志村多様体の悪い還元について

京都大学大学院理学研究科数学教室
伊藤 哲史 (Tetsushi Ito)[1]
Department of Mathematics, Kyoto University

1. Introduction — なぜ「志村多様体の悪い還元」を研究するのか

まず，表題について説明しよう.「志村多様体」は，有理数体上の簡約代数群から定義される代数多様体の射影系である．これはモジュラー曲線の一般化であり，数論的にも表現論的にも興味深いと考えられている対象である．志村多様体上の微分形式は，有界対称領域上の保型形式と解釈することができる．また，志村多様体は canonical model と呼ばれる代数体上のモデルを持ち，その ℓ 進コホモロジーは保型表現と Galois 表現の間の「Langlands 対応」を実現していると期待されている．Ramanujan 予想，円分体のイデアル類群に関する Herbrand の定理の逆，有理数体や総実代数体上の岩澤主予想，Fermat の最終定理，p 進体上の $GL(n)$ の局所 Langlands 対応・非可換 Lubin-Tate 理論，像が非可解な 2 次元 Galois 表現に対する Artin 予想，そして最近 Taylor 等によって多くの場合に証明された佐藤-Tate 予想等 ([Ta])，現在得られている深遠な整数論の定理には，志村多様体を使って得られるものも多い.

一方,「悪い還元」は多くの人には聞き慣れない単語かもしれない．著者も，ある数学者から『悪いって言うけど，一体何が悪いんですか？』と聞かれて，返答に窮したこともある.「悪い還元」は bad reduction の和訳であり，代数多様体の標数 p 還元が滑らかにならないことを表す数論幾何の用語である．悪い還元を起こす素数を「悪い素数」といい，そうでない素数を「良い素数」という．一般に代数体上の滑らかな代数多様体は有限個の悪い素数を持つ．悪い素数においては，標数 p 特有の「病的な現象」が起こることがあり，敬遠されることが多いことも残念ながら事実である.『なぜ志村多様体の悪い還元を研究するのか』という問の答えとして,『(本来は扱いたくないのだが) 完全な理解のためには，悪い素数も (嫌々ながら) 扱わなければいけないから』という「消極的理由」を挙げる人は，意外に多いのではないだろうか.

---

[1]日本学術振興会特別研究員 (SPD) (tetsushi@math.kyoto-u.ac.jp)
第 51 回代数学シンポジウム，講演日時：2006 年 8 月 6 日 (日) 13:30 – 14:30

しかし，志村多様体の悪い還元の研究者の多くは決してそのような「消極的理由」により研究しているわけではない (と，少なくとも著者は信じている．残念ながら，志村多様体の悪い還元の研究者の数は，それほど「多く」はないが (特に日本では))．悪い還元の世界には，良い還元の時には現れなかった様々な興味深い現象がある．また，整数論の定理の中には，Herbrand の定理の逆 (Ribet)，$\mathbb{Q}$ 上の岩澤主予想 (Mazur-Wiles)，Wiles による Fermat の最終定理の証明の中で用いられた「レベル下げ定理」(Ribet)，p 進体上の $GL(n)$ の局所 Langlands 対応 (Harris-Taylor) のように，その (最初に与えられた) 証明の中で，志村多様体の悪い還元が本質的に用いられたものも多い[2]．

本稿では,「保型形式の空間の次元をどうやって計算するか」という古典的な問題を題材に，志村多様体の悪い還元を研究する「積極的理由」の一つを紹介する．その現象を一言で述べると，

「悪い還元」ではモジュライ空間の構造が簡単になり，物事がよく分かる

ということである．保型形式という解析的かつ古典的な対象の研究に「志村多様体の悪い還元」が役に立つという事実は，別に驚くべきことではない．滑らかな空間に対するある種の不変量を計算するために，あえて空間を退化させて考える (別の言い方をすると,「空間をコンパクト化して，境界に注目する」)，というテクニックは，整数論のみならず，代数幾何，トポロジー，表現論等，様々な分野に共通の「指導原理」である．

「志村多様体の悪い還元」は，類体論・虚数乗法論，アーベル多様体のモジュライ理論，p 可除群の変形理論，有限群スキームの分類理論，保型表現・保型形式，p 進解析学，p 進一意化理論，p 進代数群の超尖点的表現，有限 Chevalley 群の表現論，岩堀 Hecke 環の表現論 ([Yo2])，巾零軌道の幾何学等，多くの分野に関係した “狭くて広い” 世界である．

---

[2] $\mathbb{Q}$ 上の岩澤主予想については，現在ではモジュラー曲線を使わない (Euler 系による) 別証明が得られている．p 進体上の $GL(n)$ の局所 Langlands 対応については，Harris-Taylor による「悪い還元」を駆使した証明の後，Henniart により「悪い還元」を用いない簡略化された証明が得られている．Fermat の最終定理についても，最近では，Ribet の「レベル下げ定理」を用いずに (さらに，Langlands-Tunnell の定理も用いずに) 証明することができるようになっているらしい ([Kh])．特に，Ribet の「レベル下げ定理」の証明は，モジュラー曲線の悪い還元や，志村曲線の p 進一意化理論を用いた非常に難解なものであり，それが回避できたことは多くの人にとって大きな意味があると思われる．理論の進展と証明の簡略化に伴い,「志村多様体の悪い還元」は，それ自身に興味のある人以外には使いたくなければ使わなくても良いものになってしまうのかもしれない．著者としては，若干の寂しさを感じずにはいられない．

本稿では，ページ数や著者の能力の関係から,「志村多様体の悪い還元」に関する網羅的な解説を行うことはしない (できない)．これについては，Rapoport による優れた解説があるので ([Ra1], [Ra2])，興味のある人はそちらを参照していただきたい.

「志村多様体の悪い還元」という表題を掲げておきながら，最近殊に進展の著しい p 進一意化理論や局所 Langlands 対応への応用にはほとんど触れることができなかったのは心残りである．これについては，[RZ2], [HT], [Ha], [Fa], [It1] 等を参照していただきたい．(「志村多様体の悪い還元」が様々なことに関連があるからと言って，テーマを広げすぎると，焦点の定まらない解説になってしまう恐れもある．それを避けるために，本稿ではテーマを「保型形式の空間の次元」に絞ってみたのだが，どうだろうか？)

本稿の後半では，岩堀レベル構造を持つユニタリ型志村多様体上の保型形式の空間の次元の計算に対する，志村多様体の悪い還元を用いたアプローチを紹介した．関連する話題として,「高次元版 Hasse 不変量」に関する著者の解説 [It3] もあるので，適宜参照していただきたい.

2. 志村多様体と Langlands 対応

G を $\mathbb{Q}$ 上の連結な簡約代数群とすると，**レベル構造**と呼ばれる開コンパクト部分群 $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ に対し，$\mathbb{C}$ 上の代数多様体 Sh_K が定まる．正確に言うと，志村多様体を得るには，G だけでなく**志村データ**と呼ばれる組 (G, h) を考える必要があるが，本稿では述べない ([D1], [D2], [Mi2])．ここで $\mathbb{A}_f$ は $\mathbb{Q}$ のアデール環 $\mathbb{A}$ の有限部分である：

$$\mathbb{A}_f = \prod_{p:\text{素数}}{}' \mathbb{Q}_p = \bigl\{(a_p) \in \mathbb{Q}_p \bigm| \text{ほとんど全ての } p \text{ で } a_p \in \mathbb{Z}_p\bigr\} \subset \prod_{p:\text{素数}} \mathbb{Q}_p$$
$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_f \times \mathbb{R}$$

志村データから，modulo 中心でコンパクトな部分群 $K_\infty \subset G(\mathbb{R})$ であって，$G(\mathbb{R})/K_\infty$ が Hermite 対称領域の有限個の直和になるものが定まる．Sh_K は複素解析空間として，

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/K \cdot K_\infty = G(\mathbb{Q})\backslash\bigl(G(\mathbb{A}_f)/K \times G(\mathbb{R})/K_\infty\bigr)$$

という形の商空間として表すことができ，Hermite 対称領域の算術商の有限個の直和と同形である．$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C})$ が準射影的な代数多様体の構造を持つことは，Baily-Borel の定理による ([BB])．$K' \subset K$ に対して，自然な有限射 $\mathrm{Sh}_K \to \mathrm{Sh}_{K'}$ が存在し，これによって $\{\mathrm{Sh}_K\}_{K \subset G(\mathbb{A}_f)}$ は射影系をなす．例えば，$G = GL(2)$，$K_\infty = \mathbb{R}^\times \cdot SO(2, \mathbb{R})$ の

ときは，$G(\mathbb{R})/K_\infty$ は複素上半空間と下半空間の直和 $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ と同一視できる．この場合の Sh_K は**モジュラー曲線**(の有限個の直和) である．

志村多様体 Sh_K は reflex field と呼ばれる代数体 E 上のモデルを持ち (**canonical model** の理論)，その ℓ 進コホモロジーから定まる Galois 表現は「Langlands 対応」を実現していると期待されている ([D1], [D2], [Mi2])．canonical model の存在は，一般に Milne によって示されているようである ([Mi1])．$G(\mathbb{A}_f)$ は射影系 $\{\mathrm{Sh}_K\}_{K\subset G(\mathbb{A}_f)}$ に作用し，従って Sh_K の canonical model の ℓ 進コホモロジーの直極限

$$V = \varinjlim_K H^*(\mathrm{Sh}_K \otimes_E \overline{E}, \mathbb{Q}_\ell)$$

に作用する (正確には，右辺は Sh_K の Baily-Borel コンパクト化の ℓ 進交差コホモロジーをとる)．一方，V には E の絶対 Galois 群 $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ が作用する．直積群 $G(\mathbb{A}_f)\times\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ の作用により V を分解する：

$$V = \bigoplus \pi_i \otimes \rho_i.$$

この分解に現れる対応 “$\pi_i \leftrightarrow \rho_i$” が，$G(\mathbb{A}_f)$ の保型表現と $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ の ℓ 進表現の間のいわゆる「Langlands 対応」を与えているだろう，というのが予想の大雑把な内容である (予想を「正しく」述べるには Arthur パラメータを導入する必要があり，それほど簡単ではない．詳しくは [Ko3] を参照．Arthur パラメータについては平賀氏の講演を参照．また，$GL(n)$ の局所・大域 Langlands 対応の日本語の解説は [Yo1] にある)．これは，$G = GL(2)$ の場合に，モジュラー曲線の Hasse-Weil ゼータ関数が，重さ 2 の保型形式の L 関数の積で書けるという，Eichler-志村理論の一般化である．

蛇足だが，任意の G から志村多様体が得られるわけではないことに注意しておこう．例えば $G = GL(n)$ $(n \geq 3)$ の場合は，$G(\mathbb{R})$ の対称領域が複素構造を持たず，従って $GL(n)$ $(n \geq 3)$ からは志村多様体を作ることはできない．Lafforgue による関数体上の $GL(n)$ の Langlands 予想の解決には，“$GL(n)$ の志村多様体” の関数体版 (Drinfeld の “shutuka” のモジュライ空間) が用いられたが，類似の議論をそのまま代数体上で行うことはできない．このような理由により，[C1], [HT] 等では，代数体上の $GL(n)$ の Langlands 対応のために，ユニタリ型の志村多様体を使う必要があるのである．

志村多様体の中には，**PEL 型**と呼ばれる性質の良いクラスがある．この場合，志村多様体は PEL(polarization, endomorphism, level structure) 構造付きのアーベル多様体のモジュライ空間になる．このような志村多様体に対しては，アーベル多様体のモジュライ理論を援用することで，その canonical model や，整数環上のモデルを構成することができる (正確に言うと，良いモジュライ解釈を持つためには「type D を

除く」必要がある．詳しくは [Ko1] を参照)．モジュラー曲線や本稿で扱うユニタリ型の志村多様体は，このクラスに属する．

3. $\Gamma_0(p)$ に関する保型形式の次元をめぐって

まず，古典的な設定から始めよう．自然数 $N \geq 1$ に対し，

$$\Gamma(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \;\middle|\; a, d \equiv 1,\ b, c \equiv 0 \pmod{N} \right\}$$
$$\Gamma_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \;\middle|\; c \equiv 0 \pmod{N} \right\}$$

とおく．$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の部分群 Γ で，$\Gamma(N) \subset \Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ をみたすものに対し，Γ に関する重さ k の尖点形式のなすベクトル空間を $S_k(\Gamma)$ とおく．

一次分数変換により，Γ は複素上半平面 $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ に作用する．商空間 $Y_\Gamma := \Gamma\backslash\mathbb{H}$ を**モジュラー曲線**という．Y_Γ は標準的なコンパクト化を持ち，それを X_Γ で表す．Y_Γ, X_Γ は自然に代数体上の滑らかな代数曲線の構造を持つ．$\Gamma = \Gamma(N)$ (resp. $\Gamma_0(N)$) のときの X_Γ, Y_Γ を，それぞれ $X(N)$, $Y(N)$ (resp. $X_0(N)$, $Y_0(N)$) と書く．

X_Γ 上の正則な 1 次微分形式のなす空間は，Γ に関する重さ 2 の尖点形式のなす空間 $S_2(\Gamma)$ と自然に同一視できる ([Sh], Corollary 2.17) :

$$H^0(X_\Gamma, \Omega^1) \cong S_2(\Gamma).$$

従って，$S_2(\Gamma)$ の次元 $\dim S_2(\Gamma)$ は X_Γ の種数に等しい．

問題 1． $\dim S_k(\Gamma)$ を計算せよ．

簡単のため，以下では $k = 2$ とする．また，p を素数として $\Gamma = \Gamma_0(p)$ の場合を考える．$\dim S_2(\Gamma_0(p))$ はモジュラー曲線 $X_0(p)$ の種数と等しいので，この問題は $X_0(p)$ の種数を求める問題と同値である．$X_0(p)$ の種数は，$\Gamma_0(p)$ の楕円的な元を数えることで計算することができる．これにより，$\dim S_2(\Gamma_0(p))$ が計算できる ([Sh], Proposition 1.40, Proposition 1.43)．こうして，問題 1 にはとりあえずの解答が与えられる．

一方，D_p を $\mathbb{Q}$ 上の判別式 p の定符号四元数環とすると，Eichler の類数公式により，D_p の類数 $h(D_p)$ を具体的に計算することができる．その結果は

$$h(D_p) = \frac{p-1}{12} + \frac{1}{3}\left\{1 - \left(\frac{-3}{p}\right)\right\} + \frac{1}{4}\left\{1 - \left(\frac{-4}{p}\right)\right\}$$

である ([Ei])．$\left(\frac{-}{p}\right)$ は Legendre 記号である．この式は，標数 p のモジュラー曲線 $X(1)$ 上の超特異点を,「Hasse 不変量」と呼ばれる重さ $p-1$ の標数 p の保型形式を使って

数えることで示すこともできる (井草の定理 ([Ig]). ユニタリ型志村多様体への一般化については [It3] も参照).

このとき，$\dim S_2(\Gamma_0(p))$ と $h(D_p)$ の間には

$$\dim S_2(\Gamma_0(p)) = h(D_p) - 1$$

という関係があることが具体的に確かめられる．左辺は保型形式という解析的な対象であり，右辺は四元数環の類数という代数的な対象である．両者の間に簡単な関係式があることは,「偶然の一致」ではなく，何か「理由」があると考えるのが自然であろう．

問題 2． 等式「$\dim S_2(\Gamma_0(p)) = h(D_p) - 1$」を説明せよ．

この等式には，いくつかの (見かけが異なる)「説明」を与えることができる.『両者を別々に計算してみたら一致していた』というのも，もちろん「説明」には違いないのだが，その背後にある数学的現象や理論が明らかになるような「説明」が欲しいと考えるのは，自然なことであろう．

この等式の一つの「説明」は次のようなものである：等式の背後には「ベクトル空間としての同形」がある．$I \subset D_p$ を左イデアルとすると，I には D_p の被約ノルムから二次形式を定めることができる．I のテータ関数 $\theta_I(q)$ は，$\Gamma_0(p)$ に関する重さ 2 の保型形式である．$h := h(D_p)$ 個のテータ関数 $\theta_{I_1}(q), \ldots, \theta_{I_h}(q)$ をうまく選ぶことで，それが $\Gamma_0(p)$ に関する (尖点的とは限らない) 保型形式の空間を生成するようにできる (Eichler の Basis Problem)．これにより，テータ関数のなすベクトル空間の余次元 1 の部分空間と (「余次元 1」は尖点形式になるための条件に対応する)，$S_2(\Gamma_0(p))$ の間の同形が得られる．実際には，ベクトル空間としての同形だけでなく，Hecke 作用素の固有値の一致を示すこともできる．これは，四元数環の保型表現と $GL(2)$ の保型表現の間の「Jacquet-Langlands-清水対応」の特別な場合である．

さて，問題 2 の等式の，モジュラー曲線 $X_0(p)$ の悪い還元を用いた「数論幾何的な説明」を紹介しよう．すでに述べたように $S_2(\Gamma_0(p)) \cong H^0(X_0(p), \Omega^1)$ であるから，$X_0(p)$ の種数が計算できればよい．$X_0(p)$ の点は楕円曲線 E と位数 p の有限部分群スキーム $G \subset E[p]$ のペア (E, G) に対応している ([DR])．$X_0(p)$ 自身はもともと Riemann 面として定義されたものだが，このモジュライ問題は $\mathbb{Z}$ 上で意味がある，というのがポイントである．これにより，任意の可換環 R 上でモジュラー曲線 “$X_0(p) \otimes R$” を考えることができる．特に標数 p の代数閉体 k に対し，k 上のモジュラー曲線 “$X_0(p) \otimes k$”

を考えることができる．このとき，$X_0(p) \otimes k$ は 2 つの既約成分を持つ：

$$X_0(p) \otimes k = X_1 \cup X_2$$

$X_1 \subset X_0(p) \otimes k$ は G が連結な有限群スキームになる部分，$X_2 \subset X_0(p) \otimes k$ は G の Cartier 双対が連結な有限群スキームになる部分である．X_1, X_2 は $X(1) \otimes k \cong \mathbb{P}^1$ (j-line) と同形であり，$X_0(p) \otimes k$ の特異点 (X_1 と X_2 の交点) は，k 上の超特異 j 不変量に対応する．その個数を s_p とおく．$X_0(p) \otimes k$ の特異点の周りでの様子を調べることにより (詳しくは [DR] を参照)，$X_0(p)$ の $\mathbb{Z}_p$ 上の半安定モデルを構成することができ，それにより $X_0(p)$ の種数を計算することができる．その値は $s_p - 1$ に等しい．一方，Deuring の定理 ([Deu]) により $s_p = h(D_p)$ なので，

$$\dim S_2(\Gamma_0(p)) = X_0(p) \text{ の種数} = s_p - 1 = h(D_p) - 1$$

となり，求める等式が得られる．

注意 3.1. モジュラー曲線 $X_0(p)$ の悪い還元を使うことで，Eichler の Basis Problem に別証明を与えることもできる ([Oh]).

もちろん,「$\Gamma_0(p)$ に関する保型形式の空間の次元」は，古典的な対象であり，古典的な方法で研究することができる．実際，問題 2 の等式自体は，標数 p の代数幾何を使わなくても，両辺を具体的に計算して示すことができる．ここで大切なのは，モジュラー曲線の悪い還元の幾何学を用いた解釈・説明を与えることで，この等式に対する「新たな見方」が得られる，ということである．これは，等式の一般化を考える上でも重要である．

最後に，本稿の動機付けとなった問題を述べよう．

問題 3. 等式「$\dim S_2(\Gamma_0(p)) = h(D_p) - 1$」を一般化せよ．

本稿の目的は，ある種のユニタリ型志村多様体上の保型形式に対して,「志村多様体の悪い還元」のテクニックを用いてこの問題を考察することである．

4. ユニタリ型志村多様体

本節では虚二次体上の中心的斜体に伴うユニタリ型志村多様体を導入する．これは，Kottwitz や Harris-Taylor によってゼータ関数が計算されているクラスの志村多様体であり，モジュラー曲線の高次元版とでも言うべきものである．数論的にも代数幾何的にも表現論的にも非常に扱いやすい性質を持っている ([Ko1], [C1], [C2], [HT] 等を参照).

$F/\mathbb{Q}$ を虚二次体とし，B を F 上の n^2 次元の中心的斜体とする．$*\colon B \to B$ を第 2 種対合とし，V を階数 1 の自由 B 加群とする．$*$ は正であると仮定する．$\mathbb{Q}$ 上の非退化交代形式 $\langle , \rangle\colon V \times V \to \mathbb{Q}$ であって，$b \in B,\ v, w \in V$ に対し $\langle bv, w\rangle = \langle v, b^* w\rangle$ をみたすものをとる．ここで，ユニタリ相似変換のなす $\mathbb{Q}$ 上の代数群 G を次のように定める：$\mathbb{Q}$-代数 R に対し，

$$G(R) := \left\{ (g, \lambda) \in \mathrm{End}_B(V \otimes_{\mathbb{Q}} R) \times R^\times \;\middle|\; \langle gv, gw\rangle = \lambda \langle v, w\rangle \ (\forall v, w \in V) \right\}.$$

$K \subset G(\mathbb{A}_f)$ を十分小さな開コンパクト部分群とすると，§2 でも説明したように，志村多様体 Sh_K であって，

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/K_\infty K$$

をみたすものが定まる．これは PEL 型の志村多様体であり，B の作用を持つアーベル多様体のモジュライ空間の構造を持つ．

次の条件を仮定する．

- $G(\mathbb{R}) \cong GU(1, n-1)$．従って，$G(\mathbb{R})/K_\infty$ は $n-1$ 次元の複素超球の有限個の直和である．
- F で分解する異なる素数 $p = v \cdot v^c,\ p' = w \cdot w^c$ が存在し (c は複素共役)，次をみたす：
  - B は v で分解する．すなわち，$B \otimes_F F_v \cong M_n(F_v)$．
  - $B \otimes_F F_w$ は Hasse 不変量が $1/n$ の F_w 上の中心的斜体である．

さらに K は，次の形をしており，

$$K = K_p \cdot K_{p'} \cdot K^{p,p'} \subset G(\mathbb{A}_f) = G(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_{p'}) \times G(\mathbb{A}_f^{p,p'})$$

$K_p \subset G(\mathbb{Q}_p) \cong GL(n, \mathbb{Q}_p)$，$K_{p'} \subset G(\mathbb{Q}_{p'})$ は極大コンパクトで，$K^{p,p'} \subset G(\mathbb{A}_f^{p,p'})$ は十分小さいとする．ここで，$\mathbb{A}_f^{p,p'}$ は $\mathbb{A}_f$ から p と p' の成分を除いたものである．$\mathbb{A}_f = \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_{p'} \times \mathbb{A}_f^{p,p'}$ である．

この条件の下で，次が成り立つ．

- Sh_K は F 上の滑らかな $n-1$ 次元の射影的代数多様体の構造を持つ．
- Sh_K は v で良い還元を持つ．すなわち，Sh_K は $\mathscr{O}_{F,v}$ 上の滑らかなモデルを持つ．
- Sh_K は w で悪い還元を持つ．さらに詳しく言うと，$\mathrm{Sh}_K \otimes_F F_w$ は $n-1$ 次元 Drinfeld 上半空間による p 進一意化の構造を持つ．特に Sh_K は $\mathscr{O}_{F,w}$ 上の半安定モデルを持つ (p 進一意化理論については，[Ra1], [RZ2] を参照)．

同形 $G(\mathbb{Q}_p) \cong GL(n, \mathbb{Q}_p)$ をうまくとり，$K_p = GL(n, \mathbb{Z}_p)$ となるようにする．$GL(n, \mathbb{Z}_p)$ の元で標数 p に還元すると上三角行列になるもの全体を $\mathrm{Iw}_p \subset K_p$ とおく．Iw_p は $GL(n, \mathbb{Q}_p)$ の岩堀部分群である．

$$K' = \mathrm{Iw}_p \cdot K_{p'} \cdot K^{p,p'}$$

とおく．志村多様体 $\mathrm{Sh}_{K'}$ は，v でも w でも悪い還元を持つ (§6 や [TY] を参照)．被覆 $\mathrm{Sh}_{K'} \to \mathrm{Sh}_K$ は，モジュラー曲線の被覆 $X_0(p) \to X(1)$ の高次元類似である．

記号を簡単にするため，以下では，Sh_K を Sh と書き，$\mathrm{Sh}_{K'}$ を $\mathrm{Sh}_{\mathrm{Iw}}$ と書くことにする．

さて，$\mathrm{Sh}_{\mathrm{Iw}}$ 上の保型形式の空間 $H^0(\mathrm{Sh}_K, \Omega^{n-1})$ の次元を計算するにはどうすればよいだろうか．§3 で述べたモジュラー曲線 $X_0(p)$ の場合との類似を考えるならば，次のような問題を考えるのが自然であろう．

問題 4. 志村多様体 $\mathrm{Sh}_{\mathrm{Iw}}$ の悪い還元を用いて，Sh 上の保型形式の空間 $H^0(\mathrm{Sh}, \Omega^{n-1})$ の次元と，$\mathrm{Sh}_{\mathrm{Iw}}$ 上の保型形式の空間 $H^0(\mathrm{Sh}_{\mathrm{Iw}}, \Omega^{n-1})$ の次元を関係付けよ．

5. 保型形式の空間の次元と Euler 数

前節で定義した志村多様体 $\mathrm{Sh}, \mathrm{Sh}_{\mathrm{Iw}}$ に対しては，保型形式の空間の次元と Euler 数の間に簡単な関係があることを，p 進一意化理論の帰結として示すことができる．

命題 5.1. $\mathrm{Sh} \otimes_F \overline{F}$ または $\mathrm{Sh}_{\mathrm{Iw}} \otimes_F \overline{F}$ を X とおく．X の **Euler 数**を

$$\chi(X) := \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \dim_{\mathbb{Q}} H^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$$

で定める．このとき，X の Euler 数と X 上の正則 $n-1$ 次微分形式の空間の次元の間には，次の関係がある：

$$\chi(X) = (-1)^{n-1} \cdot n \cdot \dim H^0(X, \Omega^{n-1}) + n \cdot \#\pi_0(X).$$

ここで，$\#\pi_0(X)$ は X の連結成分の個数を表す．

証明. ℓ 進コホモロジーから定義された Euler 数を $\chi_\ell(X)$ とおくと，コホモロジーの比較定理により，$\chi(X) = \chi_\ell(X)$ であるから，$\chi_\ell(X)$ に対して示せばよい．X の各連結成分が w の上の素点で p 進一意化を持つことと，Schneider-Stuhler による Drinfeld 上半空間の ℓ 進コホモロジー (ℓ は p' と異なる素数) の計算結果を用いれば，上式は直ちに導かれる ([RZ2], [SS]). □

この命題と関連して，Clozelによって示された表現論的な消滅定理(Rapoport予想)を紹介しよう．

定理 5.2 ([C2], Theorem 4.3)**.** πを$G(\mathbb{A})$の無限次元の保型表現とし，ある有限素点λに対して，π_λがSteinberg表現であると仮定する．このとき，もしπが志村多様体のコホモロジーに寄与するならば，その寄与は中間次数のコホモロジーH^{n-1}に限る．すなわち，$i \neq n-1$であれば，πはH^iには寄与しない．

この定理は，p進一意化理論を背景として([RZ1])，Rapoportによって予想されたものである．この消滅定理はいわゆる「松島の消滅定理」よりもかなり強い主張であることに注意しよう．§4での，p'におけるレベル構造$K_{p'}$が極大であるという仮定が，π_wがSteinberg表現であることに対応している．$K_{p'}$が極大とは限らない場合は，$n-1$次以外のコホモロジーに寄与する保型表現が存在する場合がある．この場合のコホモロジーの消滅定理(および非消滅定理)がClozelによって詳しく調べられている([C2])．

6. $\mathrm{Sh}_{\mathrm{Iw}}$上の保型形式の空間の次元公式へのアプローチ

まず，志村多様体$\mathrm{Sh}, \mathrm{Sh}_{\mathrm{Iw}}$の標数$p$還元の構造について復習する([HT], [TY])．記号を簡単にするため，以下では，$k := \overline{\mathbb{F}}_p$を素点$v$における$F$の剰余体の代数閉包とし，$X := \mathrm{Sh} \otimes k$とおく．

ここではまずXの階層(stratification)について述べる([HT]．[It3]も参照)．X上の普遍アーベル多様体のp可除群をBの整環の作用で分解することで，高さnの1次元p可除群の族$\mathscr{G} \to X$が得られる．Xの幾何学的点sに対し，$\mathscr{G} \to X$のファイバーを$\mathscr{G}_s$とおく．p等分点$\mathscr{G}_s[p]$の幾何学的点は$\mathbb{F}_p$上の有限次元ベクトル空間をなす．その次元をh_sとおくと，$0 \leq h_s \leq n-1$が成り立つ．$h_s = i$となる部分を$X^{(i)} \subset X$とおくと，1次元p可除群の変形理論により，$X^{(i)}$は滑らかなi次元アフィン多様体の構造を持つ．また，$X^{(i)}$のZariski閉包を$X^{[i]}$とおくと，$X^{[i]} = \coprod_{j \leq i} X^{(j)}$である([HT])．$X^{(i)}$がアフィン多様体になることは「高次元版Hasse不変量」の考察から分かる([It2], [It3])．$X = X^{[n-1]} = \coprod_{i=0}^{n-1} X^{(i)}$を$X$の$p$**階数階層**($p$-rank stratification)という．

次に，Taylor-吉田により考察された，被覆$\mathrm{Sh}_{\mathrm{Iw}} \to \mathrm{Sh}$の標数$p$還元を考えよう([TY])．これは，モジュラー曲線の被覆$X_0(p) \to X(1)$の高次元類似である．$\mathrm{Sh}_{\mathrm{Iw}} \otimes \mathscr{O}_{F,v}$はフィルトレーション

$$0 = G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_n = \mathscr{G}[p]$$

(G_i は位数 p^i の有限群スキーム) のモジュライ空間であり，$\mathscr{O}_{F,v}$ 上の**強半安定モデル**(strictly semistable model) を持つ．$X_{\mathrm{Iw}} := \mathrm{Sh}_{\mathrm{Iw}} \otimes k$ は既約ではない (モジュラー曲線の場合，$X_0(p) \otimes \mathbb{F}_p$ が既約ではなかったことを思い出そう)．G_i/G_{i-1} が連結な有限群スキームになる部分を $Y_i \subset X_{\mathrm{Iw}}$ とおくと，

$$X_{\mathrm{Iw}} = \bigcup_{i=1}^{n} Y_i$$

と書ける．しかも，Y_i は滑らかな $n-1$ 次元の射影的代数多様体であり，横断的に交わっている．また，X 上の有限群スキーム $\mathscr{G}[p]$ の相対 Frobenius 射 $\mathrm{Frob}\colon \mathscr{G}[p] \to \mathscr{G}[p]^{(p)}$ の核を $\mathrm{Ker}(\mathrm{Frob})$ とおき，$H := \mathscr{G}[p]/\mathrm{Ker}(\mathrm{Frob})$ とおく．フィルトレーション

$$0 = H_0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_{n-1} = H$$

(H_i は位数 p^i の有限群スキーム) のモジュライ空間を $Y \to X$ とおく．$X^{(n-1)} \subset X$ の逆像を $Y^\circ \subset Y$ と書き，**岩堀-井草多様体**という (岩堀レベル構造における高次元版井草多様体という意味である)．$Y^\circ \to X^{(n-1)}$ は有限エタール射である．このとき，Y_i は全て Y と同形であることが示せる．すなわち，X_{Iw} は n 個の Y が横断的に交わった形をしている．さらに，$B(\mathbb{F}_p) \subset GL(n-1, \mathbb{F}_p)$ を上三角行列のなす部分群とおくと，$Y \to X$ は次数 $[GL(n-1, \mathbb{F}_p) : B(\mathbb{F}_p)]$ の有限射であり，$X^{(n-1)} \subset X$ 上ではエタールである．特に，$n = 2$ であれば，$GL(n-1, \mathbb{F}_p) = B(\mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p^\times$ であり，$Y \cong X$ である (モジュラー曲線 $X_0(p)$ の場合を思い出そう)．また，$n = 3$ であれば，$Y \to X$ は次数 $\#\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p) = p + 1$ の有限射である．

さて，$\mathrm{Sh}_{\mathrm{Iw}}$ 上の保型形式の空間の次元への応用を述べよう．以下では，p と異なる素数 ℓ を固定し，ℓ 進コホモロジーを用いて定義された Euler 数を χ で書くことにする．

補題 6.1.

$$\dim H^0(\mathrm{Sh}_{\mathrm{Iw}}, \Omega^{n-1}) = (-1)^{n-1}\bigl(\chi(Y^\circ) - \#\pi_0(\mathrm{Sh}_{\mathrm{Iw}})\bigr)$$

証明. X_{Iw} の滑らかな部分を X_{Iw}° とおくと，半安定モデルの消滅サイクルの計算により ([RZ1])，$\chi(\mathrm{Sh}_{\mathrm{Iw}}) = \chi(X_{\mathrm{Iw}}^\circ)$ が分かる．X_{Iw}° は Y° の n 個の直和と同形であるから，$\chi(X_{\mathrm{Iw}}^\circ) = n \cdot \chi(Y^\circ)$ である．さらに，命題 5.1 をあわせると，求める等式が得られる． □

$\chi(Y^\circ)$ を Sh に関する不変量で表すことを考えよう．以下では簡単のため，曲面の場合 ($n = 3$ の場合) を考えることにする．

既に述べたように，$Y \to X$ は次数 $p + 1$ の有限射であり，$X^{(2)}$ 上でエタールである．$Y \to X$ が $X^{(2)}$ の境界で野生的分岐を持つことが，次のようにして分かる．

$X\backslash X^{(2)} = X^{[1]}$ の各連結成分 X' に対し，その逆像は 2 つの既約成分 Y_1, Y_2 を持ち，一方 (それを Y_1 とおく) は X' と同形で，もう一方から X' への射 $Y_2 \to X'$ は次数 p の純非分離射である．従って，

$$\chi(Y^\circ) = (p+1)\cdot\chi(X^{(2)}) + \mathrm{ram}$$

という式で書ける．ここで ram は野生的分岐の Euler 数への寄与である．

さて，Euler 数は標数 0 でも標数 p でも変わらないから，

$$\chi(X^{(2)}) = \chi(X) - \chi(X^{[1]}) = \chi(\mathrm{Sh}) - \chi(X^{[1]})$$

である．命題 5.1 を Sh に適用することで，$\chi(\mathrm{Sh})$ を Sh 上の保型形式の空間の次元に関する式で書くことができる．

一方，$X^{[1]}$ は標数 p の滑らかな射影的代数曲線であるから，その Euler 数は，$X^{[1]} \subset X$ に随伴公式を適用することで，

$$-\chi(X^{[1]}) = 2g(X^{[1]}) - 2 = K_X \cdot X^{[1]} + X^{[1]} \cdot X^{[1]}$$

という形で計算できる．K_X は X の標準束であり，右辺の $\cdot$ は交点数を表す．また，$g(X^{[1]})$ は $X^{[1]}$ の種数である．小平-Spencer 理論により，K_X は X 上の Hodge バンドルと関係する．また，$X^{[1]} \subset X$ のサイクル類は,「高次元版 Hasse 不変量」を用いて次のようにして計算できる ([It2], [It3] を参照)．X 上の p 可除群 $\mathscr{G} \to X$ の Lie 環の双対を $\mathscr{L} := (\mathrm{Lie}\,\mathscr{G})^\vee$ とおく．[It3] でも述べたように,「高次元版 Hasse 不変量」を用いると，

$$[X^{[1]}] = (p^2-1)[\mathscr{L}], \qquad \#X^{(0)} = (\mathscr{L}\cdot\mathscr{L})(p^2-1)(p-1)$$

が分かる．ここで [ ] はサイクル類を表す．これより，

$$\chi(X^{[1]}) = -\frac{p^2+2}{p-1}\cdot\#X^{(0)}$$

が得られる．$X^{(0)}$ はモジュラー曲線上の超特異点の高次元類似であり，その個数 $\#X^{(0)}$ はある種の「類数」(または「質量 (mass)」) と解釈できる量である．

Sh, $\mathrm{Sh}_{\mathrm{Iw}}$ 上の保型形式の空間の次元を

$$d_{\mathrm{Sh}} := \dim H^0(\mathrm{Sh}, \Omega^{n-1}), \qquad d_{\mathrm{Sh}_{\mathrm{Iw}}} := \dim H^0(\mathrm{Sh}_{\mathrm{Iw}}, \Omega^{n-1})$$

とおく．

以上をまとめて，次の式が得られる．

定理 6.2.

$$d_{\mathrm{Sh}_{\mathrm{Iw}}} = (p+1)n\cdot d_{\mathrm{Sh}} + (-1)^{n-1}\left\{\Bigl((p+1)n-1\Bigr)\cdot\#\pi_0(\mathrm{Sh}) + \frac{(p+1)(p^2+2)}{p-1}\cdot\#X^{(0)} + \mathrm{ram}\right\}$$

こうして，$\mathrm{Sh}_{\mathrm{Iw}}$ 上の保型形式の空間の次元 $d_{\mathrm{Sh}_{\mathrm{Iw}}}$ を，Sh 上の保型形式の空間の次元 d_{Sh} と，ある種の「類数」または「質量」と関係する量 $\#X^{(0)}$，そして，野生的分岐の寄与 ram を用いて表す公式が得られた．

残念ながら定理 6.2 は「使える公式」ではない (現段階では,「公式」というよりは, 単なる「関係式」と言うべきかもしれない)．定理 6.2 を「使える公式」にするためには，まず，$Y^{\circ} \to X^{(2)}$ の境界における野生的分岐の寄与 ram を具体的に計算する必要がある．これは p 可除群の変形理論や交点理論の問題である．曲線の場合 $(n = 2)$ は，被覆 $Y \to X$ が同形であり，野生的分岐の寄与 ram は無い．こうして，§3 において，モジュラー曲線 $X_0(p)$ 上の保型形式の空間の次元が簡単に計算できたことが「説明」できる．

一般の n に対してはどうなるだろうか．式は複雑になるだろうが，Hirzebruch の比例性原理を用いれば，原理的には同様の計算ができるはずである．しかし，その結果,「分かりやすい公式」が得られるかどうかは，現在のところ著者には分からない (うまく計算すれば，ひょっとしたら，何とかなるのかもしれないが).

本稿では簡単のため，次元のみに注目したが，もちろん，保型形式の空間への Hecke 作用素の作用を考えることも重要である．モジュラー曲線の場合から類推すると，定理 6.2 はある種の「類数公式」として解釈されるべきであり，この公式の背後には, テータ関数やテータ対応，Jacquet-Langlands-清水対応 (の一般化) などの表現論的な対応が隠れていると期待するのは，自然なことであろう．保型表現や Langlands 対応との関係を探りながら，定理 6.2 の「意味」を考えていくことは，今後の重要な課題であると思われる．

問題 5. 定理 6.2 を「解釈」せよ．また,「一般化」せよ．

言うまでもなく，本稿で紹介した志村多様体の悪い還元の保型形式への応用は,「志村多様体の悪い還元」の一つの側面に過ぎない (しかも，それほど「正統的」な側面ではない)．本稿では数論幾何的に最も扱いやすいユニタリ群 $U(1, n-1)$ に伴う志村多様体を扱ったが，もちろん，同様の計算を他の志村多様体，例えば Siegel モジュラー多様体や，$K3$ 曲面のモジュライ空間 (これは直交群 $SO(2, 19)$ の志村多様体である) で行うことは非常に興味深い問題である ($K3$ 曲面のモジュライ空間については，van der Geer 氏の講演も参照).

著者が「志村多様体の悪い還元」に関わってからまだ数年しか経っていないが，それでも，そこに現れる数学的現象の緻密さ・豊富さには驚かされるばかりである.「志村多様体の悪い還元」は，そのテクニカルな難しさもあって，多くの人が敬遠してし

まっているのも事実かもしれない (ひょっとしたら,「悪い」という用語にも問題があるかもしれない．何か「良い」言葉は無いものだろうか？)．しかし，そこでは様々な数学的対象が密接に絡み合い,「良い」世界には無い豊富な現象が見られることもまた事実である.

[It3] **の訂正・補足.**

- definite な四元数環の訳語として，[It3] では「定値四元数環」を使いましたが, 本稿では数学辞典にあわせて「定符号四元数環」を使いました.
- [It3], 系 6.4 の「$H^i_{\text{ét},c}(\cdots)$」は，コンパクト台でないコホモロジー「$H^i_{\text{ét}}(\cdots)$」が正しい.
- [It3], 系 6.5 は「類数公式」よりは,「質量公式 (mass formula)」と呼ぶのが適切かもしれません．(あるいは,「重み付き類数公式」と言うべきかもしれない)
- [It3], 系 6.6 では代数的基本群を使った証明を紹介しましたが，随伴公式と小平-Spencer 写像を使った証明ももちろん可能です．そちらの方が自然な証明かもしれません.

謝辞. 研究集会中に有益な示唆・助言をくださった G. van der Geer 氏 (Amsterdam 大)，本稿に対してコメントをくださった吉田輝義氏 (Harvard 大) に感謝します.

参考文献

[BB] Baily, W. L., Jr. Borel, A., *Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains*, Ann. of Math. (2) 84 1966 442–528.

[C1] Clozel, L, *Représentations galoisiennes associées aux représentations automorphes autoduales de* GL(n), Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 73 (1991), 97–145.

[C2] Clozel, L., *On the cohomology of Kottwitz's arithmetic varieties*, Duke Math. J. 72 (1993), no. 3, 757–795.

[D1] Deligne, P., *Travaux de Shimura*, Séminaire Bourbaki, 23ème année (1970/71), Exp. No. 389, pp. 123–165. Lecture Notes in Math., Vol. 244, Springer, Berlin, 1971.

[D2] Deligne, P., *Variétés de Shimura: interprétation modulaire, et techniques de construction de modèles canoniques*, Automorphic forms, representations and L-functions, Part 2, pp. 247–289, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[DR] Deligne, P., Rapoport, M. *Les schémas de modules de courbes elliptiques*, in Modular functions of one variable, II. Lecture Notes in Math., Vol. 349, Springer, Berlin, 1973, 143–316.

[Deu] Deuring, M., *Die Typen der Multiplikatorenringe elliptischer Funktionenkörper*, Abh. Math. Sem. Hansischen Univ. 14, (1941), 197–272.

[Ei] Eichler, M., *Über die Idealklassenzahl total definiter Quaternionenalgebren*, Math. Z. 43 (1938), no. 1, 102–109.

[Fa] Fargues, L., *Cohomologie des espaces de modules de groupes p-divisibles et correspondances de Langlands locales*, Astérisque No. 291 (2004), 1–199.

[vdGK] van der Geer, G., Katsura, T., *On a stratification of the moduli of $K3$ surfaces*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 2 (2000), no. 3, 259–290.

[Ha] Harris, M., *On the local Langlands correspondence*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002), 583–597, Higher Ed. Press, Beijing, 2002.

[HT] Harris, M., Taylor, R. *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties* (With an appendix by Vladimir G. Berkovich), Annals of Mathematics Studies, 151. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.

[It1] Ito, T., *Weight-monodromy conjecture for p-adically uniformized varieties*, Invent. Math. 159 (2005), no. 3, 607–656.

[It2] Ito, T., *Hasse invariants for some unitary Shimura varieties*, in preparation.

[It3] 伊藤哲史, 『Hasse invariants for some unitary Shimura varieties and applications』, 研究集会「保型表現 ・L 函数 ・周期の研究」(2006 年 1 月 23 日〜27 日), 数理解析研究所講究録 (予定)

[Ig] Igusa, J., *Class number of a definite quaternion with prime discriminant*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 44 (1958) 312–314.

[Kh] Khare, C., *Serre's modularity conjecture I, II*, Lecture Notes for Eigenvariety Program (February 1-May 31, 2006) at the Harvard Mathematics Department and the Clay Mathematics Institute. (`http://www.math.harvard.edu/ev/documents.html`)

[Ko1] Kottwitz, R. *Points on some Shimura varieties over finite fields*, J. Amer. Math. Soc. 5 (1992), no. 2, 373–444.

[Ko2] Kottwitz, R., *On the λ-adic representations associated to some simple Shimura varieties*, Invent. Math. 108 (1992), no. 3, 653–665.

[Ko3] Kottwitz, R., *Shimura varieties and λ-adic representations*, Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol. I (Ann Arbor, MI, 1988), 161–209, Perspect. Math., 10, Academic Press, Boston, MA, 1990.

[Mi1] Milne, J. S., *The action of an automorphism of C on a Shimura variety and its special points*, Arithmetic and geometry, Vol. I, 239–265, Progr. Math., 35, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983.

[Mi2] Milne, J. S., *Introduction to Shimura varieties*, Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties, 265–378, Clay Math. Proc., 4, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[Oh] Ohta, M., *On theta series mod p*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 28 (1981), no. 3, 679–686 (1982).

[Ra1] Rapoport, M., *On the bad reduction of Shimura varieties*, Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol. II (Ann Arbor, MI, 1988), 253–321, Perspect. Math., 11, Academic Press, Boston, MA, 1990.

[Ra2] Rapoport, M., *A guide to the reduction modulo p of Shimura varieties*, Automorphic forms I, Astérisque No. 298 (2005), 271–318.

[RZ1] Rapoport, M., Zink, Th., *Über die lokale Zetafunktion von Shimuravarietäten. Monodromiefiltration und verschwindende Zyklen in ungleicher Charakteristik*, Invent. Math. 68 (1982), no. 1, 21–101.

[RZ2] Rapoport, M., Zink, Th., *Period spaces for p-divisible groups*, Annals of Mathematics Studies, 141. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.

[SS] Schneider, P., Stuhler, U., *The cohomology of p-adic symmetric spaces*, Invent. Math. 105 (1991), no. 1, 47–122.

[Sh] Shimura, G., *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, Reprint of the 1971 original. Publications of the Mathematical Society of Japan, 11. Kanô Memorial Lectures, 1. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1994.

[TY] Taylor, R., Yoshida, T., *Compatibility of local and global Langlands correspondences*, J. Amer. Math. Soc. (2006),

[Ta] Taylor, R., *Automorphy for some l-adic lifts of automorphic mod l representations. II*, preprint, 2006.

[Yo1] 吉田輝義, 『$GL(n)$ の大域・局所 Langlands 対応』, 第 50 回代数学シンポジウム報告集, 徳島大学, 2005. (`http://www.math.okayama-u.ac.jp/~yoshino/algsymposium05.html`)

[Yo2] Yoshida, T., *Weight spectral sequence and Hecke correspondence on Shimura varieties*, preprint, 2006.