

A型特異点の安定性条件

広島大学大学院理学研究科
石井 亮

植田一石, 上原北斗との共同研究

1 序文

三角圏における安定性条件および安定性条件の空間というものが Bridgeland により導入された. 本稿では, 安定性条件の定義を解説し, A型クライン特異点の最小解消の導来圏の場合の, 植田一石, 上原北斗両氏との共同研究 [15] について報告する.

$$f : X \rightarrow Y = \text{Spec } \mathbb{C}[x, y, z]/(xy + z^{n+1})$$

を A_n 型特異点の最小解消, $Z = f^{-1}(0)$ をその例外集合とする. $\mathcal{D} = D_Z(X)$ を X 上の接続層で台が Z に含まれるものの導来圏, \mathcal{C} を $\mathbb{R}f_*E = 0$ となる $E \in \mathcal{D}$ のなす充満部分圏とする. [15] の主結果は次の定理である.

定理 1.1 ([15]). \mathcal{D} の安定性条件の空間 $\text{Stab } \mathcal{D}$ は連結かつ単連結である. また, $\text{Stab } \mathcal{C}$ は連結 (かつ単連結) である.

なお, $\text{Stab } \mathcal{C}$ の (一つの連結成分の) 単連結性は Thomas [22] により示されている. これらの結果は Bridgeland が $K3$ 曲面について予想していることの類似である.

2 曲線上の接続層の安定性

安定性条件の定義を述べる前に, 代数曲線上の接続層の安定性や Harder-Narasimhan フィルトレーションについて, 復習する.

2.1 安定性, 半安定性

ベクトル束のモジュライを構成するために, 安定性および半安定性という概念が導入された. 曲線上のベクトル束は, 捻れのない接続層と同一視される

が、(半)安定性の概念は捻れ層の場合にも（曲線上の場合は自明な形で）拡張される。

定義 2.1. 射影代数曲線 C 上の接続層 E が半安定とは、

- E は捻れ層であるか、
- E は捻れがなく、任意の非自明な部分層 $F \subset E$ について、

$$\frac{\deg F}{\text{rank } F} \leq \frac{\deg E}{\text{rank } E}$$

となること。 E が安定とは、 E がある点 $x \in C$ の構造層 \mathcal{O}_x に同型であるか、捻れがなく部分層についての上の不等式が等号なしで成立すること、である。

ここで、

$$Z(E) = -\deg E + \sqrt{-1} \text{rank } E \in \mathbb{C} \quad (2.1)$$

とおくと、上の定義は次のように言い換えられる。 E が安定 (or 半安定) とは、任意の非自明な部分層 $F \subset E$ について、

$$\arg Z(F) < (\text{or } \leq) \arg Z(E) \quad (2.2)$$

となることである。

2.2 Harder-Narasimhan フィルトレーション

E を非特異射影代数曲線 C 上の接続層とする。 $Z(E)$ は (2.1) で定義されるものとする。 E の Harder-Narasimhan (HN) フィルトレーションとは、次の定理に現れるものである：

定理 2.2. 接続層 E のフィルトレーション

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_{n-1} \subset E_n = E$$

で、次を満たすものが一意的に存在する。

- E_i/E_{i-1} は半安定
- $\arg Z(E_i/E_{i-1}) > \arg Z(E_{i+1}/E_i)$

さらに、 E が半安定のとき、 E の Jordan-Hölder (JH) フィルトレーションとは、 E_i/E_{i+1} が安定で $\arg Z(E_i/E_{i+1})$ が i に依らないようなフィルトレーションである。これは一意的ではないが、 $\oplus E_i/E_{i-1}$ は同型を除いて一意である。

この HN フィルトレーションは導来圏の対象に拡張できる。 $E = E^\bullet$ を C 上の接続層の有界余鎖複体とする。 E^\bullet のフィルトレーション $\{\tau_{<n} E^\bullet\}$ で $(\tau_{<n+1} E^\bullet)/(\tau_{<n} E^\bullet) \cong \mathcal{H}^n(E^\bullet)[-n]$ となるもの (canonical filtration) をとる ($[-]$ は余鎖複体のシフトを表す)。さらにそれを接続層 $\mathcal{H}^n(E)$ の HN フィルトレーションにより細分すると、次のような導来圏における特三角の列が得られる：

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 = E_0 & \longrightarrow & E_1 & \longrightarrow & E_2 & \cdots \longrightarrow & E_{n-1} & \longrightarrow & E_n = E \\
 & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow \\
 & & A_1 & & A_2 & & & & A_n
 \end{array}$$

ここで、 A_j は半安定層のシフトであって、 $i > j$ なら $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^b(C)}(A_i, A_j) = 0$ であることが、作り方からわかる。

3 安定性条件

\mathcal{T} を三角圏、 $K(\mathcal{T})$ をその Grothendieck 群とする。Douglas たち [1, 6, 7, 8, 9] の BPS D-brane についての安定性の研究をもとに、Bridgeland [4] は三角圏 \mathcal{T} における安定性条件を定義した。本説の結果はすべて [4] からの引用である。

3.1 安定性条件の定義

定義 3.1. \mathcal{T} における安定性条件 $\sigma = (Z, \mathcal{P})$ とは、

- 加群の準同型 $Z : K(\mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{C}$
- 各 $\phi \in \mathbb{R}$ に対して与えられる充満加法的部分圏 $\mathcal{P}(\phi) \subset \mathcal{T}$

の組で、次の条件を満たすものの事を言う。

- (i) $0 \neq E \in \mathcal{P}(\phi)$ ならば、 $Z(E) = m(E) \exp(i\pi\phi)$ (ただし $m(E) \in \mathbb{R}_{>0}$, よって特に $Z(E) \neq 0$) .
- (ii) 各 $\phi \in \mathbb{R}$ について、 $\mathcal{P}(\phi + 1) = \mathcal{P}(\phi)[1]$,
- (iii) $\phi_1 > \phi_2$ かつ $A_j \in \mathcal{P}(\phi_j)$ ($j = 1, 2$) ならば、 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(A_1, A_2) = 0$,

(iv) $0 \neq E \in \mathcal{T}$ に対し, 実数

$$\phi_1 > \phi_2 > \cdots > \phi_n$$

と特三角の列

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 = E_0 & \longrightarrow & E_1 & \longrightarrow & E_2 & \cdots & \longrightarrow & E_{n-1} & \longrightarrow & E_n = E \\
 & & \swarrow & & \swarrow & & & \swarrow & & \swarrow \\
 & & A_1 & & A_2 & & & A_n & &
 \end{array} \tag{3.1}$$

で $A_j \in \mathcal{P}(\phi_j)$ をみたすものが存在する.

Z を central charge, (3.1) における特三角の列を E の Harder-Narasimhan (HN) フィルトレーション という. $\mathcal{P}(\phi)$ の対象は半安定 (semi-stable) であるといい, (それが零対象でないとき) ϕ をその phase という. $\mathcal{P}(\phi)$ はアーベル圏になることがわかる. $\mathcal{P}(\phi)$ の単純対象 (非自明な部分対象を持たない非零対象) は安定 (stable) であるという.

例 3.2. C を非特異射影代数曲線, \mathcal{T} を C 上の接続層の有界導来圏とする. $Z : K(\mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{C}$ を (2.1) のように定め, $0 < \phi \leq 1$ のとき $\mathcal{P}(\phi)$ は $\arg Z(E) = \pi\phi$ となる半安定層のなす充満部分圏, 一般の $\phi \in \mathbb{R}$ については, $\phi - n \in (0, 1]$ となる $n \in \mathbb{Z}$ を取って, $\mathcal{P}(\phi) = \mathcal{P}(\phi - n)[n]$ とする. すると, 2.2 で見たように, これは \mathcal{T} の安定性条件となる.

$\sigma = (Z, \mathcal{P})$ を \mathcal{T} の安定性条件とする. 区間 $I \subset \mathbb{R}$ に対し, $\mathcal{P}(\phi)$ ($\phi \in I$) の生成する extension closed subcategory を $\mathcal{P}(I)$ と書く. すなわち, $\mathcal{P}(I)$ は

- $\mathcal{P}(\phi)$ ($\phi \in I$) を含み,
- $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A[1]$ が特三角で $A, C \in \mathcal{P}(I)$ ならば $B \in \mathcal{P}(I)$

という性質を満たす \mathcal{T} の最小の充満部分圏とする.

補題 3.3. 任意の $\phi \in \mathbb{R}$ に対し, $\mathcal{P}((\phi, \phi + 1])$ は有界な t 構造のハートである.

このようにして, 安定性条件 σ が一つ与えられれば, 有界な t 構造がたくさんできる. 特に, $\mathcal{P}((0, 1])$ を σ に付随する (t 構造の) ハートという. 逆に, t 構造と Z により安定性条件を決定できる:

命題 3.4. \mathcal{T} の安定性条件を与えることは, \mathcal{T} の有界な t 構造 (そのハートを \mathcal{A} とする) と, $Z : K(\mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{C}$ の組で,

- $0 \neq E \in \mathcal{A}$ なら, $\Im m Z(E) > 0$ または $Z(E) \in \mathbb{R}_{<0}$,

- Z は \mathcal{A} 上 *HN property* を持つ, すなわち, (2.2) により定義される半安定性に関して, \mathcal{A} の任意の対象は 2.2 と同様の意味での *HN filtraion* を持つ

という性質を持つものを与える事と同値である.

例 3.5. \mathcal{A} が長さ有限のアーベル圏で, その単純対象の同型類は S_1, \dots, S_n の有限個であるとする. $Z: K(\mathcal{A}) = \bigoplus_i Z[S_i] \rightarrow \mathbb{C}$ を $\Im Z(S_i) > 0$ または $Z(S_i) \in \mathbb{R}_{<0}$ ($i = 1, \dots, n$) となる任意の準同型とすると, これは $\mathcal{T} = D^b(\mathcal{A})$ 上の安定性条件を定める. ($\mathcal{T} = D^b(\mathcal{A})$ でなくても, \mathcal{A} が \mathcal{T} の有界な t 構造のハートであればよい.)

3.2 安定性条件の空間

安定性条件の定義において, 半安定な対象の性質については, 殆ど何も規定されていないので, 例えば 2.2 節におけるような JH フィルトレーションの存在は保証されない. 安定性条件を集めて来てよい空間を作るためには, もう一つ条件を課す必要がある.

定義 3.6. 安定性条件 $\sigma = (Z, \mathcal{P})$ が局所有限とは, 正数 $\eta > 0$ を十分小さく取れば, 各 $t \in \mathbb{R}$ に対し $\mathcal{P}(t - \eta, t + \eta)$ が (準アーベル圏として) 長さ有限になることである.

局所有限な安定性条件に関して半安定な対象は JH フィルトレーションをもつ. 以後登場する安定性条件はみな局所有限である.

三角圏 \mathcal{T} に対して, その局所有限な安定性条件の全体を $\text{Stab } \mathcal{T}$ で表す. これには自然な位相が定義できる. 写像

$$\begin{array}{ccc} Z: \text{Stab } \mathcal{T} & \rightarrow & \text{Hom}(K(\mathcal{T}), \mathbb{C}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (Z, \mathcal{P}) & \mapsto & Z \end{array} \quad (3.2)$$

に関して次が成り立つ:

定理 3.7 ([4, Theorem 1.2]). $\text{Stab } \mathcal{T}$ の各連結成分 Σ に対し, ベクトル空間 $\text{Hom}(K(\mathcal{T}), \mathbb{C})$ の部分空間 $V(\Sigma)$ とその上の線型な位相があつて, $Z|_{\Sigma}$ は局所同相となる.

非特異射影代数多様体の場合, 一般には K 群は巨大であるから, 無限次元のものが出てくると思われる. そのような場合には「数値的な」安定性条件のみを考えると有限次元の多様体を得られる. 以降の我々の場合には, K 群は有限ランクなので, そのような事を考える必要はない.

4 A型特異点の最小解消

ここでは我々の考える三角圏について説明する.

$$f: X \rightarrow \text{Spec } \mathbb{C}[x, y, z]/(xy + z^{n+1})$$

を A_n 型特異点の最小解消とする. この例外集合を

$$Z = f^{-1}(0) = C_1 \cup \cdots \cup C_n$$

とおく. ただし, $C_i \cong \mathbb{P}^1$ は (-2) -曲線で $|i - j| > 1$ ならば $C_i \cap C_j = \emptyset$ であるとする.

\mathcal{D} を Z に台を持つ X 上の接続層の有界導来圏, $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ を $\mathbb{R}f_* E = 0$ となる対象のなす充満部分圏とする.

4.1 安定性条件の例 (1)

β, ω を X 上の因子, ω は豊富とする.

$$Z_{\beta, \omega}(E) = -\chi(E) + (\beta + \sqrt{-1}\omega) \cdot c_1(E)$$

とする. ($\chi(E) = \sum_i (-1)^i \dim H^i(E)$.) すると, \mathcal{D} の標準的 t 構造 ($\mathcal{A} = \text{coh}_Z(X)$) と $Z_{\beta, \omega}$ の組は, 命題 3.4 の条件を満たし, \mathcal{D} の安定性条件 $\sigma_{\beta, \omega}$ が定まる. この場合の層の HN フィルトレーションは, Simpson 流の ω -安定性を β でひねったものから定まるものであるが, β, ω は実係数の因子として構わない.

点 $x \in Z$ の構造層 \mathcal{O}_x は $\text{coh}_Z(X)$ の単純対象であるから, $\sigma_{\beta, \omega}$ に関して安定である. 逆に

$$V = \{\sigma = (Z, \mathcal{P}) \mid \mathcal{O}_x \text{ は } \sigma\text{-安定}, \mathcal{O}_x \in \mathcal{P}(1) \text{ かつ } Z(\mathcal{O}_x) = -1 (\forall x \in Z)\} \\ \subset \text{Stab } \mathcal{D}$$

とおくと,

補題 4.1. $V = \{\sigma_{\beta, \omega} \mid \beta, \omega \text{ は実係数因子}, \omega \text{ は豊富}\}$ である. 特に, V は連結.

さらに,

$$U = \{\sigma = (Z, \mathcal{P}) \mid \mathcal{O}_x \text{ は } \sigma\text{-安定} (\forall x \in Z)\} \subset \text{Stab } \mathcal{D}$$

とおくと, $\sigma \in U$ についての \mathcal{O}_x の phase は $x \in Z$ に依らない事がわかるので,

系 4.2. U も連結.

定義 4.3. $\text{Stab}_0 \mathcal{D}$ を, U を含む $\text{Stab } \mathcal{D}$ の連結成分とする.

結果的にはこれが唯一の連結成分となる訳である.

4.2 McKay 対応

3次元までの McKay 対応は [17], [5] により導来圏のレベルで確立された. X は \mathbb{C}^2 の有限群 $G(\cong \mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z})$ による商である. すると, \mathbb{C}^2 上の G -同変接続層の圏 $\text{coh}^G(\mathbb{C}^2)$ を考える事ができ, これは有限生成 $\mathbb{C}[x, y] \rtimes G$ -加群の圏と同一視される. McKay 対応は圏同値

$$D^b(\text{coh } X) \cong D^b(\text{coh}^G(\mathbb{C}^2)) \quad (4.1)$$

と表される.

$\text{coh}_0^G(\mathbb{C}^2) \subset \text{coh}^G(\mathbb{C}^2)$ を原点 $\{0\}$ に台を持つようなもののなす充満部分圏とする. G の既約表現を ρ_0, \dots, ρ_n とすると,

$$S_i := \rho_i \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_0 \quad (i = 0, \dots, n)$$

は $\text{coh}_0^G(\mathbb{C}^2)$ を生成する単純対象である. よって, それらが三角圏として \mathcal{D} を生成する. 圏同値 (4.1) の取り方はいろいろあるが, 以後

$$\omega_Z[1], \mathcal{O}_{C_1}(-1), \dots, \mathcal{O}_{C_n}(-1)$$

がそれぞれ

$$S_0, S_1, \dots, S_n$$

に対応するように固定する. ここで, ρ_0 が自明な表現であるとしている.

また, (4.1) の左辺における大域切断の関手 $\mathbb{R}f_*$ は, 右辺においては G -不変部分を取る関手に対応する. 従って, \mathcal{D} の生成元のうち, S_1, \dots, S_n が \mathcal{C} を生成する.

4.3 安定性条件の例 (2)

\mathcal{D} の t 構造として $D^b(\text{coh}_0^G(\mathbb{C}^2))$ の標準的 t 構造 (の McKay 対応による像) をとる. このハートは長さ有限であり, $Z: K(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$\text{Im } Z(S_i) > 0 \text{ または } Z(S_i) \in \mathbb{R}_{<0}$$

となるように定めれば, 例 3.5 のように安定性条件が定まる. このようにしてできる安定性条件の全体を V' とすると, これも $\text{Stab } \mathcal{D}$ の連結な部分集合である. 次の例からわかるように, V' も $\text{Stab}_0 \mathcal{D}$ に含まれている.

例 4.4. $\omega \in \mathcal{A}(X/Y)$ をすべての j について $\omega \cdot C_j = 1$ となるように取る. さらに $\beta = 0$ とおくと, 4.1 節にあるように, $\text{coh}_Z(X)$ と $Z_{0,\omega}$ の組は点 $\sigma \in V$ を定め,

$$\begin{aligned} Z_{0,\omega}(\mathcal{O}_x) &= -1, \\ Z_{0,\omega}(\mathcal{O}_{C_j}(-1)) &= \sqrt{-1} \quad (\forall j), \\ Z_{0,\omega}(\omega_Z) &= 1 + n\sqrt{-1} \end{aligned}$$

を満たす. さらに, すべての $\mathcal{O}_{C_j}(-1)$ および ω_Z は σ -安定であることが容易にわかる. そこで, $\alpha \in (0, 1/2)$ を $\tan(\pi\alpha) > n$ となるように取れば, 傾いたハート $\mathcal{P}((\alpha, \alpha + 1])$ は $\omega_Z[1], \mathcal{O}_{C_1}(-1), \dots, \mathcal{O}_{C_n}(-1)$ のすべてを含む. これらは, McKay 対応により S_0, \dots, S_n に対応する. このことから,

$$\mathcal{P}((\alpha, \alpha + 1]) = \text{coh}_0^G(\mathbb{C}^2).$$

となる. このことは, $\sigma \in V$ の phase を回転させると V' の元が出来ることを示している.

4.4 自己圏同値

三角圏 \mathcal{T} に対し, その三角圏としての自己圏同値の同型類全体のなす群を $\text{Auteq } \mathcal{T}$ で表す¹. 定義からわかるように, $\text{Auteq } \mathcal{T}$ は $\text{Stab } \mathcal{T}$ に作用する.

いま \hat{X} を X の Z に沿った形式的完備化とすると,

$$\text{Auteq } \mathcal{D} \supset (\text{Aut } \hat{X} \times \text{Pic } X) \times \mathbb{Z}$$

である. ここに, $\text{Aut } \hat{X}$ は引き戻しで, $\text{Pic } X \cong \text{Pic } \hat{X}$ はテンソル積で, $1 \in \mathbb{Z}$ は余鎖複体のシフトで作用する. これ以外の自己圏同値として, 球状ツイスト関手というものがある.

定義 4.5. $E \in \mathcal{D}$ が球状とは,

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(E, E[i]) \cong \begin{cases} k & \text{if } i = 0, 2, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

例 4.6. (-2) 曲線の鎖の上の直線束, 例えば \mathcal{O}_{C_i} , は \mathcal{D} の球状対象である. 4.2 節の S_i も球状である.

定義 4.7. $E \in \mathcal{D}$ に対して, ツイスト関手 T_E を, 特三角

$$\mathbb{R}\text{Hom}(E, \alpha) \otimes_{\mathbb{C}} E \rightarrow \alpha \rightarrow T_E(\alpha) \rightarrow$$

により定義する.

Seidel-Thomas [21] によれば, E が球状のとき, T_E は自己圏同値になる.

$$\text{Br}(\mathcal{D}) = \langle T_{S_0}, \dots, T_{S_n} \rangle \subset \text{Auteq } \mathcal{D}$$

とおくと,

¹ $\text{Out}(\mathcal{T})$ のように書く流儀もある.

定理 4.8 ([16] + [15]Appendix). $\text{Auteq } \mathcal{D}$ は次のように書ける.

$$\text{Auteq } \mathcal{D} = (\text{Aut } \hat{X} \rtimes (\text{Br}(\mathcal{D}) \rtimes (\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}))) \times \mathbb{Z}$$

ここで, $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ は S_i を S_{i+1} にうつすようなもので生成され, $\text{Pic } X$ は $\text{Br}(\mathcal{D}) \rtimes (\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z})$ に含まれている.

Seidel-Thomas [21] によれば, $\text{Br}(\mathcal{D})$ の生成元 $\{T_{S_i}\}$ はブレイドの関係式を満たす. すなわち, $B_n^{(1)}$ を $\sigma_0, \dots, \sigma_1$ で生成され

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, & i = 0, \dots, n, \\ \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i, & |i - j| > 2. \end{aligned}$$

という基本関係式をもつ群とする. ただし, $\sigma_{n+1} = \sigma_0$ としている. すると, $\sigma_i \mapsto T_{S_i}$ により, 全射準同型

$$\rho : B_n^{(1)} \rightarrow \text{Br}(\mathcal{D})$$

が定まる.

さて, $\text{Auteq } \mathcal{D}$ は $\text{Stab } \mathcal{D}$ に作用する. 次節で説明するように, $\text{Br}(\mathcal{D})$ の作用は自由であり, $\text{Stab } \mathcal{D}$ の単連結性は, ρ の単射性を意味することになる.

4.5 Bridgeland の結果と予想

Bridgeland は [3] において K3 曲面の導来圏の (数值的) 安定性条件の空間の一つの連結成分および自己圏同値の群を K3 曲面の周期領域と関係づけ, ある予想を残した. その結果をクライン特異点の場合に翻訳したのが [2] である. \mathcal{D} の Grothendieck 群 $K(\mathcal{D})$ の元 $E, F \in K(\mathcal{D})$ について,

$$\chi(E, F) = \sum_i (-1)^i \dim \text{Hom}_{\mathcal{D}}^i(E, F), \quad (4.2)$$

と定義する. Riemann-Roch を使えば

$$\chi(E, F) = -c_1(E) \cdot c_1(F).$$

となり, χ により $K(\mathcal{D})$ はアフィンルート格子と見なす事が出来る. あるいは, McKay 対応を介して \mathbb{C}^2 上の同変連接層を使って書くと, 行列 $(\chi(S_i, S_j))$ がアフィン型の Cartan 行列になる, ということになる.

従って, $\text{Hom}(K(\mathcal{D}), \mathbb{C})$ はアフィンリー環の Cartan 部分代数 $\hat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}$ だと思えることができる. A_n 型の場合には,

$$\mathfrak{h} = \{(a_1, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid a_1 + \dots + a_{n+1} = 0\}$$

と書くと, $\widehat{\mathfrak{h}}$ におけるアフィンルート超平面の補集合 $\widehat{\mathfrak{h}}^{\text{reg}}$ は

$$\widehat{\mathfrak{h}}^{\text{reg}} = \{(a_1, \dots, a_{n+1}, b) \in \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C} \mid a_i - a_j + bd \neq 0 \text{ for } i \neq j \text{ and } d \in \mathbb{Z}\}.$$

という風に見える。

$\widehat{\mathfrak{h}}^{\text{reg}}$ にはアフィン Weyl 群 \widehat{W} が自由に作用するが, $\widehat{\mathfrak{h}}^{\text{reg}}/\widehat{W}$ の基本群が $B_n^{(1)} \times \mathbb{Z}$ になることが知られている [10].

定理 4.9 ([2]). 連結成分 $\text{Stab}_0 \mathcal{D}$ に写像 (3.2) を制限すると, $\text{Stab}_0(\mathcal{D})$ は $\widehat{\mathfrak{h}}^{\text{reg}}/\widehat{W}$ の正則被覆空間となる. $\text{Br}(\mathcal{D}) \times \mathbb{Z}$ は $\text{Stab}_0 \mathcal{D}$ を保ち, 被覆変換群として作用する. ただし, この \mathbb{Z} は 2 シフト [2] で生成される群である.

すると, 基本群から被覆変換群への全射

$$B_n^{(1)} \times \mathbb{Z} \rightarrow \text{Br}(\mathcal{D}) \times \mathbb{Z}$$

ができるが, これは $\rho \times \text{id}$ である. 特に, $\text{Stab}_0(\mathcal{D})$ が不変被覆であることと, ρ が単射であることは同値である. Bridgeland は K3 曲面の場合に,

- $\text{Auteq} \mathcal{D}$ は連結成分 $\text{Stab}_0 \mathcal{D}$ を保存する. (より強くは, $\text{Stab} \mathcal{D}$ は連結である².)
- $\text{Stab}_0 \mathcal{D}$ は単連結である.

に相当する事を予想している [3]. これらが, 本稿における \mathcal{D} と \mathcal{C} の場合に実際に成り立つというのが [15] の主結果である.

5 $\text{Stab} \mathcal{D}$ の連結性

$\text{Stab} \mathcal{D}$ の連結性の証明の方針を述べる.

- $\text{Stab} \mathcal{D}$ の任意の連結成分 Σ に対し, 定理 3.7 におけるベクトル空間 $V(\Sigma)$ は $\text{Hom}(K(\mathcal{D}), \mathbb{C})$ 全体に一致する. 特に, $\sigma = (Z, \mathcal{P}) \in \Sigma$ で, $Z(\mathcal{O}_x) \in \mathbb{R}_{<0}$ かつ球状対象 E に対しては $Z(E) \notin \mathbb{R}$ となるものが存在する.
- $\sigma \in \Sigma$ を上記のように取る. このとき, σ -安定な $\omega \in \mathcal{P}(1)$ および σ -安定かつ球状な $E_1, E_2 \in \mathcal{P}((0, 1])$ で, ハート $\mathcal{P}((0, 1])$ における短完全列

$$0 \rightarrow E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow \omega \rightarrow 0$$

を構成しかつ $\text{Ext}^1(E_1, E_2) = 0$ となるようなものが存在する.

²ICM 2006 における講演では強い方の予想を述べた.

- (iii) すると, [16] の議論から, $\Phi \in \text{Br}(\mathcal{D})$ をうまくとると, $\Phi(\omega) \cong \mathcal{O}_x[d]$ とかける (ただし, $x \in Z, d \in \mathbb{Z}$). この, [16] における議論で A 型であることを本質的に使う.
- (iv) $\tau \in \text{Stab}(\mathcal{D})$ と $x \in C_i \subset Z$ に対して, \mathcal{O}_x が τ -安定とする. このとき, 台に x を含まない対象の τ に関する HN フィルトレーションは, 台に x を含まないものだけで構成される. 特に, $Z' = C_1 \cup \dots \cup C_{i-1}$, $Z'' = C_{i+1} \cup \dots \cup C_n$ とおくと, τ は $D_{Z'}(X)$ および $D_{Z''}(X)$ の安定性条件をそれぞれ定める.
- (v) n に関する帰納法により, $\Phi \in \text{Br}(\mathcal{D})$ をうまく取ると, $\Phi\sigma$ に関して全ての摩天楼層 \mathcal{O}_x が安定になる. すなわち, $\Phi\sigma \in U \subset \text{Stab}_0(\mathcal{D})$ となる.
- (vi) $\text{Br}(\mathcal{D})$ の作用は $\text{Stab}_0 \mathcal{D}$ を保存したから, $\sigma \in \text{Stab}_0(\mathcal{D})$ となる.

6 $\text{Stab} \mathcal{D}$ の単連結性

$\text{Br} \mathcal{D}$ の単連結性は, ρ の単射性と同値であった. そこで, ρ の単射性を示すことになるが, これはまず標数 2 の体上で示し, それを任意標数に持ち上げることになる.

6.1 標数 2 の場合

A_n 特異点に対するホモロジー的ミラー対称性 (もともとは植田の修士論文) を用いる.

- (i) A_n 型特異点のミラーは, [12, 13] の構成に従い, [11] で導入された. アフィン多様体

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^\times \mid xyz = z^{n+1} - 1\}$$

の上に自然な完全シンプレクティック形式を考える. W から $z \in \mathbb{C}^\times$ への射影は, 2 次曲線の族であり, 1 の $n+1$ 乗根の上で退化している. \mathbb{C}^\times 内で 1 の $n+1$ 乗根 2 つだけを結ぶ, 自己交差のない (実) 曲線の上に, 消滅サイクルを並べて, W のラグランジュ球面を作ることが出来る.

- (ii) $\zeta = \exp[2\pi\sqrt{-1}/(n+1)]$ とおく. ζ^i と ζ^{i+1} を結ぶ線分 c_i の上にあるラグランジュ球面を $\{L_i\}_{i=0}^n$ とする. これら (に次数付けをしたもの) のなす深谷圏を $\mathfrak{Suf} W$ と書く. すると, A_n 型特異点のホモロジー的ミラー対称性

$$\mathcal{D} \cong D^b \mathfrak{Suf} W$$

が成立する.

- (iii) Seidel [20, Proposition 9.1] によると, \mathcal{D} における球状ツイスト T_{S_i} は $D^b \mathfrak{Fuk} W$ においてシンプレクティック Dehn ツイスト τ_i に一致する. ラグランジュ球面の \mathbb{C}^\times における像である曲線については, 隣接する $n+1$ 乗根が図1のように入れ替わるように, 連続的に変形することになる. (注: この説明は不正確である. そのようなラグランジュ球面も含むように $\mathfrak{Fuk} W$ を拡張しても $D^b \mathfrak{Fuk} W$ は変わらないということも [20, Proposition 9.1] から従うのである.)

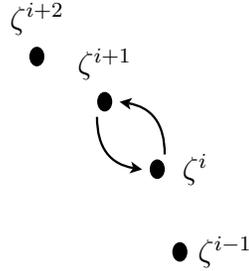


Figure 1: The Dehn twist τ_i

- (iv) Khovanov-Seidel [19, Theorem 1.3] により, 二つの (次数付き) ラグランジュ球面間の Floer コホモロジーの次元は, その \mathbb{C}^\times における像の (次数付き) 曲線間の幾何学的交点数の2倍に等しい. ここで, 標数 2 という仮定を用いている.
- (v) $b \in B_n^{(1)}$ が $\rho(b) = \text{id}$ を満たしたとする. $b(S_j) \cong S_j$ だから, 任意の $b' \in B_n^{(1)}$ に対し $\text{Hom}(b'(S_i), b(C_j)) \cong \text{Hom}(b'(S_i), S_j)$. 上記のことから, $b'(c_i)$ と $b(c_j)$ の幾何学的交点数は $b'(c_i)$ と c_j の交点数に等しい. すると, $b(c_i) \simeq c_i$ (isotopic) であることがわかる.
- (vi) $B_n^{(1)}$ の幾何学的記述 ([18] を参照) から, $b = \text{id}$ が従う.

6.2 標数一般の場合

標数一般の体 k 上の場合の $\rho = \rho_k$ の単射性を, 標数 2 の $\rho = \rho_2$ の場合に帰着する.

- (i) A_n 型特異点の最小解消は, $\text{Spec } \mathbb{Z}$ 上滑らかな族であり, 例外集合の既約分解も滑らかである. 球状ツイスト関手は \mathbb{Z} 上も定義できて, それは係数拡大と可換である.
- (ii) \mathbb{Z} 上の球状対象のコホモロジー層は, \mathbb{Z} 上平坦である. ここでは, 球状対象の変形が一意であること ([14] を適用) を使う.

- (iii) よって, $\mathcal{O}_{C_i}(d)$ の形の対象に球状ツイストを施して行ったときにできる球状対象のコホモロジー層の形は, 標数に依らない.
- (iv) $\rho_k(b) = \text{id}$ とすると, 上のことから, $\rho_2(b)(\mathcal{O}_{C_i}(d)) \cong \mathcal{O}_{C_i}(d)$ が成り立つ. これが, すべての i と d で成り立つとすると, $\rho_2(b) = \text{id}$ でなければならない. 標数 2 の場合の結果から, $b = \text{id}$ となる.

7 $\text{Stab } \mathcal{C}$ の連結性

$\text{Stab } \mathcal{D}$ の連結性を示す際には摩天楼層 \mathcal{O}_x が重要な役割を果たした. $\text{Stab } \mathcal{C}$ には摩天楼層は含まれず, 同様のやり方はできない. ここでは, [16] の結果と, \mathcal{C} についてのホモロジー的ミラー対称性を用いる.

\mathcal{C} は球状対象 S_1, \dots, S_n により生成される. \mathcal{C} の安定性条件の例は, 例 3.5 により構成できる.

$$\text{Br}(\mathcal{C}) = \langle T_{S_1}, \dots, T_{S_n} \rangle \subset \text{Auteq } \mathcal{D}$$

とおく.

- (i) $\text{Stab } \mathcal{C}$ の任意の連結成分 Σ に対し, 定理 3.7 におけるベクトル空間 $V(\Sigma)$ は $\text{Hom}(K(\mathcal{C}), \mathbb{C})$ 全体に一致する. 特に, $\sigma = (Z, \mathcal{P}) \in \Sigma$ で, 球状対象 E に対しては $Z(E) \notin \mathbb{R}$ となるものが存在する. この部分は $\text{Stab } \mathcal{D}$ と同様である.
- (ii) 上の σ のハート $\mathcal{P}((0, 1])$ の単純対象はちょうど n 個の球状対象であり, それを E_1, \dots, E_n と適当に並べると, A_n 配置になる.
- (iii) [16] の議論により, \mathcal{C} の任意の球状対象は $\text{Br}(\mathcal{C})$ の元によって $S_i (\exists i, 1 \leq i \leq n)$ になる.
- (iv) Khovanov, Seidel, Thomas[19, 21] によると, \mathcal{C} のミラーは A_n 特異点の変形

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid xy = z(z-1)\cdots(z-n)\}$$

(にシンプレクティック形式と次数付けを与えたもの) であり,

$$\mathcal{C} \cong D^b \mathfrak{Fut} V$$

が成り立つ. ここで, $\mathfrak{Fut} V$ は z 平面の線分 $[i-1, i] (i = 1, \dots, n)$ の上にある (次数付き) ラグランジュ球面 L_i のなす深谷圏であり, S_i と L_i が対応している.

- (v) $D^b \mathfrak{Fuk} V$ の対象は一般には一つのラグランジュ部分多様体から定まっているとは限らないが, (iii) により, (ii) の E_i を $D^b \mathfrak{Fuk} V$ に移したものは z 平面の中で二つの整数を結ぶ曲線の上のラグランジュ球面であることがわかる.
- (vi) そうすると, $\{0, \dots, n\} \subset \mathbb{C}$ を結ぶ曲線の位相に関する簡単な議論により, $\text{Br}(\mathcal{C})$ の元を使って $\{E_1, \dots, E_n\}$ を同時に $\{S_1, \dots, S_n\}$ にすることができる.
- (vii) つまり, σ は $\text{Br}(\mathcal{C})$ の元によって, \mathcal{C} の標準的 t 構造をハートに持つようにできる. すると, $\text{Stab } \mathcal{D}$ のときと同様 $\text{Stab } \mathcal{C}$ の連結性が従う.

References

- [1] Paul S. Aspinwall and Michael R. Douglas. D-brane stability and monodromy. *J. High Energy Phys.*, (5):no. 31, 35, 2002.
- [2] Tom Bridgeland. Stability conditions and Kleinian singularities. [math.AG/0508257](#).
- [3] Tom Bridgeland. Stability conditions on $K3$ surfaces. [math.AG/0307164](#).
- [4] Tom Bridgeland. Stability conditions on triangulated categories. [math.AG/0212237](#).
- [5] Tom Bridgeland, Alastair King, and Miles Reid. The McKay correspondence as an equivalence of derived categories. *J. Amer. Math. Soc.*, 14(3):535–554 (electronic), 2001.
- [6] Michael R. Douglas. D-branes, categories and $N = 1$ supersymmetry. *J. Math. Phys.*, 42(7):2818–2843, 2001. Strings, branes, and M-theory.
- [7] Michael R. Douglas. D-branes on Calabi-Yau manifolds. In *European Congress of Mathematics, Vol. II (Barcelona, 2000)*, volume 202 of *Progr. Math.*, pages 449–466. Birkhäuser, Basel, 2001.
- [8] Michael R. Douglas. Dirichlet branes, homological mirror symmetry, and stability. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. III (Beijing, 2002)*, pages 395–408, Beijing, 2002. Higher Ed. Press.

- [9] Michael R. Douglas, Bartomeu Fiol, and Christian Römelsberger. Stability and BPS branes. *J. High Energy Phys.*, (9):006, 15 pp. (electronic), 2005.
- [10] Nguyễn Việt Dũng. The fundamental groups of the spaces of regular orbits of the affine Weyl groups. *Topology*, 22(4):425–435, 1983.
- [11] Jiro Hashiba and Michihiro Naka. Landau-Ginzburg description of D-branes on ALE spaces. *Nuclear Phys. B*, 599(1-2):361–380, 2001.
- [12] Kentaro Hori, Amer Iqbal, and Cumrun Vafa. D-branes and mirror symmetry. hep-th/0005247.
- [13] Kentaro Hori and Cumrun Vafa. Mirror symmetry. hep-th/0002222, 2000.
- [14] Michi-aki Inaba. Toward a definition of moduli of complexes of coherent sheaves on a projective scheme. *J. Math. Kyoto Univ.*, 42(2):317–329, 2002.
- [15] Akira Ishii, Kazushi Ueda, and Hokuto Uehara. Stability conditions on A_n -singularities. math.AG/0609551.
- [16] Akira Ishii and Hokuto Uehara. Autoequivalences of derived categories on the minimal resolutions of A_n -singularities on surfaces. *J. Differential Geom.*, 71(3):385–435, 2005.
- [17] M. Kapranov and E. Vasserot. Kleinian singularities, derived categories and Hall algebras. *Math. Ann.*, 316(3):565–576, 2000. math.AG/9812016.
- [18] Richard P. Kent, IV and David Peifer. A geometric and algebraic description of annular braid groups. *Internat. J. Algebra Comput.*, 12(1-2):85–97, 2002. International Conference on Geometric and Combinatorial Methods in Group Theory and Semigroup Theory (Lincoln, NE, 2000).
- [19] Mikhail Khovanov and Paul Seidel. Quivers, Floer cohomology, and braid group actions. *J. Amer. Math. Soc.*, 15(1):203–271 (electronic), 2002.
- [20] Paul Seidel. Homological mirror symmetry for the quartic surface. math.AG/0310414.

- [21] Paul Seidel and Richard Thomas. Braid group actions on derived categories of coherent sheaves. *Duke Math. J.*, 108(1):37–108, 2001.
- [22] Richard P. Thomas. Stability conditions and the braid group. [math.AG/0212214](#).