素数グラフと一般素数グラフ

飯寄　信保 (Iiyori, Nobuo)
所属：山口大学教育学部

この小論は、講演原稿をもとに素数グラフ・一般素数グラフの理論についてのひとつの流れを解説したものである。それゆえ、多数ある素数グラフの応用例については、まったく言及していない。また、できるだけ予備知識を仮定しないように書いたつもりであるが、記号、基本的な知識等については鈴木道夫先生の本[12]、Frobenius 群の詳細な性質及び例については伊藤昇先生の本 [7] を参照してもらいたい。

1　素数グラフと一般素数グラフの定義

G を群とし、$\pi(G)$ を G の有限位数の元の位数を割りきる素数の集合とする。例えば、有限群であれば、$\pi(G)$ は群 G の位数を割りきる素数の集合である。また、$\pi(\mathbf{R}^\times) = \{2\}$, $\pi(\mathbf{C}^\times) =$ (素数全体の集合) となる。素数グラフとは、この $\pi(G)$ を点集合とする群の位数に着目して定義されるグラフである。（以下、$\pi(G) \neq \emptyset$ であるような群のみ考察する。）

定義（素数グラフ）
群 G の素数グラフ $\Gamma(G)$ は、次のような点集合 $V(\Gamma(G))$、辺集合 $E(\Gamma(G))$ をもつ多重辺やループを持たない無向グラフである。

$$V(\Gamma(G)) = \pi(G)、\ E(\Gamma(G)) = \{(p,q) \in V(\Gamma(G)) | \text{ある } g \in G \text{ があって } pq | o(g)\}.$$

例えば、G が可換群、冪零群であれば、明らかに $\Gamma(G)$ は完全グラフである。自明でない例としては、5 次の交代群 A_5 の素数グラフは、点集合が 2,3,5 の 3 点からなり、まったく辺がないようなグラフになっている。辺のあるもので簡単な例として 7 次の対称群 S_7 の素数グラフを挙げておく。一般的に言って、素数グラフが辺がない場合、さらにもっと強く連結成分が複数存在する場合において素数グラフを群の構造の観察に有効に用いることができる。その理由として、$\mathrm{com}(G)$ で $\Gamma(G)$ の連結成分の数、$\mathrm{Com}(G)$ の連結成分全体を表すことにすれば、各有限単純群 G について $\mathrm{Com}(G)$ の分類 ([11][8][10]) が完成し、任意の有限群 G に対し $\mathrm{com}(G) \leq 6$

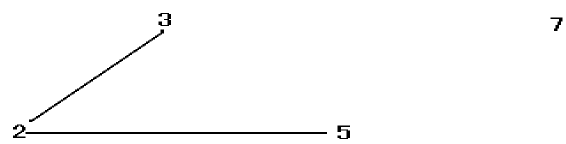

図 1: S_7 の素数グラフ

が示されているからである。これらの仕事はすべて有限単純群の分類定理の応用である。

素数グラフの雰囲気を味わっていただくために次の例を少し丁寧に解説したい。

例 1　G が有限可解群であり、その素数グラフは連結でないとする。このとき次が成立する:

G は Frobenius 群であるか、2-Frobenius 群である。

ここで、Frobenius 群、2-Frobenius 群というものが出てきたが、これらは素数グラフの議論をする上で非常に重要なものである。その定義を復習しておこう。G が非自明な部分群 H で、

$$g \in G - H \text{ に対して、} H \cap H^g = 1$$

を満たすものを持つとき G を Frobenius 群であるという。この定義は、「G は、非自明な正規部分群 N で任意の $1 \neq x \in N$ に対し、$C_G(x) \subseteq N$ を満たすものが存在する」と同値であることが知られている。これらの定義においてあらわれる H を Frobenius 補群、N を Frobenius 核という名前がつけられており、$HN = G$ が成立することが知られている。また、群 G が、正規部分群の列、$1 \subset M \subset N \subset G$ で $N, G/M$ がともに Frobenius 群である場合、G を **2-Frobenius** 群という。

さて、例 1 を観察することに戻る。$\mathrm{Com}(G) = \{\pi, \pi', \ldots\}$ とおく。G の Fitting 部分群 $F(G)$ の素数グラフは完全グラフであるので $\pi(F(G)) \subseteq \pi$ としてよい。よって、最大の π-正規部分群 $O_\pi(G)$ は自明でない。そこで $O_{\pi'}(G/O_\pi(G))$ ($G/F(G)$ の極大 π'-正規部分群) を $L/O_\pi(G)$ とおくと、

$$1 \neq x \in O_\pi(G) \text{ ならば、} C_L(x) \subseteq O_\pi(G)$$

が明らかに成立する。つまり、L は Frobenius 群で、$O_\pi(G)$ はその Frobenius 核である。$G = L$ なら、観察は終了してよいので $G \neq L$ とする。同様に考えて、$M/L =$

$O_\pi(G/L)$とおくと、$M/O_\pi(G)$はFrobenius群である。この調子であれば、永遠にこの議論が続きそうであるが今回は事情が少し異なっている。Lが Frobenius群であることより、Lの Frobenius補群 Hのシロー群は一般四元数群であるか、巡回群になる。Hのシロー群のひとつ Pが巡回群であれば、$N_G(P)/C_G(P)$ $(\subseteq \mathrm{Aut}(P))$は可換群であるので、$G/L$は可換群でなくてはならない。この場合、$G$は 2-Frobenius群になる。また、$H$が 2ー群であり一般四元数群であったとすれば、$H$の involution tに対し、$\langle t\rangle O_\pi(G)/O_\pi(G)$ は $G/O_\pi(G)$ の中心にあることになり $G = L$となり矛盾が生じる。以上のことより、例 1 が成立することがわかる。

次の事実も素数グラフの応用において非常に重要である。この定理もやはり有限単純群の分類定理を用いられてしめされている。素数グラフの理論が有限群の基礎のひとつと考えるならば、当然、単純群の分類定理をもちないで証明することが必要になるとおもわれるのだが、現在のところそのような証明は完成していない。

定理

Gを偶数位数の有限群、$\pi \in \mathrm{Com}(G)$ を素数 2を含まない連結成分とする。このとき、Gは、Hallπ-冪零部分群 Hをもつ。このとき、Hは TI-部分群である (この部分群を孤立 π-部分群と呼んでいる)。

話を一般素数グラフの定義に移そう。一般素数グラフは、素数グラフのアイデアをより広いクラスの問題に応用できないかという積極的な理由とあまりに見苦しい素数グラフの応用の仕方の改善のために導入されたものである。定義は素数グラフの定義において少々の変更を行えば得られる。

定義（一般素数グラフ、Ξ-グラフ）

Ξを群に関する性質とし、$\mathrm{Sub}_\Xi(G)$を Ξ-部分群全体をあらわすものとする。$\mathrm{Ord}_\Xi(G) = \{|H| | H \in \mathrm{Sub}_\Xi(G)\}$とおく。群 Gの Ξ-グラフ $\Gamma_\Xi(G)$は、点集合 V を $\mathrm{Ord}_\Xi(G)$のある要素を割りきるような素数の全体、$(p, q) \in V \times V$が辺であることを、pqで割り切れる要素が $\mathrm{Ord}_\Xi(G)$に存在することで定めてできる多重辺、ループのない無向グラフである。

明らかに、cyclic-グラフ、abelian-グラフ、そして nilpotent-グラフなどは、素数グラフと一致する。グラフとして差が出てくるのは、solvable-グラフのにおいがするところからである。この一般素数グラフに関する一般論は solvable-グラフの場合に関しては、[1]で論じられている。また、solvable-グラフやその他の一般素数グラフの古典的群論に対しての応用は、[4]を参照してもらいたい。なお、任意の有限群の solvable-グラフは、連結であるで $\mathrm{Com}(G)$ を考えるのは意味がない。そ

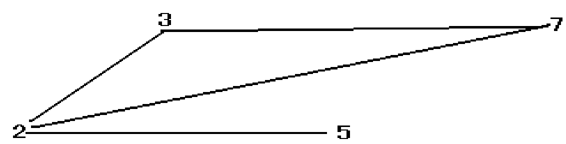

図 2: A_7 の solvable-グラフ

の代わり、solvable-グラフの補グラフ考えるのは非常に重要であることがわかっている。

2 Gruenberg-Kegel型の正規部分群鎖

素数グラフの応用において、ほとんどといっていいほど用いられる結果は、$\mathrm{Com}(G)$ の分類定理と次に紹介する Gruenberg-Kegel の定理である。

Gruenberg-Kegel の定理
有限群 G が $\mathrm{com}(G) \geq 2$ を満たすならば、次のうちひとつが成立する：
(1)Frobenius または、2-Frobenius 群である、
(2)$1 \subseteq M \subseteq N \subseteq G$ という正規部分群からなる列があり、N, M は、π_1-群であり、N/M は非可換単純群である。ここで、π_1 は素数 2 を含む $\Gamma(G)$ の連結成分をあらわす。

この定理の姿から容易にわかるように、群論の多くの問題は、つぎのようなプログラムで解決されている：

Step 1. 問題の最小位数の反例を G とおく。
Step 2. Gruenberg-Kegel の定理の正規鎖において G/N および M が自明であることを示す。
Step 3. $\mathrm{Com}(G)$ の分類定理を用いて、各単純群が問題を満たしていないかを検証する。

確かに、この問題解決プログラムは、アーベル群やべき零群に関する問題に対して強力な武器になることが多い。しかし、万能というわけではなく、例えば、involution 等に絡んだ問題を考える場合であっても見通しの悪い、或いは、複雑な計算をしなければならなくなることもしばしばある。この場合の解決方法のひとつとしては、Gruenberg-Kegel の定理を安易に用いるのではなく素数同士の連結性を直接的に表すような正規部分群鎖を見出すことが考えられる。例として、involution

に関して考察している場合、素数 2 と他の素数との連結性を正規部分群鎖もちいて表現するものを考えればよいのである。そのような正規鎖として次を見出すことができる。

定理 A([2][5])
G を有限群とし、$N(2)$ を $\Gamma(G)$ において、2 と辺で結ばれている $\pi(G)$ に属する素数全体とする。もし、$\pi(G) - N(2)$ が空集合でなければ、次の 2 つのうちひとつが成立する：
(1)G は可解群である。
(2)G は次の条件を満たす正規部分群鎖 $1 \subseteq M \subseteq N \subseteq G$ を持つ。M は可解群、G/N は可解 $N(2)$-群、N/M は非可換単純群である。

この定理をさらに精密化すると、次のような情報が得られる。

定理 ([5])
前の定理の仮定の下に、$p \in \pi(G) - N(2)$ が、「シロー p-部分群は巡回群でない。」という条件を満たすならば、次のうちひとつが成立する。
(1)G は可解群であり、Hall $\{2, p\}$-部分群は、Frobenius 群であるか、2-Frobenius 群である。
(2)G のシロー 2 群は一般四元数群である。
(3) G は、正規部分群鎖 $1 \subseteq M \subseteq N \subseteq G$ で、$M = O_{\{2,p\}'}(G)$、G/N は、$\{2, p\}'$-群、$N/M \simeq PSL_2(p^a)$ $(a > 1)$, $PSL_3(2^s)$ $(s \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 4))$ あるいは、$PSU_3(2^t)$ $(t \equiv 1)$ $(\mathrm{mod}\, 4))$ となるようなものを持つ。

この定理より次の定理が直ちに従う。

定理 ([2])
偶数位数の群 G の位数を割り切る奇素数のひとつを p とする。もし、G が位数 $2p$ の元を持たないならば、G のシロー p-部分群は可換群である。

話が多少ずれたが、素数グラフを考える場合、重要なことは、扱う群の性質・特徴に応じて、Gruenberg-Kegel タイプの正規部分群鎖を考えることである。この考えを可換性（つまり、元同士が可換であるかどうか）だけにとどまらせずに、一般の群の性質について考えること、つまり一般素数グラフについても同様なことを考えることは非常に重要である。solvable-グラフに関しては、次のような正規部分群鎖を見つけることができる。

定理 ([1])
有限群 G の solvable - グラフにおいて、相異なる 2 素数 p, q が辺で結ばれていない

ものとする。このとき、G の正規部分群鎖 $1 \subseteq M \subseteq N \subseteq G$ で、$M, G/N$ が $\{p,q\}'$-群であり、N/M が非可換単純群であるようなものが存在する。(この正規部分群鎖を「2 素数 p,q が非連結であることを表す Gruenberg-Kegel タイプの正規部分群鎖」とよぶ。)

この定理自体の証明は、容易であるがいろいろな応用がある。

ここで、一般素数グラフの「(基礎)理論」とは、どういうものであるかをまとめておくことにする。群の性質 Ξ に対して、

Step 1. 相異なる 2 素数 p,q が非連結であることを表す Gruenberg-Kegel タイプの正規部分群鎖の存在を示す。

Step 2. 1. の正規部分群鎖に現れる単純群を分類し、また、連結成分を分類する。

を行うことといえるであろう。(これについての例およびデモンストレーションは [1] 及び [4] を参照のこと。) この方面の素数グラフに関する定理でもっとも一般的なものとして次が挙げられる。

定理 ([5])

有限群 G の素数グラフにおいて、相異なる 2 つの $|G|$ の素因数 p,q が辺で結ばれていないものとする。このとき、G が可解でないとすれば位数が pq と互いに素でないような非可換単純因子は高々ひとつである。

3 素数グラフの応用における障害等

素数グラフを利用する際に、度々問題になるのは、(1)cyclic-グラフ、Abelian-グラフ、nilpotent-グラフが同一であること、(2)2-Frobenius 群に由来するもの、がある。(1) については、あまり説明が必要ではないように思われるが、(2) の何が障害になるかと聞かれると説明するのは難しいのであるが、素数グラフの話以外でも 2-Frobenius 群 S_4 がたびたび問題を起こす場合が多々あると思われるし、2-Frobenius 群ではないが、構造の似た群が主たる考察対象になっていいる場合がある(例えば、[10] の定理 7.15 の証明)。素数グラフの話に限ってみると、前に孤立 π-部分群の存在定理の有限単純群分類定理をもちない証明は、完成していないと言及したいが、その努力において最終的に完成のまえに立ちはだかっているのが、2-Frobenius 群であるような部分群の存在であり、現在の段階では、その存在が否定できないでいる。これらの現象・障害をコントロールするものは、いまだ見つ

かっていない。この節以降は、これらの問題に対しての指標等からの観察を紹介したい。

4 指標環の素数グラフとの関係

有限群 G が与えられその指標表が計算されると、共役類の各代表元にたいしその中心化群の位数が容易に計算できる。このことは、指標表から、群 G の素数グラフが作れることを示している。この事実から万能者が指標表で解決できない問題は、素数グラフの応用では解決できないのではないかということになってしまう。実際は、誰も万能者ではないので無関係な群同士の比較やおおざっぱに内部の構造を捉えることが容易な素数グラフの方が、指標表を用いた考察より優れている場合が多い。しかし、問題を追い詰め、群の構造を限定しその更に向こう側に行って結論を得たいと思うとき、指標の理論（表現論）が必要になってくる。それでは、指標表の条件を弱めて指標環、即ち複素数体上の既約指標の全体 $\mathrm{Irr}(G)$ によって $R(G) = \mathbf{Z}[\mathrm{Irr}(G)]$ と定義される環において、素数グラフの非連結性はどのように表現できるか考えたい。これについては、次のようなものがある。

定理 (**[6]**)
G を有限群、$\pi_1, \ldots, \pi_l$ を $\Gamma(G)$ の連結成分の和で $\bigcup_i \pi_i = \pi(G)$ かつ $\pi_i \cap \pi_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ を満たすものとする。$l \geq 2$ とする。このとき、l 個の $R(G)$ のイデアル $I_1, \ldots, I_l$ で次を満たすものが存在する：
(1) $I_j \cap \Big(\sum_{i \neq j} I_i\Big) \subseteq 1^G \cdot \mathbf{Z}$ for each j,
(2) $\sum_i I_i + 1_G \cdot \mathbf{Z} = R(G)$.
(3) $\mathrm{supp} I_i$ は、G の $\pi_i -$ 元全体の集まり.

逆にもし、l 個の $R(G)$ のイデアル $I_1, \ldots, I_l$ で上の条件 (1) 及び (2) を満たすものがあれば、

$$\bigcup_{x \in \mathrm{supp}(I_i)} \pi(\langle x \rangle)$$

は、各 i に対し $\Gamma(G)$ の連結成分の和となる。

この定理からほとんどの指標に関係する素数グラフについての結果を導くことができる。しかし、経験上指標理論から障害となるような 2-Frobenius 群の排除というのは、非常に難しいことがわかっているし、上の定理に 2-Frobenius 群がどのようにかかわっているか示す形跡を見ることは難しいように思われる。さらに、アーベル部分群、冪零部分群等の情報を容易にこの定理から取り出せるかという

と不可能であるとはいわないが、非常に巧妙なアプローチとかなりの労力が必要であると思える。

この小論においては、かなり節操がないが、アーベル群、冪零部分群等から作られる環を考え、それについて上の定理と同様なものがないか探ってみることにする。

5 o-集合三つ組

ここで、以下の議論の元となる O-集合三つ組というものを定義したい。o-集合三つ組とは、簡単に言うと群が作用する半順序集合で、各元に適当なウエイトが定義されているものである。まず、o-集合三つ組を定義するために三つの定義を羅列する。

定義（**o-集合**）
$(O, \cap)$ を可換なモノイドで次の条件を満たすものとする：
(1) 各 $x \in O$ に対し、$x \cap x = x$,
(2) $\exists 0 \in O$ s.t. $0 \cap x = x \cap 0 = 0$.

このとき、次で定義される $\leq$ は、半順序になる。

$$x \leq y \iff x \cap y = x.$$

このとき、$(O, \cap)$ または、$(O, \leq)$ を O-集合と呼ぶ。また、$\mathbf{Z}[O]$ は半群環となり、単位的環となることに注意する。

定義（**p-写像**）
群 G が、o-集合 $(O, \cap)$ 上に作用しているとする。$x \in O$ に対し、

$$\delta(x) = \sum_{t \in G_x \backslash G} x^t$$

とおき、各 $x, y, z \in O/\sim_G$ に対し、非負整数 $\beta_{x,y}(z)$ を次で定義する：

$$\delta(x)\delta(y) = \sum_{z \in O/\sim_G} \beta_{x,y}(z)\delta(z).$$

O から $\mathbf{Z}$ への写像 w が次の条件を満たすとき p-写像と呼ぶ：
(1)$w(1) = 1$ かつ、 $w(x) \Big| |G_x|$,
(2)$\beta_{x,y}(z) \cdot \frac{w(x)w(y)}{w(z)} \in \mathbf{Z}$

(3) 任意の $g \in G$ と $x \in O$ に対し、$w(x) = w(x^g)$.
このとき $B(O,w) = \mathrm{span}_{\mathbf{Z}}\{w(x)\delta(x) | x \in O/\sim_G\}$ は、$\mathbf{Z}[O]$ の部分環で、o-集合 $(O,\cap)$ のバーンサイド環と呼ぶ。更に、$\Phi : \mathbf{Z}[O] \to B(O,w)$ $(x \mapsto \sum_{g \in G} x^g)$ という写像が定義できる。（名前はついていないが重要である。）

定義（**o-集合三つ組**）
上の 2 つの定義に現れる o-集合、p-写像のの組 (O,G,w) または $(\mathbf{Z}[O], B(O,w), \Phi)$ を o-集合三つ組と呼ぶ。

この三つ組の重要な例をひとつ紹介したい。群についての性質 Ξ に対して Ξ-部分群全体を $\mathrm{Sub}_\Xi(G)$ とおく。群についての性質 Ξ は、G-共役について閉じているとする。すなわち、$\mathrm{Sub}_\Xi(G)$ が G-集合であると仮定する。$\mathrm{Sub}_\Xi(G)$ 上の 2 項演算を共通部分をとる操作 $\cap$ で定義する。また、p-写像 w を $x \in \mathrm{Sub}_\Xi(G)$ に対して

$$w(x) = (N_G(x) : x)$$

と定義する。この三つ組のバーンサイド環を $B_\Xi(G)$ と書くことにする。三つ組を考える理由はいくつかあるが、簡単なものとして、二つの素数 p,q が、$p \equiv 1 (\mathrm{mod}\, q)$ を満たしているとき $(p:q,\cap)$ と $(p^2,\cap)$ は同形になってしまうことがあげられる。この例から容易に想像がつくと思うが、ある簡単な構造をもつ Frobenius 群から作られる o-集合は、基本アーベル群 p^n の o-集合（即ち、射影空間）と同形になってしまうことが示される。この事情から、群に関する o-集合の構造の考察は細かい計算が必要になってくる。このような煩雑さを避けるために表現論的条件を付加させたのが o-集合三つ組である。この群の o-集合三つ組については次のような定理が成立する。

定理
G を斜交群、直交群以外の有限単純群とする。有限群 X が次の条件を満たせば、G と X は、同型である：

$$(\mathrm{Sub}_{solvable}(G), w, \Phi_G) \simeq (\mathrm{Sub}_{solvable}(X), w, \Phi_X)$$

即ち、次の図式において下向きの矢印は同型であり、この図式は可換である。

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Z}[\mathrm{Sub}_{solvable}(G)] & \to_{\Phi_G} & B_{solvable}(G) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{Z}[\mathrm{Sub}_{solvable}(X)] & \to_{\Phi_X} & B_{solvable}(X) \end{array}$$

この定理は、solvable-グラフに関する Abe，Li，Bi, Wang らによる単純群の可解部分群の位数による特徴づけを用いて示される。

ほかの重要な例として、o-集合として G の Ξ-部分群による剰余類をすべて集めたものや、これらの双対などが考えられる。

定義（一般素数グラフ）
(O, G, w) を o-集合三つ組とする。各 $x \in O$ に対し

$$o(x) := \frac{|G_x|}{w(x)} \text{（x の位数）}$$

と定義すると (O, G, w) の一般素数グラフ $\Gamma_{(O,G,w)}(G)$ は、点集合 V を O のある元の位数を割りきるような素数の全体、$(p, q) \in V \times V$ が辺であることを、pq で割り切れる位数をもつ元が O に存在することで定めてできる多重辺、ループのない無向グラフである。

$(\mathrm{Sub}_{\Xi}(G), w, \Phi_G)$ の一般素数グラフは G の Ξ-グラフと一致するので群の一般素数グラフの考察を o-集合三つ組考察の一部分と捉えることが可能である。

さて、定理 A との関連について考察してみたい。(O, G, w) を o-集合三つ組とする。任意の $a \in O$ に対し、写像 $\chi_a : O \to \mathbf{Z}$ を次で定義する：

$$\chi_a(z) := \frac{|\{g \in G | z^g \cdot a = z^g\}| w(a)}{|G_a|}.$$

このとき明らかに次が成立する。
(i) 任意の $g \in G$ に対し、$\chi_a(z^g) = \chi_a(z)$ がなりたつ。即ち、χ_a は $O/\sim_G$ から $\mathbf{Z}$ への写像と考えることができる。
(ii) $\chi_a \in \mathrm{Map}(O, \mathbf{C})$ であり、$\{\chi_a | a \in O/\sim_G\}$ は線形独立である。よって、$\rho : B(O, w) \to R = \mathrm{span}_{\mathbf{Z}}\{\chi_a | a \in O/\sim_G\}$ を

$$w(a)\delta(a) \mapsto \chi_a$$

により定義すると $\mathbf{Z}$-線形同形写像である。

命題　ρ は環同形写像である。

この命題により、$B(O, w)$ と R の同一視をしてもよいことになり、supp などを $B(O, w)$ の部分集合などに対しても定義することができる。$z \in B(O, w)$ 及び、$S \subseteq B(O, w)$ に対し

$$\mathrm{supp}(z) := \{x \in O | \rho(z)(x) \neq 0\}, \quad \mathrm{supp}(S) := \bigcup_{z \in S} \mathrm{supp}(z),$$

また、

$$\pi(S) := \{p : \text{素数} \, | x \in \mathrm{supp}(S) \text{ に対して } p | o(x)\}.$$

とおく。このような準備の下に、定理 A の類似（定理 A を含む）命題として次が示せる。

命題　B
G を有限群、$B_{nilp.}(G) = B(\mathrm{Sub}_{nilp.}(G), w, \Phi_G)$ とする。もし、$B_{nilp.}(G)$ のイデアル I, J で $(1) I \cap J \subseteq 0 \cdot \mathbf{Z}$、$(2) I + J + 1 \cdot \mathbf{Z} = B_{nilp.}(G)$、$(3) I, J \subseteq 0 \cdot \mathbf{Z}$、を満たすものがあれば、
(i) $\pi(I)$ と $\pi(J)$ は、素数グラフの連結成分 $\{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ の和集合であり
(ii) $\pi(I) \cup \pi(J) = \pi(G),\ \ \pi(I) \cap \pi(J) = \emptyset.$
が成立する。また、逆も成立する。

次に、2-Frobenius 群についての観察はどのようになるか考えてみたい。そのために有限群 G の素数グラフの連結成分全体 $\{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ について次の概念を導入する。

定義
C_i が C_j に関する 2-Frobenius タイプ C_j であるとは、G の 2-Frobenius 部分群 $H(\subseteq G)$ で (a)H/H' と H'' は C_i-群、(b)H'/H'' は ${C_j}'$-群の 2 条件を満たすものが存在することを意味するものとする。

この概念により素数グラフの連結成分全体の集合 $\{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ に同値関係 $\approx$ を次のように入れることができる：$C_i \approx C_j$ である必要十分条件は、「C_i は、C_j に関する 2-Frobenius タイプ、さもなければ、C_j は、 C_i に関する 2-Frobenius タイプである、が成立する」である。
　この同値関係 $\approx$ を用いて $\{C_1, C_2, \ldots, C_k\}/\approx$ を考えることができるが、これについて次が成立する。

定理 C
G を有限群、$B_{solvable}(G) := B(\mathrm{Sub}_{solvable}(G), w, \Phi_G)$ とおく。もし、$B_{nilp.}(G)$ のイデアル I, J で $(1) I \cap J \subseteq 0 \cdot \mathbf{Z}$、$(2) I + J + 1 \cdot \mathbf{Z} = B_{nilp.}(G)$、$(3) I, J \subseteq 0 \cdot \mathbf{Z}$、を満たすものがあれば、
(i) $\pi(I)$ と $\pi(J)$ は、$\{C_1, C_2, \ldots, C_k\}/\approx$ の和集合であり
(ii) $\pi(I) \cup \pi(J) = \pi(G),\ \ \pi(I) \cap \pi(J) = \emptyset.$
が成立する。

　定理 C と命題 B は、ほとんど同じ文面であるが、二つを並べて考えるとき、2-Frobenius 群である部分群が要となってバーンサイド環のイデアルをくっつけていることがわかる。例として $G \simeq A_5$ の場合と $G \simeq A_6$ の場合を比較してみる。これらの群の素数グラフの連結成分は $\{2\}$、$\{3\}$、$\{5\}$ の 3 つである。簡単のため記号

として部分群 H に対して $b(H) := w_G(H)\delta(H)$ とおくことにする。$G \simeq A_5$ の場合には、可解という性質に関して 2-Frobenius タイプの連結成分はないので、

$$\begin{aligned}&\mathrm{span}\{b(A_4)-b(3), b(2^2), b(2), b(1)\} + \mathrm{span}\{b(D_{10})-b(2), b(5), b(1)\}+\\&+\mathrm{span}\{b(S_3)-b(2), b(3), b(1)\} + b(A_5)\mathbf{Z} = \mathbf{Z}[\mathrm{Sub}_{solvable}(A_5)]\end{aligned}$$

となる ($\mathbf{Z}[\mathrm{Sub}_{nilpotent}(A_6)]$ のイデアルの分解も同様な分解をもつ)。ところが、$G \simeq A_6$ の場合において、$\{3\}$ は、可解という性質に関して 2-Frobenius タイプの連結成分であるので素数グラフの連結成分 $\{2\}$ と $\{3\}$ に関連する $\mathbf{Z}[\mathrm{Sub}_{nilpotent}(A_6)]$ のイデアルがひとつにまとまってしまうことになる。

$$\begin{aligned}&\mathrm{span}\{b(D_{10})-b(2), b(5), b(1)\} + \mathrm{span}\{b(H)|H \in \mathrm{Sub}_{2,3}(G)\} + b(A_6)\mathbf{Z}\\&= \mathbf{Z}[\mathrm{Sub}_{solvable}(A_6)].\end{aligned}$$

6 その他

先に、群の o-集合のレベルでの群の特徴付けはむずかしいと言及したが、非可換単純群等の割と性格がはっきりしている群たちについては可能であろうと予想することができる。実際に、対称群、交代群、散在型の単純群のいくつかが、o-集合の素朴な意味での構造のみで一意に特徴づけること可能である。どのような群に対して o-集合のみで一意に構造を限定できるかという問題は重要な課題だと思われる。また、o-集合の幾何的性質と群の構造について調べること、o-集合の幾何的性質と表現論的な意味を調べてみることも非常に重要であると考えられる。また、o-集合三つ組に関しても同様な問題が考えられる。(O, G, w) として三つ組を捉えると群（または、群の作用）の存在が必須になってしまうが $(\mathbf{Z}[O], B(O, w), \Phi)$ と捉えれば、必ずしも群の存在が必要にならない。このレベルで、群の概念を拡張し、群の特徴づけを行うことも重要な課題であると思われる。

参考文献

[1] Abe, S. and Iiyori, N.,*A generalization of prime graphs of finite groups.* 北海道ジャーナル, **29** (2000), 391-407.

[2] Chigira, N. Iiyori, N. and Yamaki, H., *Non-abelian Sylow subgroups of finite groups of even order.* Invent. Math., **139** (2000), 525-539.

[3] Conway, J. H. *et al*, *"Atlas of Finite Groups*, Oxford Univ. Press(Cleandon), London/New York 1985.

[4] Iiyori, N., *p-Solvability and a generalization of prime graph of finite groups.*Comm. Algebra **30** No. 4(2002), 1679-1692.

[5] Iiyori, N., *Prime graphs of finite groups and chains of normal subgroups.* preprint.

[6] Iiyori, N., *A generalization of prime graphs of finite groups, II.* preprint.

[7] Ito, N., ”有限群論”. 共立出版社, 1970.

[8] Iiyori, N. and Yamaki, H., *Prime graph components of the simple group of Lie type over the field of even characteristic* . J. Algebra **155** (1993), 335-343.

[9] Kondo, T.,”群論”（基礎数学講座）　岩波書店

[10] Kondrat'ev, A.S., *Prime graph components of finite simple groups.* Math. USSR Sbornik **67**(1990), 1611-1614.

[11] Williams, J. S., *Prime graph components of finite groups.* J. Algebra **69** (1981), 487-513

[12] Suzuki, M., *”Group Theory I, II”*. Springer, Berlin-Heidelberg- New York, 1982.