な数論的対象物だが、有限アーベル群であるから、各素数 p ごとの p 成分の直和であり、各 p 成分がわかれば全体がわかる。各 p 成分の様子を詳しく調べるには、普通の複素ゼータではなく、p 進ゼータのほうが便利なのである。

もう少し詳しく書いてみよう。K を代数体 (有理数体 $\mathbf{Q}$ の有限次拡大)、O_K を整数環 ($\mathbf{Z}$ の整閉包) とするとき、K のイデアル類群 $Cl_K = \mathrm{Pic}\, O_K$ の位数 h_K は K のゼータ関数 (Dedekind zeta) の留数に現れる；

$$\mathrm{Res}_{s=1}\, \zeta_K(s) = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}}{w_K\sqrt{d_K}} h_K R_K$$

(w_K は K の中の 1 の冪根の数、d_K は判別式の絶対値、R_K は単数基準) というのが有名な Dirichlet-Kummer-Dedekind の類数公式である。しかしながら、類数公式の左辺はただの数だから、Cl_K の詳しい構造、たとえば $K/\mathbf{Q}$ を Galois 拡大とするとき、$\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$ の Cl_K への作用を普通のゼータ関数から知ることは難しい。

K を虚アーベル拡大とする。このとき、ゼータ関数は Dirichlet L 関数の積に分かれ、Cl_K も各指標成分に分けることができ、分解したものどうしを比べることができる。きちんと書くと、p を $[K:\mathbf{Q}]$ を割らない素数、A_K を Cl_K の元で位数が p 冪のもの全体がなす部分群、χ を $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$ の指標

[1] このタイトルを選んだときは、漠然と話したい方向があったのだが、その方向にはあまり進展がなかったので、このタイトルはあまり適切ではないかもしれない。

[2] しかしながら、p 進ゼータから p 以外の素数に関する情報がどのくらい得られるか、という問題もおもしろい問題だと思う。たとえば、素数が無限個あることの本質的に p 進的な証明はできないだろうか。p 進ゼータには Euler 積がないので、普通のゼータを使った Euler の証明と同じ方法はなかなか使えない。しかしながら、いくつかの素数の Euler 因子を除いた p 進ゼータを使えば、p 進ゼータも $s=1$ に極を持つことから Euler と同じに証明できる。しかしこれではおもしろくない。本質的に p 進的、と上に書いたのは、Dirichlet の算術級数定理 (上の方法だと p 進 L 関数は偶指標に対してしか存在しないので苦しい) やもっと深い素数についての性質 (もしできれば素数 p とからむような性質) に拡張して行けるような新しい証明方法がないだろうか、と思ってのことである。

で、odd ($\chi(-1)=-1$) であり、Teichmüller 指標 (1 の p 乗根への作用からできる指標) とは異なるものとする。$\mathbf{Z}_p$ を p 進整数環、$O_\chi=\mathbf{Z}_p[\mathrm{Image}\,\chi]$、$A_K^\chi$ で A_K の χ 成分を表す ($A_K^\chi=A_K\otimes_{\mathbf{Z}_p[\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})]}O_\chi$, ここに O_χ には $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$ は χ で作用)。関数等式から $\zeta_K(s)$ の $s=0$ での Taylor 展開の初項は $-h_KR_K/w_K$ であり、χ についての仮定から、R_K も w_K も χ 成分には影響しないと思われるのだが、実際に類数公式より詳しい

$$\#(O_\chi/L(0,\chi^{-1}))=\#A_K^\chi$$

($L(s,\chi)$ は Dirichlet の L 関数) が成り立つ。この式は Mazur と Wiles により、岩澤主予想が証明されたことにより、すなわち p 進ゼータを使うことにより、始めて証明されたのである (今では岩澤主予想を経由しない方法がいろいろあるが、やはり p 進的証明である)。

岩澤主予想は、上の公式の円分 $\mathbf{Z}_p$ 拡大版である。K_∞ を K の円分 $\mathbf{Z}_p$ 拡大 (K_∞ は K に 1 の p 冪乗根をすべて付け加えた体の部分体で $\mathrm{Gal}(K_\infty/K)=\mathbf{Z}_p$ となる唯一の中間体) とし、$X_{K_\infty}=\varprojlim A_{K_n}$ (A_{K_n} は K_∞/K の p^n 次の中間体 K_n のイデアル類群の p 成分であり、Norm による射影極限をとる) とおく。類体論により、X_{K_∞} は K_∞ の最大不分岐アーベル pro-p 拡大の Galois 群と一致する。$\mathrm{Gal}(K_\infty/K)$ の生成元の X_{K_∞} への作用からできる特性多項式と、p 進ゼータが modulo 単数で一致する、というのがほぼ岩澤主予想であり (後でもう少し詳しく述べる)、最初に Mazur と Wiles により証明された。

ここで、ゼータ関数の値が大事である、と考えると、Galois 群の作用と equivariant なゼータ関数を考え、その値がある種の数論的 (代数的) なもので表されている、という予想に進むことになる。ゼータ関数の特殊値に関する予想は、Beilinson 予想、Bloch Kato 予想、Kato 予想、Burns Flach の equivariant Tamagawa Number 予想 (ETNC) と進み、最近は非可換な Galois 拡大の場合も、加藤和也先生の稿で扱われていると思うが、たくさんの人たちによって扱われている。ETNC は Stark 予想、Rubin の予想、Chinburg の予想などさまざまな予想を含むゼータの値についてのもっとも詳しい予想である。

しかしながら、もともとの類数公式に戻って、イデアル類群(あるいはゼータの値と対応していた数論的対象物)が大事である、と考えたらどうだろうか。上のように岩澤主予想からわかるのは、特性多項式 (が生成するイデアル) やイデアル類群の χ 成分の位数でしかない。もっと深いイデアル類群についての情報は得られないのだろうか。ここでこれから述べるのは、もっと詳しい情報が (p 進) ゼータから得られる、ということのさわりの部分である。

一般に、可換環 R 上の有限表示加群 M に対し、

$$R^m\xrightarrow{f}R^n\longrightarrow M\longrightarrow 0$$

が R 加群の完全系列であるとき、M の r 次の Fitting イデアル $\mathrm{Fitt}_{r,R}(M)$ を、f に対応する行列 A_f の $n-r$ 次の小行列式全体で生成される R のイデアルとして定義する ($r \geq n$ に対しては、$\mathrm{Fitt}_{r,R}(M) = R$)。この定義は完全系列のとり方によらない。

K, χ を上の通り、$X_{K_\infty}^\chi$ を X_{K_∞} の χ 成分とすると、X_{K_∞} は $\Lambda_\chi = \mathbf{Z}_p[[\mathrm{Gal}(K_\infty/\mathbf{Q})]]^\chi = O_\chi[[\mathrm{Gal}(K_\infty/K)]]$ 加群である。このとき、p 進ゼータ $\theta_{K_\infty}^\chi$ は Λ_χ の元であり、Stickelberger 元 $\Sigma_{\sigma\in\mathrm{Gal}(K_n/\mathbf{Q})}\zeta(\sigma,0)\sigma^{-1}$ の χ 成分の射影極限として構成される。このときの岩澤主予想は、

$$\mathrm{Fitt}_{0,\Lambda_\chi}(X_{K_\infty}^\chi) = (\theta_{K_\infty}^\chi)$$

とも書くことができる。位数についての最初の式はもちろん

$$\mathrm{Fitt}_{0,O_\chi}(A_K^\chi) = (L(0,\chi^{-1})) = (\theta_K^\chi)$$

であり、両者とも Fitt_0 についての式であることがわかる。

これからいくつかの結果を述べていくが、まず、上では $[K:\mathbf{Q}]$ の位数が p と素であったが、p で割れる一般の場合でも ($p \neq 2$ に対し) X_{K_∞} のマイナス成分 $X_{K_\infty}^-$ について、$\mathrm{Fitt}_{0,\mathbf{Z}_p[[\mathrm{Gal}(K_\infty/\mathbf{Q})]]}(X_{K_\infty}^-)$ は p 進ゼータ (さまざまな体の Stickelberger 元からできる元) を使って書けることが証明できる (一般には単項イデアルにはならない)。

元に戻して、K, χ を上の通り、さらに $\chi(p) \neq 1$ とする。Fitt_0 だけでなく、すべての $r \geq 0$ に対して、$\mathrm{Fitt}_{r,\Lambda_\chi}(X_{K_\infty}^\chi)$ も p 進ゼータからできる元で生成されていることを証明できる。詳しく述べる。N を十分大きな正の整数とする。$\mathcal{S}$ を次のような条件をみたすアーベル体 F の集合とする。すなわち、F は K を含み、$[F:K]$ が p 巾、$F \cap K_\infty = K$ であり、さらに $\mathrm{Gal}(F/K) \simeq \mathbf{Z}/p^{n_1} \times ... \times \mathbf{Z}/p^{n_t}$ と書くとき、n_1,...,$n_t \geq N$ ($t \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ は任意)、をみたすようなアーベル体 F 全体の集合を $\mathcal{S}$ とする。$\mathrm{Gal}(F/K)$ のそれぞれの生成元を $1+S_1$,...,$1+S_t$ に対応させることにより、

$$\begin{aligned} O_\chi[[\mathrm{Gal}(F_\infty/K)]] &= \Lambda_\chi[\mathrm{Gal}(F/K)] \\ &\simeq \Lambda_\chi[S_1,...,S_t]/((1+S_1)^{p^{n_1}}-1,...,(1+S_t)^{p^{n_t}}-1) \end{aligned}$$

なる同型が得られるが、

$$\theta_{F_\infty}^\chi = \sum_{i_1,...,i_t\geq 0} \delta_{i_1,...,i_t} S_1^{i_1}...S_t^{i_t}$$

($\delta_{i_1,...,i_t} \in \Lambda_\chi$) と書いたとき、すべての $F \in \mathcal{S}$ についての

$$\{\delta_{i_1,...,i_t} \mid i_1+...+i_t \leq r, i_1 < p, ..., i_t < p\}$$

の像で生成される Λ_χ/p^N のイデアルを $\Theta_{r,(N)}^\chi$ と書くことにする ($\theta_{F_\infty}^\chi$ の表示によらずにこのイデアルは well defined, $i_j < p$ の仮定は煩雑な記号

を避けるためにおいた)。Λ_χ のイデアル Θ^χ_{r,K_∞} を $\Theta^\chi_{r,K_\infty} = \lim_{\leftarrow N} \Theta^\chi_{r,(N)}$ で定義する。$r=0$ のとき $\Theta^\chi_{0,K_\infty} = (\theta^\chi_{K_\infty})$ である。

この状況で、岩澤主予想は次のように精密化される；すべての $r \geq 0$ に対して、

$$\mathrm{Fitt}_{r,\Lambda_\chi}(X^\chi_{K_\infty}) = \Theta^\chi_{r,K_\infty}$$

が成り立つ。

この定理を使えば、たとえば、$X^\chi_{K_\infty} \sim \Lambda_\chi/(f_1^{n_1}) \oplus ... \oplus \Lambda_\chi/(f_m^{n_m})$ (pseudo-isom、f_i は既約) のとき、$f_i^{n_i}$ の情報は少なくとも得られる。現実には例はないが、 特性イデアルが (f^2) (f: 既約) のとき、$\Lambda_\chi/(f^2)$ か $\Lambda_\chi/(f) \oplus \Lambda_\chi/(f)$ かの判定もつくことになる。

Remarks

1. もっと一般に総実代数体 k 上の CM 体 K で K/k が有限次アーベル拡大であるものに対しても、(いくつかの小さな条件の下) 同じことが証明できる。

2. A^χ_K についても、$\Theta^\chi_{r,K}$ を上と同様に定義した O_χ のイデアルとするとき、$\mathrm{Fitt}_{r,O_\chi}(A^\chi_K) = \Theta^\chi_{r,K}$ が示せる。従って、$A^\chi_{K_\chi}$ の O_χ 加群としての構造は $\Theta^\chi_{r,K}$ で完全に決定し、O_χ 加群の同型

$$A^\chi_K \simeq \bigoplus_{r \geq 1} \Theta^\chi_{r,K}/\Theta^\chi_{r-1,K}$$

が成り立つ。なお、$k = \mathbf{Q}$ のときは、この同型は Gauss 和の Euler 系を使うことにより、Kolyvagin, Rubin により証明されている。上に述べた定理の動機の一つとして、Kolyvagin, Rubin の定理を一般化してとらえたい、ということがあった。

3. 定理の証明のためには、(普通の Euler 系の離散付値環上の議論だけでは不十分で) 普通の Gauss 和の Euler 系の微分から得られる元 (Kolyvagin 系) よりも、きれいな性質を持つ元を cohomology 群の中に作る (普通に得られる Kolyvagin 系が延長され、またさらにゼータと関連したよい性質をもつことを示す) 必要がある。すなわち、ゼータの値と関連したきれいな元の系列が、コホモロジー群 (今の場合は体の乗法群) の中に存在するのである。

4. 楕円曲線の Selmer 群などについても、ある程度の条件の下、同じ議論ができる。従って、rank などの性質は、$\delta_{i_1,\ldots,i_t}$ などの性質に現れる。Gauss 和型の Kolyvagin 系でゼータと結びつくよい性質を持つものの理論は、もっと一般の (ある種の条件を満たす) p 進表現に対して考えることができる。