# Sphere Packings, Lattices, Groups, and Association Schemes

坂内英一
（Eiichi Bannai）
九大・数理
（Faculty of Mathematics, Graduate School, Kyushu University）

この原稿は上記タイトルで行った 2006 年 8 月の「第 51 回代数学シンポジウム」（会場東京大学駒場キャンパス）の 講演内容（OHP による）をかなり忠実に再現したものです.

## 1 球の詰め込み問題に関する３つの breakthroughs.

### (1) Thomas Hales による Kepler 予想の解決.

最初にアナウンスされたのは 1998 年であり, 次の論文が最近 Ann. of Math. に発表され, ようやく最終的決着を見たと言えると思います. より詳しい完全な証明は, Discrete Computational Geometry (2006) に発表されることが決まっていると聞いています.

Thomas Hales, A proof of Kepler conjecture, Ann. of Math. 162(2005), 1065-1185.
Kepler 予想とは次の予想です.

**Kepler 予想** $\mathbb{R}^3$ **における球の最良の詰め込み密度は,** $\pi/\sqrt{18}$ **に等しい.**
ここで球の詰め込みとは, 同じ大きさの（無限個の）球をお互いに接しても良いが重なり合わないように $\mathbb{R}^3$ に詰め込むことで, そのときどれかの

球に入っている部分の割合が一番大きく出来るのはいつか？という問題です. $\mathbb{R}^2$ における球の最良の詰め込み密度は, $\pi/\sqrt{12}$ に等しいことが知られています. ただし証明はそんなにはやさしくありません.

Kepler 予想に関する読み物として, C. G. Szpiro の本：Kepler Conjecture, 2003, をご覧下さい. 日本語訳は「ケプラー予想——四百年の難問が解けるまで」として, 新潮社から 2005 年に出版されています.

**(2) Oleg Musin による４次元 kissing number の決定.**

$\mathbb{R}^n$ において, 与えられた １つの単位球に最大いくつの単位球を接するようにかつお互いに重なり合わないように置けるか？と いう問題を考えます. この数を $R^n$ における kissing number と呼び $k(n)$ で表します.
$k(2) = 6$ は明らかですが, 他の $k(n)$ 達はどうなるでしょうか？
$k(3)$ は 12 であるか 13 であるかは 1694 年に Newton と Gregory の間で争われた有名な論戦です. 最終的に $k(3) = 12$ が確定していますが, 最初の厳密な証明は 1953 年の Shütte-van der Waerden [35] であると言われています. 1956 年の Leech [25] の２ページの短い証明が有名ですが, それは方針を示したもので, 厳密にその方法で証明 しようとするとそれほど易しくなく, また何十ページは必要と思われます. 最近でも多くの別証明が発表されていますが, 現在でもより簡明な証明が望まれています. （文献としては, [36, 27,30] などを参照して下さい. ）
最近の大きな breakthrough は, Oleg Musin により次の定理が示されたことです.

**定理 (Oleg Musin)** $k(4) = 24$ **である.**
アナウンスメントは 2003 年で正式な論文はまだ雑誌に発表されていません. 証明 の詳細は例えば [28, 29] を参照して下さい. また, これについての解説記事としては, [3, 33, 37] などを参照して下さい.

**注意** $\mathbb{R}^8$ および $\mathbb{R}^{24}$ に対して $k(8) = 240$ および $k(24) = 196560$ であることはそれ以前に, Odlyzko-Sloane および Levenshtein により独立にまた同時期 (1979) に示されています. (なお, 8 および 24 を除く 他の 5 以上のどの次元 n に対しても, $k(n)$ の決定は現在の時点では未解決です. いずれも $k(n)$ の上および下からの評価が知られていますがその間にギャップがあり

ます. ) $\mathbb{R}^8$ および $\mathbb{R}^{24}$ での $k(8)=240$ および $k(24)=196560$ を満たす kissing configuration の（直交変換を除いての）一意性は Bannai-Sloane [7] (1981) により示されています. 一方, $\mathbb{R}^4$ における $k(4)=24$ を満たす kissing configuration の（直交変換を除いての）一意性は現在のところまだ未解決です. （成り立つと予想はされていますが. ）

**注意補足** W. -Y. Hsiang による Kepler 予想の解決, kissing configuration の一意性も込めての４次元 kissing number の決定, などの一連の論文があります. ただし専門家には現在のところ受け入れられていないようです. 私の個人的意見としては, これらの論文を本気で検証する必要があると思っています.

$k(8)=240, k(24)=196560$ **の証明の概略**

$C_i^{\frac{n}{2}-1}(t)$ を $i$-次の Gegenbauer 多項式とする. すなわち, 区間 $[-1,1]$ 上のウエイト $w(x)=(1-x^2)^{\frac{n-3}{2}}$ で定義される直交多項式とする.

**命題** $f(t)$ を多項式とし, 次の２つの条件 (1), (2) が成立つとする.

(1) $f(t)=a_0C_0^{\frac{n}{2}-1}+a_1C_1^{\frac{n}{2}-1}+\cdots+a_kC_k^{\frac{n}{2}-1}$ と Gegenbauer 多項式を用いて展開すると

$$a_0>0,\quad a_i\geq 0\ (i=1,2,\cdots).$$

(2) $F(\alpha)\leq 0,\ \forall\alpha\in[-1,\frac{1}{2}]$.

このとき,

$$k(n)\leq\frac{f(1)}{a_0}$$

が成立つ.

**命題の証明の方針.**

$$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_N\}\subset S^{n-1}(\subset\mathbb{R}^n)$$

が任意の $i,j(i\neq j)$ に対して

$$x_i\cdot x_j\leq\frac{1}{2}$$

が成立つような最大の $N$ が kissing number $k(n)$ に等しいことに注意します. （ここで $x_i\cdot x_j\leq\frac{1}{2}$ という条件は $x_i$ と $x_j$ が中心角で 60 度以上離れているということと同値です. ）このとき I. J. Schoenberg (1942) に

よる Gegenbauer 多項式の positivity:

$$\sum_{x,y\in X} C_i^{\frac{n}{2}-1}(x\cdot y) \geq 0 \ (\forall i = 1, 2, \cdots)$$

あるいは球面調和解析の (Gegenbauer 多項式の) 加法定理を用いて

$$\sum_{x,y\in X} f(x\cdot y)$$

を上下から評価すると, $N \leq \frac{f(1)}{a_0}$ が得られます.

• $k(8) = 240$ の証明. $f(t) = (t+1)(t+\frac{1}{2})^2 t^2 (t-\frac{1}{2})$ と置くと, $f(t)$ は命題の条件 (1),(2) を満たし, $k(8) \leq 240$ が得られます. $k(8) \geq 240$ は $E_8$-型ルート系の 240 個のルートに対応する点を考えれば明らかです.
• $k(24) = 196560$ の証明. $f(t) = (t+1)(t+\frac{1}{4})^2(t+\frac{1}{2})^2 t^2 (t-\frac{1}{4})^2(t-\frac{1}{2})$ と置くと, $f(t)$ は命題の条件 (1),(2) を満たし, $k(24) \leq 196560$ が得られます. $k(24) \geq 196560$ は Leech 格子の 196560 個の miniimal vectors に対応する点を考えれば明らかです.

**Musin の方法.**
先の命題の条件 (2) を緩めて, すなわち $-1$ に近い所で, $f(t)$ が正になること許し, 替わりに幾何学的考察を加えて命題の主張と類似の結果を得ようという方法です. くわしくは Musin の原論文あるいは数学セミナー 2005 年 10 月号の私の記事を参照して下さい. Musin の方法を $n = 3$ の場合に適応した $k(4) = 12$ の Musin の証明は比較的簡明で分かりやすいと思われます. Discrete Comp. Geom. 35 (2006), 375-384, を参照して下さい.
• この問題に対する他の有効な方法として, A. Schrijver による (Delsarte などの) 線形計画法を positive semi-definite program で置き換える方法が考えられています. (Schrijver の方法に関してはこのシンポジウムでも田中太初氏の講演がありましたので, それも参照して下さい. ) positive semi-definite program を用いて $k(3) = 12$ あるいは $k(4)$ が証明できれば非常に面白いし, Bachoc-Vallentin が現在その方向で研究中であることを講演の時に述べましたが, 講演の 1 週間後に彼らからのプレプリントが実際に私のもとに届き, $k(3) = 12$ あるいは $k(4)$ の positive semi-definite program による証明が完成したとのことです. ([1] arXiv:math.

MG/0608426 をご覧下さい.）

**(3) Cohn-Elkies-Kumar による 8 次元 24 次元における球の詰め込み問題の進展.**

Henry Cohn and Noam Elkies: New upper bound on sphere packings, I, Ann. of Math. 157 (2003), 689-714.
Henry Cohn and Abhinav Kumar: Optimality and uniqueness of the Leech lattice among lattices (2004, preprint).

これらの論文で得られている主定理は次の通りです.

**定理** $\mathbb{R}^{24}$ における球の最良の詰め込み密度 $\rho$ は

$$\rho \leq (1+10^{-30})(\text{Leech lattice に対する球の詰め込み密度})$$

が成立つ.

**定理** $\mathbb{R}^{24}$ における格子状の球の詰め込み（すなわち球の中心が格子点の上にある）の中では, Leech 格子によるものが, 最良（かつ一意的）である.

上に述べた結果の証明の方針を非常に大雑把に説明します. まず使う言葉の定義ですが,
$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ が admissible であるとは, $\exists \delta > 0, \exists c > 0$ such that

$$|f(x)|,\ |\widehat{f}(x)| < c(1+||x||)^{-n-\delta} (\forall x \in \mathbb{R})$$

と定義します. ここで $\widehat{f}$ は $f$ の $\mathbb{R}^n$ における Fourier 変換です.

**定理 (Cohn-Elkies)** Admissible な $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ が次の 3 条件を満たすとする.
(1) $f(0) = \widehat{f}(0) > 0$,
(2) $f(x) \leq 0, \text{for } ||x|| \geq r (x \in \mathbb{R}^n)$,
(3) $\widehat{f}(t) \geq 0, \text{for } \forall t \in \mathbb{R}^n$.
このとき,

$$\mathbb{R}^n\text{における球の最良の詰め込み密度} \leq \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}(\frac{r}{2})^n$$

がなりたつ.

**予想 (Cohn-Elkies)** $n = 24$(resp. 8) のとき, admissible な $f : \mathbb{R}^{24} \longrightarrow \mathbb{R}$ (resp. $f : \mathbb{R}^8 \longrightarrow \mathbb{R}$) で上の定理の 3 つの条件を $r = 2$ (resp. $r = \sqrt{2}$) に対して満たすものが存在する.
この予想が証明できれば, 24 次元 (resp. 8 次元) の球の詰め込みの最良密度は決定されるわけです. また, このような関数 $f$ は見つかってしかるべきと思います. しかし現在のところそのような関数 $f$ はまだ見つかっておらず, 非常に 2 に (resp. $\sqrt{2}$) に近い $r$ に対してそのような $f$ が見つかっています. そのことが, $n = 24$ の時に, $\mathbb{R}^{24}$ における球の最良の詰め込み密度は

$$\leq (1 + 10^{-30})(\text{Leech lattice に対する球の詰め込み密度})$$

であることが言えるという具合です.

**Leech 格子が $\mathbb{R}^{24}$ における球の格子状詰め込みの中で最良であることの証明の概略.**
上に述べたように, 上の Cohn-Elkies 定理の非常に 2 に近い $r$ に対して, それらの 3 条件を満たす $f$ を非常に具体的に（コンピューターを用いて）求めます. そのことを用いて, 他に最良の格子が存在したとすると, その格子の (nearly) minimal vectors の集合が, Leech 格子の 196560 個の minimal vectors の集合の作る configuration と非常に近いことを示し, 更に Leech 格子の 196560 個の minimal vectors の作る association schemes の一意性 (Bannai-Sloane, 1981) , Leech 格子が, density に関して格子達の中で, local maximum を与えること (Voronoi による. Venkov による新しい証明もある) などを用いて, 最終的に, その格子が Leech 格子と一致しなければいけないことを示します. 証明はかなり込み入っていて複雑です. 詳しくは, 原論文 [12] あるいは数学セミナー 2006 年 3 月号の坂内による解説をご覧下さい.

Cohn 達が sphere packing の問題を考えるのは, その先に大きな問題を見ているからとのことです. すなわち,

「$\mathbb{R}^n$ における kissing problem と $\mathbb{R}^n$ における球の最良の詰め込み問題の間の関係」が,
「$\mathbb{R}^n$ における球の最良の詰め込み問題と Hyperbolic space における球の最良の詰め込み問題の間の関係」と等しい,
という図式を考えているからとのことで, 最終的には Hyperbolic space における球の最良の詰め込み問題（それは数論の立場からも重要）を見据えているからとのことです. 私自身はその部分についてはちゃんと理解出来ていませんが, 興味ある方は, 2005 年 5-6 月に九大で開催された Second COE Workshop on Sphere Packings の報告集の次の記事をご覧いただけたらと思います.
H. Cohn: Sphere packings, energy minimarization, and linear programming bounds, in Proceedings of Second COE Workshop on Sphere Packings, 1-42 (http://www. math. kyushu-u. ac. jp/coe/report/mhf2. cgi).

## 2 球面上の有限個の点の集合.

有限集合 $X \subset S^{n-1} (\subset \mathbb{R}^n)$ に対して, 仮の記号であるが,

$$i(X) = \max\{x \cdot y | x, y \in X, x \neq y\}$$

と置くことにする.

我々の考えたい問題は,
• $|X|$ を固定して, $i(X)$ を最小にしたい. （すなわち $X$ の min. distance を最大にしたい. ）
あるいは逆に,
• $i(X)$ を固定して, $|X|$ を最大にしたい.
ということにある. （ここで, $i(X) \leq \frac{1}{2}$ のもとでの $|X|$ の最大値が kissing number $k(n)$ であることに注意しよう. ）

**定義** $X \subset S^{n-1}$ が optimal であるとは, $|Y| = |X|$ となる任意の $Y \subset S^{n-1}$ に対して, $i(X) \leq i(Y)$ が成り立つことと定義する.

**注意** 一般に, $n$, $|X|$ が与えられたとき, optimal な $X$ を決定することは易しくない. $n$, $|X|$ が小さい時, optimal になると思われる $X$ についてのコンピュ ーター による実験的な多くの予想があるが, 厳密な証明を与

えることは一般に非常に難しい.
例えば, $n=3$ の時は, $|X| \leq 12$ および $|X|=24$ の時にのみ optimal な $X$ が決定されていて, 他の場合はいずれもまだ未解決である.

$X \subset S^{n-1}$ に対して, 我々は（すなわち代数的組合せ論では) 次の 2 つの値に注目する.
• $s(X)=|\{x \cdot y | x,\ y \in X,\ x \neq y\}|$ (この値は $X$ の異なる 2 点の内積（距離）の種類の個数であり, $X$ の次数 (degree) と呼ばれる.
• $t(X)$ で $X$ が $t$-デザインになる最大の $t$ を表す.
ここで $X$ が $t$-デザインであるとは,

$$\frac{1}{|S^{n-1}|}\int_{S^{n-1}} f(x)d\omega(x)=\frac{1}{|X|}\sum_{x\in X} f(x)$$

が $t$-次以下の任意の多項式 $f(x)=f(x_1,x_2,\cdots x_n)$ に対して成り立つことと定義する. また, $|S^{n-1}|$ は球面 $S^{n-1}$ の面積であり, 積分は球面 $S^{n-1}$ 上での面積分を表す. なお, $t(X)$ は $X$ の strength (強さ) と呼ばれる.

**定理 (Delsarte-Goethals-Seidel, 1977)**

$$X \subset S^{n-1},\ t=t(X),\ s=s(X)$$

とすると次が成り立つ.
(i) $t \leq 2s$ が常に成り立つ.
(ii) $t=2s$, あるいは $t=2s-1$ かつ $X=-X$（すなわち $X$ が anti-podal, i. e. , 原点に関して対称）が成り立つ時,

$$|X|=\binom{n-1+s}{s}+\binom{n-2+s}{s-1}\ (t=2s \text{ のとき})$$
$$|X|=2\binom{n-2+s}{s-1}\ (t=2s-1 \text{ かつ } X=-X \text{ のとき})$$

が成り立つ. （このような $X$ を tight な $t$-デザインと呼ぶ. ）
(iii) $t \geq 2s-2$ ならば, $X$ は（各内積の値を relation $R_i$ として）（クラス $s$ の）アソシエーションスキームを作る.
すなわち,

$$p_{i,j}^k=|\{z\in X|(x,z)\in R_i,(z,y)\in R_j\}|$$

が $(x,y)\in R_k$ のもとで $i,j,k$ のみにより決まる定数となる, という 条件をみたす.

（アソシエーションスキームの詳しい定義、基本的な事柄などに関しては、例えば [5] を参照。）

**例**

• $E_8$**-型ルート系** $X \subset S^7 (\subset \mathbb{R}^8)$,
$|X| = 240$. $s(X) = 4$, 内積 $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, (1)$ に対応する.
$t(X) = 7$. 従って, $t = 2s - 1, X = -X$ が成り立つので $X$ は tight 7-デザインである.

• **Leech 格子の min. ベクトルの集合** $X \subset S^{23} (\subset \mathbb{R}^{24})$,
$|X| = 196560$. $s(X) = 6$, 内積 $-1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, (1)$ に対応する.
$t(X) = 11$. 従って, $t = 2s - 1, X = -X$ が成り立つので $X$ は tight 11-デザインである.

**余談**

このシンポジウムの１ヶ月前に, 北京での離散幾何の研究会（P. Grüber の 65 歳のお祝いの会を兼ねる）に参加しましたが, そこで P. Grüber が言っていた,
”Extremal objects are sometimes regular” という言葉に非常に共感しました.
我々は色々な意味で extremal なものに興味を持って研究を進めており, それらは実際多くの場合非常に regular な性質を持っています. 群 (groups) とか格子 (lattices) はある意味で, regular な構造を与えます. ただしそれらだけでは regular な構造を記述するのに不十分な場合もあります. アソシエーションスキーム (association schemes) はある意味で, それらを越えて regular な構造を記述出来ることもある有効な概念であると考えます.（もちろん万能ではありませんが. ）

# 3 Universally Optimal Codes.

$X \subset S^{n-1}$ で特に興味深いものは何か？という問いを考えましょう.
Tight $t$-デザインは確かにそうですし, Rigid な $t$-デザイン（すなわち $t$-

デザインという性質を保ったままでは連続変形が一切出来ない $t$-デザイン）もそう思われますが, それらの例はあまり多くはありません.
Cohn-Kumar は universally optimal codes という概念を新しく提唱し, その分類問題が重要であると主張します. （私もその意見に同意し支持します. ） 詳しくは [13]:
Cohn-Kumar: Universally optimal distribution of points on spheres (preprint, 2004),
を参照して下さい.

**定義** 関数 $\alpha : [-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ は, $\alpha \in C^\infty$ かつ $\alpha^{(k)} \geq 0$ ($\forall k = 0, 1, \cdots$) のとき, absolutely monotonic であると言う.
**例** $\alpha(t) = (2-2t)^{-s}$, with $s > 0$ は absolutely monotonic である.

**定義** $X \subset S^{n-1} (\subset \mathbb{R}^n)$ は次の条件 ($\clubsuit$) を満たすとき, universally optimal code であるという.
($\clubsuit$) 任意の absolutely monotonic 関数 $\alpha$ と $|Y| = |X|$ を満たす任意の $Y \subset S^{n-1} (\subset \mathbb{R}^n)$ に対して,

$$\min\{\sum_{x,y \in X} \alpha(x \cdot y) | x, y \in X, x \neq y\} \leq \min\{\sum_{x,y \in Y} \alpha(x \cdot y) | x, y \in Y, x \neq y\}$$

が成り立つ.
**注意** $X$ が universally optimal ならば, $X$ は optimal である.

Cohn-Kumar は 良いクラスの $X \subset S^{n-1}$ に対して, それが universally optimal であることを示した.

**定理 (Cohn-Kumar)** $X \subset S^{n-1}$, $t = t(X)$, $s = s(X)$ とする. $t \geq 2s-1$ または, $t = 2s-2$ かつ $X = -X$ が成り立つとき, $X$ は universally optimal である.
**定理 (Cohn-Kumar)** $\mathbb{R}^4$ における regular polytope 600 cell の 120 点からなる頂点は universally optimal である. このとき, $t = 11$, $s = 7$ である.

上の $t \geq 2s-1$ または, $t = 2s-2$ かつ $X = -X$ という条件は, 先に述べた Delsarte-Goethals-Seidel の定理からもわかるように, $X$ がアソシエーションスキームになる強い正則性を持った集合であることから代数

的組合せ論で大いに研究されて来た対象ですが, 分類は容易でなく、まだ出来ていません. 知られているもののリストが Cohn-Kumar により与えられているので, それをそのまま引き写すことにします.

Cohn-Kumar による universally optimal codes の知られているもののリスト.

| n | N | Name |
|---|---|---|
| 2 | N | N-gon |
| n | n+1 | simplex |
| n | 2n | cross polytope |
| 3 | 12 | icosahedron |
| 4 | 120 | 600-cell |
| 8 | 240 | $E_8$ root system |
| 7 | 56 | spherical kissing |
| 6 | 27 | spherical kissing/Schläfli |
| 5 | 16 | spherical kissing/Clebsch |
| 24 | 196560 | Leech lattice min. vectors |
| 23 | 4600 | spherical kissing |
| 22 | 891 | spherical kissing |
| 23 | 552 | regular 2-graph |
| 22 | 275 | McLaughlin |
| 21 | 162 | Smith |
| 22 | 100 | Higman-Sims |
| $q\frac{q^3+1}{q+1}$ | $(q+1)(q^3+1)$ | Cameron-Goethals-Seidel |

上の表で, $n = 4, N = 120$ の 600-cell の例だけが, $t \geq 2s - 1$ または, $t = 2s - 2$ かつ $X = -X$ という条件を満たしていなくて, 他は全て満たしているとのことです.
また, 当初 universally optimal になるのではと期待された次の例はそうでないことが示されています.
• (Cohn-Conway-Elkies-Kumar, preprint)
$D_4$-型ルート系の 24 個のルートは universally optimal では無い.
（このとき, $t = 5, s = 4$ となっています. これが optimal であるか否か

は, まだ未解決であると思われます. ）

**予想 (Cohn-Kumar)** 各 $n$ に対して, universally optimal になる $X$ は（直交変換を除いて）高々有限個である.

• (Cohn-Kumar) Universally optimal codes を見つけること, 更に分類することは, 非常に興味深い重要な問題である.

• Ballinger-Cohn-Glansiracusa-Morris (講演の時点ではプレプリントはなかったが, その少し後にプレプリント [2] が届いた. 著者に少し変動があるようである. ）は $|X| \leq 100$ の universally optimal となる可能性のある codes をコンピューターを用いて実験的に調べあげ, 次の２つの候補を見出した. （プレプリントによると, $|X| \leq 100$ では, 知られたものあるいはこれら２つに限ることも示している. ）これらが universally optimal であることは確からしいが, まだ証明されていない. それより弱い optimal であるかどうかもまだ未解決と思われる.
(1) $X \subset S^9 (\subset \mathbb{R}^{10})$
(2) $X \subset S^{13} (\subset \mathbb{R}^{14})$

**重要** これらはいずれもアソシエーションスキームになっている. (1) のものは, クラス $d = 4$ で, 内積は, $(1), -\frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6}$ であり,
(2) のものは, クラス $d = 3$ で, 内積は, $(1), -\frac{1}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{1}{7}$ である.

(1) のアソシエーションスキームをもう少し詳しく説明すると, 次のよう

な relation matrix $R = \sum_{i=1}^{4} iA_i$ (40 × 40 行列) を持っています.

$$
R = \sum_{i=1}^{4} iA_i = \begin{bmatrix}
01112222 & 34443444 & 34443444 & 34443444 & 34443444 \\
10112222 & 43444344 & 43444344 & 43444344 & 43444344 \\
11012222 & 44344434 & 44344434 & 44344434 & 44344434 \\
11102222 & 44434443 & 44434443 & 44434443 & 44434443 \\
22220111 & 44434443 & 44344434 & 43444344 & 34443444 \\
22221011 & 34443444 & 43444344 & 44344434 & 44434443 \\
22221101 & 43444344 & 34443444 & 44434443 & 44344434 \\
22221110 & 44344434 & 44434443 & 34443444 & 43444344 \\
34444344 & 01112222 & 44344443 & 44434344 & 44344344 \\
43444434 & 10112222 & 44434434 & 34444434 & 34444443 \\
44344443 & 11012222 & 43443444 & 43444443 & 44433444 \\
44433444 & 11102222 & 34444344 & 44343444 & 43444434 \\
34444344 & 22220111 & 44434434 & 43444443 & 43444434 \\
43444434 & 22221011 & 44344443 & 44343444 & 44433444 \\
44344443 & 22221101 & 34444344 & 44434344 & 34444443 \\
44433444 & 22221110 & 43443444 & 34444434 & 44344344 \\
34444434 & 44434434 & 01112222 & 43444434 & 44434344 \\
43444344 & 44344443 & 10112222 & 44433444 & 34444434 \\
44343444 & 34444344 & 11012222 & 34444443 & 43444443 \\
44434443 & 43443444 & 11102222 & 44344344 & 44343444 \\
34444434 & 44344443 & 22220111 & 44344344 & 43444443 \\
43444344 & 44434434 & 22221011 & 34444443 & 44343444 \\
44343444 & 43443444 & 22221101 & 44433444 & 44434344 \\
44434443 & 34444344 & 22221110 & 43444434 & 34444434 \\
34444443 & 43444443 & 44344344 & 01112222 & 44434434 \\
43443444 & 44343444 & 34444443 & 10112222 & 44344443 \\
44344344 & 44434344 & 44433444 & 11012222 & 34444344 \\
44434434 & 34444434 & 43444434 & 11102222 & 43443444 \\
34444443 & 44434344 & 43444434 & 22220111 & 44344443 \\
43443444 & 34444434 & 44433444 & 22221011 & 44434434 \\
44344344 & 43444443 & 34444443 & 22221101 & 43443444 \\
44434434 & 44343444 & 44344344 & 22221110 & 34444344 \\
34443444 & 43444434 & 43444443 & 44344443 & 01112222 \\
43444443 & 44433444 & 44343444 & 44434434 & 10112222 \\
44344434 & 34444443 & 44434344 & 43443444 & 11012222 \\
44434344 & 44344344 & 34444434 & 34444344 & 11102222 \\
34443444 & 44344344 & 44434344 & 44434434 & 22220111 \\
43444443 & 34444443 & 34444434 & 44344443 & 22221011 \\
44344434 & 44433444 & 43444443 & 34444344 & 22221101 \\
44434344 & 43444434 & 44343444 & 43443444 & 22221110
\end{bmatrix}
$$

ここで, $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4$ は relations $R_0, R_1, R_2, R_3, R_4$ に対する隣接行

列 (adjacency matrices) です．このアソシエーションスキームは非原始的 (imprimitive) で, サイズ 4 とサイズ 8 の 2 つのブロック (system of imprimitivity) を持っています.
このとき, $A_iA_j = \sum_{k=0}^{4} p_{i,j}^k A_k$ が成立ちます. 具体的には,

$$
\begin{aligned}
&A_1^2 = 3A_0 + 2A_1, \qquad A_2^2 = 4A_0 + 4A_1,\\
&A_3^2 = 8A_0 + 2A_2 + 2A_4,\\
&A_4^2 = 24A_0 + 16A_1 + 18A_2 + 12A_3 + 14A_4,\\
&A_1A_2 = 3A_2, \qquad\qquad A_1A_3 = A_4,\\
&A_1A_4 = 3A_3 + 2A_4, \quad A_2A_3 = A_3 + A_4,\\
&A_2A_4 = 3A_3 + 3A_4,\\
&A_3A_4 = 8A_1 + 6A_2 + 6A_3 + 4A_4.
\end{aligned}
$$

となります. このことはアソシエーションスキームであることの証明にも同時になっています. アソシエーションスキームの指標表（すなわち第 1 固有行列 $P$ と第 2 固有行列 $Q$） は次で与えられます.

$$
P = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 8 & 24 \\ 1 & -1 & 0 & -4 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & -2 & -6 \\ 1 & 3 & -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 20 & 4 & 5 \\ 1 & -\frac{10}{3} & -\frac{20}{3} & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & -5 \\ 1 & -5 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & \frac{5}{3} & -\frac{5}{3} & -1 & 0 \end{bmatrix}.
$$

この $Q$ の 2 列目を見ることにより, 各 $R_i$ に対して, 内積 $(1), -\frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6}$ が対応していることが読み取れることに注意して下さい.

(2) のアソシエーションスキームは, de Caen-van Dam (1999) により次のように作られたものと一致します.

$X = F_8 \times F_8$, とし, $R_i$ $(1 \leq i \leq 3)$ を次のように定義します.
For $(\alpha, x)$ and $(\beta, y)$ in $X = F_8 \times F_8$,
$((\alpha, x), (\beta, y)) \in R_0$ if and only if $\alpha = \beta$ and $x = y$.
$((\alpha, x), (\beta, y)) \in R_1$ if and only if $\alpha \neq \beta$ and $x = y$.
$((\alpha, x), (\beta, y)) \in R_2$ if and only if $x \neq y$ and either $\alpha + \beta = (x + y)^3$ or $\alpha + \beta = xy(x + y)$, and
$((\alpha, x), (\beta, y)) \in R_3$ otherwise.

このとき次がなりたちます.

$$\begin{aligned}
&A_1^2 = 7A_0 + 6A_1, \qquad A_2^2 = 14A_0 + 2A_1 + 4A_3,\\
&A_3^2 = 42A_0 + 30A_1 + 24A_2 + 28A_3\\
&A_1A_2 = A_2 + 2A_3, \qquad A_1A_3 = 6A_2 + 5A_3,\\
&A_2A_3 = 12A_1 + 12A_2 + 8A_3.
\end{aligned}$$

更に

$$P = Q = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 14 & 42 \\ 1 & 7 & -2 & -6 \\ 1 & -1 & -6 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

となります. 従って, 64 個の $X$ の元達は, $\mathbb{R}^{14}$ における単位球面に埋め込まれ, $(\alpha, x), (\beta, y) \in R_i$ $(0 \le i \le 3)$ がそれぞれユークリッド内積が, $1, -\frac{1}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{1}{7}$ であることに対応することが分ります.

2005 年 5 月の研究会のときに, Cohn からこれら 2 つのアソシエーションスキームはパラメター $p_{i,j}^k$ 達から一意的に決まるだろうか？との質問を受けました. そのあとしばらくそのことに取り組んで, 次の結果を得ることが出来ました.

**定理 (Eiichi Bannai, Etsuko Bannai and Hideo Bannai)** 上の 2 つのアソシエーションスキームはいずれもパラメターにより一意的に決まる.

**証明の方針**

$X = \{x_1, x_2, \cdots, x_N\} \subset S^{n-1}$ が同じパラメターを持つアソシエーションスキームとする. このとき, グラム行列

$$G = (x_i \cdot x_j)_{1 \le i \le N, 1 \le j \le N}$$

が直交変換を除いて一意的に定まることを示す. これは, コンピューターも用いて, 幾何学的に決める. その際, アソシエーションスキームが非原始的であることをうまく利用する. （詳細はプレプリント [6] を参照されたい. ）

# 4　これら２つのアソシエーションスキームの性質と一般化の試み

以下の話は, Abdukhalikov, Klin, Ziv-Av 達との進行中の共同研究にもとづいている.

**40 点のアソシエーションスキーム (in $\mathbb{R}^{10}$)**
$X$ の自己同型群は $2^4 : S_5$ (split) である．この群は 40 点上可移に働き, １点の固定群は, $2 \cdot S_4$ (non-split) である.
$X$ が半径 $\sqrt{6}$ の球面上にあるように scale を取り直すと, $X$ は $Q_{10}$ と呼ばれる格子を生成する．この格子の自己同型群は $2^{10} : S_6$ であり, この格子は $[10, 5, 4]$-コードから Construction A により得られる．格子 $Q_{10}$ の theta series は

$$1 + 260q^4 + 960q^6 + 3060q^8 + \cdots$$

である. ($X$ は上の $q^6$ の係数 960 の中に現われる．）このアソシエーションスキームの高次元における類似はあるのかどうか興味深いと思われるが未解決である.

**64 点のアソシエーションスキーム (in $\mathbb{R}^{14}$)**
$X$ の自己同型群は $4^3 : (2 \times L_3(2))$ である．この群は 64 点上可移に働き, １点の固定群は, $2 \times L_3(2)$ である.
$X$ が半径 $\sqrt{7}$ の球面上にあるように scale を取り直すと, $X$ で生成される格子の自己同型群は $2^{14} : (2^3 : L_3(2))$ であり, この格子は $[14, 4, 7]$-コードから Construction A により得られる．この格子の theta series は

$$1 + 28q^4 + 1024q^7 + 2156q^8 + \cdots$$

である. ($X$ は上の $q^7$ の係数 1024 の中に現われる．）このアソシエーションスキームの高次元における類似はあるのかどうか興味深いと思われるが, 次に述べるきれいな類似が存在する
ここで, $q = 2^m, m =$odd とする.

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2q-2 & (q-1)(q-2) & q-1 \\ 1 & -\sqrt{2q}-2 & \sqrt{2q}+2 & -1 \\ 1 & \sqrt{2q}-2 & -\sqrt{2q}+2 & -1 \\ 1 & -2 & -q+2 & q-1 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{(q-\sqrt{2q})(q-1)}{2} & \frac{(q+\sqrt{2q})(q-1)}{2} & q-1 \\ 1 & -\frac{\sqrt{2q}(q-2)}{4} & \frac{\sqrt{2q}(q-2)}{4} & -1 \\ 1 & \frac{\sqrt{2q}}{2} & -\frac{\sqrt{2q}}{2} & -1 \\ 1 & -\frac{q-\sqrt{2q}}{2} & -\frac{q+\sqrt{2q}}{2} & q-1 \end{pmatrix}.$$

をもつアソシエーションスキームが構成できる．（本質的にはde Caen-van Dam による．）上の行列 $Q$ の第２列目から読み取れるように, このアソシエーションスキームは, $\mathbb{R}^{2q-2} = \mathbb{R}^{2^{m+1}-2}$
$|X| = q^2 = 4^m$
であり, 内積は,

$$(1), \frac{-\sqrt{2q}-2}{2q-2}, \frac{\sqrt{2q}-2}{2q-2}, \frac{-1}{q-1}$$

である．とくに $m = 3$ としたものが先の 64 点（in $\mathbb{R}^{14}$) であり, $m = 5$ の場合は $\mathbb{R}^{62}$ における 1024 点のクラス 3 のアソシエーションスキームで, 1 でない最大の内積は, $\frac{3}{31}$ である.
これらの任意の奇数 $m$ に対するアソシエーションスキームが universally optimal になるかもしれない候補と思うのであるが, どうであろうか？

最後に補足的なことをいくつか述べて終わります.

**Kerdock set** $V = \mathbb{F}_2^{m+1}$ の上の alternating bilinear forms と零行列の合併集合 $X$ で, $X$ の相異なる２つの元の和が常に non-singular という性質を満たす最大の元の個数は $4^m$ で, そのようなものを Kerdock set と呼びます.
• 一般に, Kerdock set から先に述べた指標表をもつアソシエーションスキームが構成できることが知られています. (de Caen-van Dam). (特別な場合は, 例えば Hammons-Kumar-Calderbank-Sloane-Sole の $\mathbb{Z}_4$-Kerdock codes からも作れます (Abdukhalikov).
• $X$=Kerdock set ならば, $N = 2^{m+1}$ と置く時, $\mathbb{R}^{2^{m+1}}$ において, $N(N+2)$ 点からなる単位ベクトルの集合で,

$$X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_{\frac{N+2}{2}}$$

で, 各 $X_i$ は $N$ 次元の直交フレーム（の基底の $\pm$) 従って $|X_i| = 2N$, 更に $X_i$ と $X_j$ $(i \neq j)$ に属する２つの元の内積は $\pm\frac{1}{\sqrt{N}}$ と分解されることが知られています. (Calderbank-Cameron-Kantor-Seidel[8, Theorem 3. 12]. )

今, $u, v$ を ($X_1$ に属する）直交する 2 つの単位ベクトルとします.

$$Y = \{u \cdot x = v \cdot x = \frac{1}{\sqrt{N}} | x \in X\}$$

と置くと,

$$Y \subset \mathbb{R}^{2^{m+1}-2}$$
$$|Y| = \frac{N^2}{4}$$

となり, $Y$ が先の指標表 $P, Q$ をもつアソシエーションスキームを作ります.

• Kerdock code から出発しないでも, 単に $\mathbb{R}^{2^{m+1}}$ における $N(N+2)$ 個の単位ベクトルの集合で条件を満たすものが存在すれば, 先の指標表 $P, Q$ をもつアソシエーションスキームが出来ると思うのですがどうでしょうか？（まだきちんと考えてないのですが, 一般にそれが成立つことを期待したいと思います. ）

• W. Kantor の仕事で, 正確には $m$ が奇数でかつ素数でないという条件のもとで, 多くの同型でない Kerdock sets の存在が導かれていますが, それが先の指標表 $P, Q$ をもつアソシエーションスキームで同型でないものが沢山あることを示していると思われます. そのことは我々の考えているアソシエーションスキームが universally optimal になるかという点からはあまりありがたくないかもしれませんが, 最終的にどちらになるかはこれからの研究課題と思います.

• R. Griess, Jr. は最近のプレプリントで, Cohn 達の universally optimal codes, 特に $\mathbb{R}^{14}$ における 64 点の集合に興味を持ち, それが 16 次元の Barnes-Wall 格子の codimension 2 の section から得られることを示しています. （これは多分先に述べた直交フレームを用いての構成と本質的に同じと思われます. ）いずれにせよ, Kerdock sets, 直交フレームなどは Barnes-Wall 格子（あるいはその拡張）などと深い関係がある筈ですが, それもこれからの研究課題と思われます.

# References

1. C. Bachoc and F. Vallentin, New upper bounds for kissing numbers from semidefinite programming, preprint, Aug. 2006. arXiv. math.

MG/0608426.

2. B. Ballinger, G. Blerkherman, H. Cohn, N. Glansiracusa and E. Kelly, Experimental study of energy-minimizing point configurations on spheres, preprint, Sept. 2006.

3. 坂内英一, O. ミュージンによる 4 次元キッシング数の決定, 数学セミナー 2005 年 10 月号, 50-57.

4. 坂内英一, 8 次元, 24 次元の球の詰め込み問題の大躍進, 数学セミナー 2006 年 3 月号, 42-49.

5. 坂内英一, 坂内悦子, 球面上の代数的組合せ理論, シュプリンガー東京, 1999.

6. E. Bannai, E. Bannai, and H. Bannai, On the uniqueness of certain association schemes, preprint, 2006.

7. E. Bannai and N. J. A. Sloane, Uniqueness of certain spherical codes, Can. J. Math. 33 (1981) 437-449.

8. A. R. Calderbank, P. J. Cameron, W. M. Kantor and J. J. Seidel, $\mathbb{Z}_4$-Kerdock codes, orthogonal spreads, and extremal line systems Proc. London Math. Soc. , (3) 75 (1997), 436-480.

9. H. Cohn, Sphere Packings, energy minimization, and linear programming bounds, in The Proceeding of Second COE Workshop on Sphere Packings, (2005), 1-42.
See http://www. math. kyushu-u. ac. jp/coe/report/mhf2. cgi

10. H. Cohn, J. H. Conway, N. Elkies and A. Kumar, The $D_4$ root system is not universally optimal , preprint, 2004. arXiv. math. MG/0607447

11. H. Cohn and N. Elkies, New upper bounds on sphere packings I,

Annals of Math. 157 (2003), 689- 714.

12. H. Cohn and A. Kumar, Optimality and uniqueness of the Leech lattice, preprint,(arXiv:math. MG/0403263).

13. H. Cohn and A. Kumar, Universally optimal distribution of points on spheres, preprint,(arXiv:math. MG/0607446). to appear in J. of Amer. Math. Soc.

14. H. Cohn and A. Kumar, Uniqueness of the $(22, 891, 1/4)$ spherical codes, preprint, 2006.

15. J. H. Conway and N. J. A. Sloane, Sphere Packings, lattices and Groups, 3rd. ed. Springer-Verlag, 1999.

16. D. de Caen and E. R. van Dam, Association schemes related to Kasami codes and Kerdock sets. Designs and codes—a memorial tribute to Ed Assmus. Des. Codes Cryptogr. 18 (1999), no. 1-3, 89–102.

17. P. Delsarte, G. -M. Goethals and J. J. Seidel, Spherical codes and designs, Geom. Dedicata, 5 (1977), 363-388.

18. T. Ericson and V. Zinoviev, Codes on Euclidean spheres, North-Holland Mathematical Library, 63. North-Holland Publishing Co. , Amsterdam, 2001.

19. R. Griess, Jr. , Few cosine spherical codes and Barns-Wall lattices, preprint, 2006.

20. T. C. Hales, A computer verification of the Kepler conjecture, Proceedings of Inter. Congree of Math. (Beijing 2002), Higher Ed. Press. Vol III, 795-804.

21. T. C. Hales, A proof of Kepler conjecture, Annals of Math. 162 (2005), 1065-1085

22. A. R. Hammons, Jr. , P. V. Kumar, A. R. Calderbank, N. J. A. Sloane, and P. Solé, $\mathbb{Z}_4$-linearity of Kerdock, Preparata, Goethals and related codes, IEEE Trans. Inform. Theory, 40 (1994), 301-319.

23. W. -Y. Hsiang, Least action principle of crystal formation of dense packing type ] and Kepler's conjecture. World Scientific Publishing Co. , 2001.

24. W. -Y. Hsiang, On the kissing number of sphere packings in $E^4$ and a strong uniqueness theorem, preprint 2001.

25. J. Leech, The problem of thirteen spheres, Math. Gaz. 40 (1956), 22-23.

26. V. I. Levenshtein, On bounds for packings in n-dimension euclidean space, Soviet Math. Doklady 20 (1979), 417-421.

27. H. Maehara, The problem of thirteen spheres—-a proof for undergraduates, to appear in Europ. J. Comb.

28. O. R. Musin, The kissing number in four dimensions, preprint, 2003, arXiv:math. MG/0309430

29. O. Musin, An extension of Delsarte's methods, The kissing problem in three and four dimensions, see arXiv. math. MG/0309430, also see The Proceeding of COE Workshop on SpherePackings, (2005), 1-25. http://www. math. kyushu-u. ac. jp/coe/report/mhf2. cgi

30. O. R. Musin, The kissing number in three dimensions, Discrete Comp. Geom. 35 (2006), 375-384

31. O. Musin, Bounds for codes by semidefinite programming, preprint, 2006.

32. A. Odlyzko, N. J. A. Sloane, New bounds on the number of unit spheres that can touch a sphere in n dimensions, J. Comb. Thery (A), 26 (1976), 210-214.

33. F. Pfender and G. M. Ziegler Kissing numbers, Sphere Packings, and Some Unexpected Proofs, Notices of Amer. Math. Soc. 51 (2004), 873-883.

34. A. Schrijver, New code upper bounds from the Terwilliger algebras and semidefinite programing, IEEE Trans. Inform. Theory 51 (2005), 2859-2866.

35. K. Schütte, and B. L. van der Waerden, Das Problem der dtrizehn Kugeln, Math. Ann. 125 (1953), 325-334.

36. C. G. Szpiro, Kepler Conjecture, Wiley 2003; 日本語訳「ケプラー予想——四百年の難問が解けるまで」, 新潮社, 2005 .

37. 田上真, Oleg Musin の論文「The kissing number in four dimensions」の紹介. 数理解析研究所講究録 1394 (2004), 15-27

38. 田中太初, この報告集の原稿参照.

39. E. R. van Dam, Three-class association schemes, J. Algebraic Combin. 10 (1999), no. 1, 69–107.

40. B. Venkov, Réseaux et designs sphériques, in Réseaux euclidiens designs sphériques et formes modulaires, ed. J. Martinet, L 'enseignement math. (2001), 10-86.