一般 Hecke カテゴリーとその表現
Generalized Hecke categories and their representation

吉　田　知　行 (北大・理)
Tomoyuki YOSHIDA (Hokkaido Univ)

概 要

In this article, we give an overview of the theory of *generalized Hecke categories*. The theory will be applied to some areas with expectation — finite group theory, modular representation theory, subgroup complexes, equivariant topology, combinatorics with group action, and so on.

1　3 つの予想

有限群論の立場から，一般 Hecke カテゴリーとその表現を研究する動機はいくつかある．その一つに部分群束に関連したいくつかの予想がある．以下，$\mathcal{S}_p(G)$ は，G の p-部分群のなす順序集合を表す．これから得られる順序複体も同じ記号で表す.

(A) **Alperin 予想** (1987)．G を有限群，$\boldsymbol{k}$ を標数 $p>0$ の代数的閉体とする．G の**ウェイト** (weight) (P,V) とは，p-部分群 P と，単純かつ射影的な $\boldsymbol{k}[N_G(P)/P]$-加群 V の対のことをいう．ただし，G の共役による作用で等しくなるウェイトは同じものと見る．このとき，ウェイトの個数は，単純 $\boldsymbol{k}G$-加群の同形類の個数と等しいであろう.

(B) **Quillen 予想** ([Qu 78])．$\mathcal{S}_p(G)$ が可縮であることと，G が自明でない正規 p-部分群を持つことは同値.

(C) **Hom 予想** ([AY 93]) 有限群 A, G について

$$|\mathrm{Hom}(A,G)| \equiv \bmod \gcd(|A/[A,A]|, |G|).$$

ここで $[A,A]$ は A の交換子群.

有限群 G に対し，$\mathrm{np}(G)$ を，単純かつ非射影的 $\boldsymbol{k}G$-加群の同形類の個数

とする．このとき Alperin 予想は，次の等式に同値である ([We 90]):

$$\mathrm{np}(G) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_p(G)/G} (-1)^{\dim \sigma} \mathrm{np}(G_\sigma).$$

右辺は，G の部分群複体に関する位相幾何的な量を表している．

A が基本可換 p-群の場合の Hom 予想はホモロジー論的シローの定理

$$\chi(\mathcal{S}_p(G)) \equiv 1 \pmod{|G|_p}$$

に同値である．したがってこの予想も部分群束に関連している．Hom 予想は，ちょっと意外だが，A, G が p-群の場合に帰着される．なぜか，群論で (非可換) 有限群の間の準同形写像の個数 $|\mathrm{Hom}(A, G)|$ が表れることはめずらしい．基本群からの準同形写像はトポロジー関係で見かける (例えば Dijkgraaf-Witten 不変量) ([Wa 92])

Alperin 予想と Quillen 予想は，定跡通り，単純群へ帰着させ，あとは個々の単純群について確かめるという方針の下で多くの研究が続けられている．残念ながら，ふたつの予想のどのステップも解決されておらず，現在は攻めあぐんでいる状況である．Hom 予想は，かなり広い範囲の群で成り立つことが分かっているが，こちらも一般的解決への見通しは暗い (A がアーベル群の場合は [Yo 93a])．もしかすると，3 つの予想すべてを含む大きな予想があって，そこでは数学的帰納法がうまく働くのかもしれない．

この部分群束の研究に役立つのが Burnside 環である．

2 Mackey ファンクター

Mackey ファンクターについては Webb [We 00] 参照．$\mathcal{E}$ を有限直和 (とくに始対象 $\emptyset$ と $X+Y$) と pull-back を持つカテゴリー とする．$\mathbf{Mod}_{\boldsymbol{k}}$ を可換環 $\boldsymbol{k}$ 上の加群のカテゴリーとする．$(\boldsymbol{M}^*, \boldsymbol{M}_*) : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbf{Mod}_{\boldsymbol{k}}$ を，反変および共変ファンクターの対で，対象上一致するものとする．$\boldsymbol{M}^*(X) = \boldsymbol{M}_*(X)$ を単に $\boldsymbol{M}(X)$ と書く．また $f : X \longrightarrow Y$ に対し，$f^* := \boldsymbol{M}^*(f) : \boldsymbol{M}^*(Y) \longrightarrow \boldsymbol{M}^*(X)$, $f_* := \boldsymbol{M}_*(f) : \boldsymbol{M}(X) \longrightarrow \boldsymbol{M}^*(Y)$ と書く．このとき $\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{M}^*, \boldsymbol{M}_*) : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbf{Set}$ が **Mackey ファンクター**であるとは，次のふたつの公理が成り立つことをいう：

(M1) $\boldsymbol{M}^*$ は有限直和を直積に写す:$\boldsymbol{M}(\emptyset) = \mathbf{1}, \boldsymbol{M}(X+Y) \cong \boldsymbol{M}(X) \times \boldsymbol{M}(Y)$.

(M2)
$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, phantom, "\text{P.B.}"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd} \quad \Longrightarrow \quad \begin{tikzcd} \boldsymbol{M}(W) \arrow[r, "p_*"] \arrow[dr, phantom, "\text{C}"] & \boldsymbol{M}(X) \\ \boldsymbol{M}(Y) \arrow[u, "q^*"] \arrow[r, "g_*"] & \boldsymbol{M}(Z) \arrow[u, "f^*"'] \end{tikzcd}$$

(ここで P.B. は pullback 図式を，C は可換図式を意味する)．

(注意) Mackey ファンクターの行き先 $\mathbf{Mod}_{\boldsymbol{k}}$ は，可換半環上の半加群のカテゴリーとしてもよい．より一般に任意のカテゴリー $\mathcal{S}$ を取ることも出来る．Mackey ファンクター $\boldsymbol{M}$ の各成分 $\boldsymbol{M}(X)$ は，次の加法により $\mathcal{S}$ における加法的モノイドになる:

$$+: \boldsymbol{M}(X) \times \boldsymbol{M}(X) \cong \boldsymbol{M}(X+X) \xrightarrow{\nabla_*} \boldsymbol{M}(X),\ \mathbf{1} = \boldsymbol{M}(\emptyset) \longrightarrow \boldsymbol{M}(X).$$

さらに f^*, f_* はこの和を保つ．したがって，Mackey ファンクターは $\mathcal{S}$ における可換モノイドのカテゴリーを通る．この場合，直和図式 $X \xleftarrow{i} X+Y \xrightarrow{j} Y$ に対し

$$\boldsymbol{M}(X) \underset{i_*}{\overset{i^*}{\leftrightarrows}} \boldsymbol{M}(X+Y) \underset{j_*}{\overset{j^*}{\leftrightarrows}} \boldsymbol{M}(Y)$$

は ($\mathcal{S}$ の) 可換モノイドの biproduct 図式である．

例． $\mathcal{E} = \mathbf{set}^G$ (有限 G-集合のカテゴリー) とする．この場合，(M1) により，Mackey ファンクター $\boldsymbol{M}$ は部分群 $H \leq G$ での値 $\boldsymbol{M}(G/H)$ で決まる．誤解がなければ，$\boldsymbol{M}(G/H)$ を $\boldsymbol{M}(H)$ と書く．$H \leq K \leq G$ と $g \in G$ に対し，自然な G-写像 $xH \longmapsto xK$ と $xH \longmapsto xgH^g$ (ここで $H^g := g^{-1}Hg$) は

$$\begin{aligned}
\mathrm{res} &: \boldsymbol{M}(K) \longrightarrow \boldsymbol{M}(H); \beta \longmapsto \beta\downarrow_H \\
\mathrm{cor} &: \boldsymbol{M}(H) \longrightarrow \boldsymbol{M}(K); \alpha \longmapsto \alpha\uparrow^K \\
\mathrm{cor} &: \boldsymbol{M}(H) \longrightarrow \boldsymbol{M}(H^g); \alpha \longmapsto \alpha^g
\end{aligned}$$

を誘導する．

$$\beta\downarrow_H\uparrow^K = (K:H)\,\beta \quad (\forall H \leq K \leq G,\, \beta \in \boldsymbol{M}(K))$$

のとき，$\boldsymbol{M}$ を Hecke ファンクター (またはコホモロジー的 Mackey ファンクター) という ([Yo 83a])．

(1) V を $\boldsymbol{k}G$-加群とする．このとき $X \longmapsto \mathrm{Ext}^n_{\boldsymbol{k}G}(kX, M)$，または $H(\leq G) \longmapsto H^n(G,V)$ は Hecke ファンクターになる．G-写像 $f: X \longrightarrow Y$ に対し，$f: \boldsymbol{k}X \longrightarrow \boldsymbol{k}Y$ とその転置 $f': \boldsymbol{k}Y \longrightarrow \boldsymbol{k}X$ があるので，それぞれから f^* と f_* が誘導される．$H \leq K$ のとき $H^n(H,V) \longrightarrow H^n(K,V)$ は transfer 写像，$H^n(K,V) \longrightarrow H^n(H,V)$ は制限写像である．

(2) G-集合 X に対し，X 上の $\mathbb{C}G$ 加群の Grothendieck 環を $\boldsymbol{R}(X)$ とする．ここで X 上の $\mathbb{C}G$ 加群とは，X をカテゴリーと見た (対象は X の元，射 $x \longrightarrow y$ は $x = gy$ を満たす G の元 g，合成は G における積) ときのファンクター $X^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Mod}_{\boldsymbol{k}}$ のことである．とくに $\boldsymbol{M}(G/H)$ は指標環 $\boldsymbol{R}(H)$ に同形である．このとき，$X \longmapsto \boldsymbol{R}(X)$ は Mackey ファンクターになる．

(3) $\mathbf{set}^G/X$ を X 上の G-集合 (すなわち G-写像 $A \longrightarrow X$) のカテゴリーとする．$\boldsymbol{B}: X \longmapsto \mathrm{Gro}(\mathbf{set}^G/X)$ (Gro は Grothendieck 環) は Mackey

ファンクターになる．これを **Burnside 環ファンクター**という．$\boldsymbol{B}(G/H)$ は Burnside 環 $\boldsymbol{B}(H)$ (有限 H-集合の Grothendieck 環) に同形である．

(4) $\mathbf{set}^S$ を有限モノイド S 上の有限 S-集合のカテゴリーとする．S-集合 X に対し $\mathbf{Sub}_S(X)$ で S-部分集合のなす順序集合 (分配束) を表す．このとき $X \longmapsto \mathbf{Sub}_S(X)$ は，$\mathbf{set}^S$ から集合のカテゴリーへの Mackey ファンクターになる．S-写像 $f : X \longrightarrow Y$ に対し，

$$f^* : \mathbf{Sub}_S(Y) \longrightarrow \mathbf{Sub}_S(X) \quad ; \quad B \longmapsto f^{-1}(B),$$
$$f_* : \mathbf{Sub}_S(X) \longrightarrow \mathbf{Sub}_S(Y) \quad ; \quad A \longmapsto f(A)$$

とすればよい．この Mackey ファンクター構造から定まる $\mathbf{Sub}_S(X)$ 上の「和」は，部分集合の和集合である．f_* の代わりに次を取っても Mackey ファンクターが得られる：

$$f_\star : \mathbf{Sub}_S(X) \longrightarrow \mathbf{Sub}_S(Y); A \longmapsto f(A^c)^c.$$

ここで，$A^c \subseteq X$ (補集合) は $A \subseteq X$ と交わらない最大の S-部分集合．この場合の「和」は $\mathbf{Sub}_S(X)$ における共通部分である．

$\boldsymbol{L}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{N} : \mathbf{set}^G \to \mathbf{Mod}_{\boldsymbol{k}}$ を Mackey ファンクターとする．$\rho : \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{L}$ が **paring** であるとは，ρ が自然な双線形写像の族

$$\rho_{XY} : \boldsymbol{M}(X) \times \boldsymbol{N}(Y) \longrightarrow \boldsymbol{L}(X \times Y) \quad (X, Y \in \mathbf{set}^G)$$

であることをいう．

paring $\rho : \boldsymbol{L} \times \boldsymbol{M} \longrightarrow \boldsymbol{L}$ があれば，

$$\rho_X : \boldsymbol{M}(X) \times \boldsymbol{N}(X) \xrightarrow{\rho_{X,X}} \boldsymbol{L}(X \times X) \xrightarrow{\Delta^*} \boldsymbol{L}(X)$$

が定まる．$\alpha \cdot \beta := \rho_X(\alpha, \beta) \in \boldsymbol{L}(X)$ は双線形性と次を満たす:

(P1) $f^*(\alpha' \cdot \beta') = f^*(\alpha') \cdot f^*(\beta')$;
(P2) $f_*(\alpha \cdot f^*(\beta')) = f_*(\alpha) \cdot \beta'$;
(P3) $f_*(f^*(\alpha') \cdot \beta) = \alpha' \cdot f_*(\beta)$.

(P2), (P3) を Frobenius 性という．逆に，Frobenius 性を持つ双線形写像の族 (ρ_X) から，次のようにして pairing が得られる:

$$\boldsymbol{M}(X) \times \boldsymbol{N}(Y) \xrightarrow{\pi_1^* \times \pi_2^*} \boldsymbol{M}(X \times Y) \times \boldsymbol{N}(X \times Y) \xrightarrow{\rho_{X \times Y}} \boldsymbol{L}(X \times Y).$$

自分自身との paring $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} \longrightarrow \boldsymbol{A}$ を使って「環」の概念が定義される (各 $\boldsymbol{A}(X)$ は $\boldsymbol{k}$-多元環で，各 f^* は多元環準同形写像)．また「環」$\boldsymbol{A}$ 上の「加群」の概念が paring $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{M} \longrightarrow \boldsymbol{M}$ により定義される．

例． (1) $(K, \mathcal{O}, \mathbb{F})$ を p-モジュラーシステムとする．すなわち $\mathcal{O}$ は完備離散付値環，K はその商の体で標数は 0，$\mathbb{F}$ は剰余体で標数は $p > 0$ である．さら

に K も $\mathbb{F}$ も考えている有限群に対して十分大きいとする．この場合，指標環ファンクター $\boldsymbol{R}_K$ もモジュラー指標環 $\boldsymbol{R}_{\mathbb{F}}$ も「環」である．さらに，$\boldsymbol{R}_{\mathbb{F}}$ と射影的表現の加群 $\boldsymbol{P}_{\mathbb{F}}$ は $\boldsymbol{R}$ 上の「加群」である．Cartan 準同形 $c : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}_{\mathbb{F}}$ と分解準同形 $d : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}_{\mathbb{F}}$ は「$\boldsymbol{R}$-加群」の「$\boldsymbol{R}$-準同形」を与える．

(2) $\mathbf{set}^S$ (S は有限モノイド) 上の Mackey ファンクター $\mathbf{Sub} : X \longmapsto \mathbf{Sub}_S(X)$ は「半環」(さらに「分配束」) である．和は和集合，積は共通部分である．Frobenius の相互律は次のように表される: $f : X \longrightarrow Y$ に対し，

$$f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B \quad (A \subseteq_S X, B \subseteq_S Y).$$

Mackey ファンクターが一躍注目されることになったのは，前に出てきた Alperin 予想との関係が大きい．

([TW 1990]) Alperin 予想が成り立つことと，次の条件を満たす (標数 $p > 0$ の体上の) Mackey ファンクター $\boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2$ が存在することは同値である：

(a) 任意の $H \leq G$ に対し，$\mathrm{Res}^G_H(\boldsymbol{M}_i)$ は H の p-局所部分群に関して射影的である．
(b) 任意の $H \leq G$ に対し，$\dim \boldsymbol{M}_1(H) - \dim \mathbf{M}_2(H) = \mathrm{np}(H)$.

この同値条件は Mackey ファンクターの Grothendieck 群の研究の重要性を意味するようだ．有限群の Mackey ファンクターを考えることは，すべての部分群の表現を同時に考えることである．

3　スパンのカテゴリーと Hecke カテゴリー

有限直和と pullback を持つカテゴリー $\mathcal{E}$ の**スパン** $\mathbf{Sp}(\mathcal{E})$ とは，$\mathcal{E}$ と同じ対象を持ち，$\mathcal{E}$ における図式 $[X \xleftarrow{l} A \xrightarrow{r} Y]$ (同型類) を Y から X への射とするカテゴリーである ([Mc 98])．合成はファイバー積によって定義される:

$$[X \longleftarrow A \longrightarrow Y] \circ [Y \longleftarrow B \longrightarrow Z] = [X \longleftarrow A \times_Y B \longrightarrow Z].$$

加法を

$$[X \longleftarrow A \longrightarrow Y] + [X \longleftarrow A' \longrightarrow Y] := [X \longleftarrow A + A' \longrightarrow Y]$$

$$[X \longleftarrow A \longrightarrow Y] + [X \longleftarrow A' \longrightarrow Y] := [X \longleftarrow A + A' \longrightarrow Y]$$

で定義すれば，$\mathbf{Sp}(\mathcal{E})$ は半加法的で biproduct を持つ．

このとき $\mathbf{Sp}(\mathcal{E})$ は Mackey ファンクターの表現カテゴリーになる:

$$(\text{Mackey functors}) \cong \mathrm{Add}[\mathbf{Sp}(\mathcal{E}), \mathbf{Mod}_{\boldsymbol{k}}].$$

例． $\mathcal{E} = \mathbf{set}^G$ (有限 G-集合のカテゴリー) の場合．$\mathbf{Sp}(\mathbf{set}^G)$ の対象は有限 G-集合である．$X = X_1 + \cdots + X_r$ を，可移 G-集合への直和分解とすると

き，$\mathbf{Sp}(\mathbf{set}^G)$ において $X = X_1 \oplus \cdots \oplus X_r$ となっている．G/K から G/H への射は $[H, x, A, K]$ ($x \in G, A \leq H^x \cap K$) で生成され，次の関係式で定義される可換半群である:

$$[H, hxk, A^k, K] = [H, x, A, K] \quad (h \in H, k \in K).$$

合成は

$$[H, x, A, K] \circ [K, y, B, L] = \sum_{Ak^yB \in A\backslash K/{}^yB} [H, xky, A^{ky} \cap B, L]$$

で与えられる．

$\boldsymbol{M}$ が $\mathbf{set}^G$ 上の Mackey ファンクターなら，各 $[H, x, A, K]$ は

$$[H, x, A, K] : \boldsymbol{M}(K) \longrightarrow \boldsymbol{M}(H); \beta \longmapsto \beta^x \downarrow_A \uparrow^K$$

(Hecke 作用素の類似物) を誘導する．

G を有限群，$\boldsymbol{k}$ を可換環とする．**Hecke カテゴリー** $\mathbf{Hec}_{\boldsymbol{k}}(G)$ とは，有限 G-集合を対象とし，$\boldsymbol{k}$ 係数 G-行列を射とするカテゴリーである．合成は行列の積による．ここで G-集合 X, Y に対し，$X \times Y$ 型の行列 $A = (a_{xy})$ が G-行列であるとは，$a_{gx,gy} = a_{xy}$ ($g \in G$) を満たすことをいう．Hecke カテゴリーにおける G/H の自己準同型環は，Hecke 環 $\boldsymbol{k}[H\backslash G/H]$ に同型である．$\mathbf{Hec}_{\boldsymbol{k}}$ は $\mathbf{Mod}_{\boldsymbol{k}G}$ の部分カテゴリーに同値である．Hecke カテゴリーは，Hecke ファンクターの表現カテゴリーである．つまり Hecke ファンクターは，$\boldsymbol{k}$-加法的反変ファンクター $\mathbf{Hec}_{\boldsymbol{k}}(G)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Mod}_{\boldsymbol{k}}$ と同一視できる．実際加法的ファンクター $\mathbf{Sp}(\mathbf{set}^G) \longrightarrow \mathbf{Hec}_{\boldsymbol{k}}(G)$ が，

$$X \longmapsto X,\ [X \xleftarrow{l} A \xrightarrow{r} Y] \longmapsto (|l^{-1}(x) \cap r^{-1}(y)|)_{x \in X, y \in Y}$$

で与えられる．Hecke ファンクターへのスパンの作用は，Hecke 作用素を用いて，次のように表せる:

$$\alpha|[H, x, A, K] = (H^x \cap K : A)\, \alpha|[HxK] = (H^x \cap K : A)\, \alpha^x{}_{H^x \cap K}{}^K.$$

$\boldsymbol{k}G$-加群のカテゴリーは Hecke ファンクターのカテゴリーに埋め込まれる ($V \longmapsto \boldsymbol{c}_V$).

4　一般 Hecke カテゴリー

$\mathcal{E}$ を直和 $X + Y$，始対象 $\emptyset$，ファイバー積 $X \times_Z Y$，直積 $X \times Y$，終対象 $\mathbf{1}$ を持つカテゴリーとする．$\boldsymbol{A} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbf{Mod}_{\boldsymbol{k}}$ を Mackey ファンクターで，「環」をなすとする．このとき ($\boldsymbol{A}$ を係数環とする) **一般 Hecke カテゴリー** $\mathbf{Hec}(\mathcal{E}, \boldsymbol{A})$ は，$\mathcal{E}$ と同じ対象を持ち，Y から X への Hom-set が $\boldsymbol{A}(X \times Y)$

であるようなカテゴリーである．合成は次で定義される ($XY := X \times Y$ など):

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{A}(XY) \times \boldsymbol{A}(YZ) \xrightarrow{\pi_{12}^* \times \pi_{23}^*} \boldsymbol{A}(XYZ) \times \boldsymbol{A}(XYZ) \\ &\xrightarrow{\mu} \boldsymbol{A}(XYZ) \xrightarrow{\pi_{13*}} \boldsymbol{A}(XZ). \end{aligned}$$

一般 Hecke カテゴリーは，$\boldsymbol{k}$-加法的自己双対カテゴリーで，「$\boldsymbol{A}$-加群」のカテゴリーの表現カテゴリーである．

例． 有限群 G と可換環 $\boldsymbol{k}$ に対し，$\mathbf{Hec}(\mathbf{set}^G, \boldsymbol{A})$ を $\mathbf{Hec}(G, \boldsymbol{A})$ と書く．

(1) $\boldsymbol{c_k} := \mathrm{Ext}^0_{\boldsymbol{k}G}(k[-], \boldsymbol{k})$ とする．すなわち $\boldsymbol{c_k}(X) = \mathrm{Map}_G(X, \boldsymbol{k})$，または $\boldsymbol{c_k}(H) = \boldsymbol{k}$．この場合，$\mathbf{Hec}(G, \boldsymbol{c_k})$ は $\mathbf{Hec}_{\boldsymbol{k}}(G)$ に同値である．

(2) Burnside 環ファンクター $\boldsymbol{B}$ の場合，$\mathbf{Hec}(G, \boldsymbol{B})$ は，スパンのカテゴリー $\mathbf{Sp}(G)$ の加法化 $\mathbf{Sp}(G)^+$ に同値である．

(3) 指標環ファンクター $\boldsymbol{R}$ の場合，$\mathbf{Hec}(G, \boldsymbol{R})$ における Y から X への射は，$\boldsymbol{R}$-係数の G-行列 (α_{xy}) で表される．ここで $\alpha_{xy} \in \boldsymbol{R}(G_{xy})$ で $\alpha_{gx,gy} = {}^g\alpha_{xy}$ $(\forall g \in G)$ を満たす．$X = G/H, Y = G/K$ の場合，この行列 (α_{xy}) は $[H, x, \alpha, K]$ $(x \in G, \alpha \in \boldsymbol{R}(H^x \cap K))$ の形で書ける．この表示での合成は

$$\begin{aligned} &[H, x, \alpha, K] \circ [K, y, \beta, L] \\ &= \sum_{(H^x \cap K)k(K \cap {}^yL)} [H, xky, (\alpha^{ky} \downarrow_{H^{xky} \cap K^y \cap L} \beta \downarrow_{H^{xky} \cap K^y \cap L}) \uparrow^{H^{xky} \cap L}, K] \end{aligned}$$

また「$\boldsymbol{R}$-加群」への一般 Hecke 作用素は次で与えられる:

$$\theta | [H, x, \alpha, K] = (\theta^x \downarrow_{H^x \cap K} \alpha) \uparrow^K .$$

モジュラー指標環についても同様のカテゴリーが得られる．

問題． 有限群のモジュラー表現にならって，Hecke ファンクターやより一般の Mackey ファンクターの理論を作れ．

これについては Webb, Bouc などが活発に研究をしている．例えば，Hom とテンソル積の随伴性，Maschke の定理，加法的・乗法的 induction，といったものである．

一般に，カテゴリー $\mathcal{C}$ の**中心**を

$$Z(\mathcal{C}) := \mathrm{EndNat}(\mathrm{id} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C})$$

で定義する (より一般に，ファンクター $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ の centralizer を $\mathrm{EndNat}(F)$ で定義する)．例えば，カテゴリーと見た群や環の中心は，ふつうの意味での中心と一致する．また環同型 $Z(\boldsymbol{k}G) \xrightarrow{\cong} Z(\mathbf{Hec}_{\boldsymbol{k}}(G))$ がある．

ただし Hecke ファンクターの研究さえ相当の困難が予想される．例えば，既約な加群 V は Hecke functor $\boldsymbol{c}_V$ と見ると必ずしも既約でない．また，自明な Hecke ファンクター $\boldsymbol{c_k}$ の部分ファンクターの集合は，p-部分群の G-共役類のなす順序集合と一対一に対応している．この順序集合は最小元を除いても可縮になる (要単純群の分類定理)．

5　中心ベキ等元

簡単のため，有限群 G 上の一般 Hecke カテゴリー $\mathbf{Hec}(G,\boldsymbol{A})$ ($\boldsymbol{A}$ は「環」) を考える (より一般の局所有限トポス $\mathcal{E}$ 上の $\mathbf{Hec}(\mathcal{E},\boldsymbol{A})$ についてもある程度同様のことが成り立つ)．その表現論を考えるとき，中心ベキ等元は重要な役割をはたす．

(i) $Z(\boldsymbol{A}(\mathbf{1}))$ の原始ベキ等元 e と $e \in \boldsymbol{A}(Q)_*$ なる部分群 Q を見つける．環準同型 $Z(\boldsymbol{A}(\mathbf{1})) \longrightarrow Z(\mathbf{Hec}(G,\boldsymbol{A}))$ があるので，これから $\mathbf{Hec}(G,\boldsymbol{A})$ の中心ベキ等元が見つかったことになる．
(ii) 移送定理や切除定理 $\mathbf{Hec}(G,e\boldsymbol{A}) \cong \mathbf{Hec}(N,e\boldsymbol{A}) \cong \mathbf{Hec}(N/Q,e\boldsymbol{A})$ ($N := N_G(Q)$) を示す．
(iv) $\mathbf{Hec}(N/Q,e\boldsymbol{A})$ から Hecke カテゴリーへの充満埋め込みを構成し，それから中心原始ベキ等元を求める．

$\boldsymbol{\mathcal{O}}$ は完備離散付値環で，標数 $p>0$ の剰余環 $\mathbb{F}$ と標数 0 の商体 $\mathbb{K}$ を持つとする．これらの環や体は必要な範囲で十分大きなものとする．いくつかの場合について，中心原始ベキ等元 (cpi) を求める．

(A) $\mathbf{Hec}_{\boldsymbol{k}}(G)$．この場合，$Z(\boldsymbol{k}G) \xrightarrow{\cong} Z(\mathbf{Hec}_{\boldsymbol{k}}(G))$ $\therefore$ $\mathrm{cpi}(\mathbf{Hec}_{\boldsymbol{k}}(G)) \longleftrightarrow \mathrm{cpi}(\boldsymbol{k}G)$ なので，$\boldsymbol{k}G$ の cpi を求めればよい．まず直交関係により，$Z(\mathbb{K}G)$ の原始ベキ等元は

$$e_\chi := \frac{\chi(1)}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g^{-1})g$$

(χ は既約通常指標) の形をしている．さらに $\boldsymbol{\mathcal{O}}G$ の cpi は，$e_B := \sum_{\chi\in B} e_\chi$ の形をしている．この $B \subseteq \mathrm{Irr}(G)$ を (p-) **ブロック**とよぶ．対応する $\boldsymbol{\mathcal{O}}G$ (または $\mathbb{F}G$) の中心原始ベキ等元もブロックベキ等元という．さらに $\mathbb{F}G$ の cpi は $\boldsymbol{\mathcal{O}}G$ の cpi の像である．

P が G の p-部分群，$N := N_G(P)$ とする．Brauer ファンクターを

$$\begin{aligned}\mathrm{Br}_P \quad : \quad & \mathbf{Hec}_{\mathbb{F}}(G) \longrightarrow \mathbf{Hec}_{\mathbb{F}}(N);\\ & X \longmapsto X^P, (a_{xy})_{x\in X, y\in Y} \longmapsto (a_{xy})_{x\in X^P, y\in Y^P}\end{aligned}$$

(X^P は P-固定点のなす N-集合) で定義する．中心を取れば Brauer 準同型という環準同型 $\mathrm{br}_P : Z(\boldsymbol{\mathcal{O}}G) \longrightarrow Z(\mathbb{F}N)$ を得る．$\mathrm{Br}_P(e_B) = e_b$ が N の cpi のとき，ブロック B をブロック b の Brauer 対応という．Brauer 対応は，加群同士の対応を与えないが，Hecke ファンクターの場合は，実際対応を与えている．Hecke カテゴリーと Hecke ファンクターのブロック理論がどの程度出来ているのか不明である．

(B) $\mathbf{Hec}(G,\boldsymbol{\mathcal{O}}\otimes\boldsymbol{R})$．Burnside ファンクターとそれから誘導される中心同士

の環準同型が次で与えられる:

$$\begin{aligned}\Phi &: \mathbf{Hec}(G, \boldsymbol{\mathcal{O}} \otimes \boldsymbol{R}) \longrightarrow {\prod_t}' \mathbf{Hec}_{\boldsymbol{\mathcal{O}}}(C_G(t)/\langle t\rangle); X \longmapsto (X^{\langle t\rangle}),\\ Z(\Phi) &: Z(\mathbf{Hec}(G, \boldsymbol{\mathcal{O}} \otimes \boldsymbol{R})) \rightarrowtail {\prod_t}' Z(\boldsymbol{\mathcal{O}}[C_G(t)/\langle t\rangle]).\end{aligned}$$

ここで直積は, G の p-元 t の G-共役類上のものである．Coker$(Z(\Phi))$ は捻れ群なので，$\mathbb{K} \otimes (-)$ を取れば，$Z(\Phi)$ は環同型である．このことから $Z(\mathbf{Hec}(G, \mathbb{K} \otimes \boldsymbol{R}))$ のベキ等元は次の形をしている:

$$E_{t,\lambda} = (E_{t,\lambda}(X))_X, \quad (t) \in G/\sim, \lambda \in \mathrm{Irr}(C_G(t)/\langle t\rangle)$$

ここで $E_{t,\lambda}(X) = (\epsilon_{x,x'})_{x,x' \in X}$, $\epsilon_{x,x'} \in \mathbb{K} \otimes \boldsymbol{R}(G_{x,x'})$ としたとき

$$\begin{aligned}\epsilon_{x,x'}(s) &= 0 \quad \text{if } s \not\sim_G t\\ \epsilon_{x,x'}(gtg^{-1}) &= \frac{\lambda(1)}{|C_G(t)|} \sum_{c: x'g = xgc} \lambda(c^{-1})\end{aligned}$$

である．また G/H 成分は次のようにも書ける:

$$E_{t,\lambda}(H) = \frac{\lambda(1)}{|H| \cdot |C_G(t)|^2} \sum_{\substack{c \in C_G(t)\\ g \in G: t^g \in H}} \sum_{\alpha \in \mathrm{Irr}(H \cap H^{c^g})} \lambda(c^{-1})\alpha(t^g)[H, c^g, \alpha, H].$$

p-局所 cpi 公式は次の形をしている:

$$E^{(p)}_{t,B} = \sum_{\substack{(s)\\ : s_{p'} = t}} \sum_{b: b^{C_G(t)} = B} \sum_{\lambda \in B} E_{s,\lambda}.$$

ここで t は p'-元，B は $C_G(t)$ の p-ブロックである．また，(s) は G の共役類で p'-部分が t に共役なものを動き，b は $C_G(s)$ の p-ブロックで $B = b^{C_G(t)}$ (Brauer 対応) なるものを動く．

$E^{(p)}_{t,B}$ における $[H, x, \alpha, H]$ の係数は次で与えられる:

$$\sum_{(s): s_{p'} = t} \sum_{b^{C_G(s)} = B} \sum_{\lambda \in b} \sum_{g \in G: s^g \in H} \sum_{h \in H \cap C_G(s)^g x^{-1}} \frac{\lambda(1)\lambda(gx^{-1}h^{-1}g^{-1})\alpha(s^g)}{|H^x \cap H| \cdot |C_G(s)|^2}$$

例えば $t = 1$ で $B = \{\lambda\}$ が defect 0 のブロック，P が Sylow p-部分群なら，

$$\sum_{y \in PxP} \lambda(y) \equiv 0 \pmod{|G|_p}.$$

これもホモロジー論的 Sylow の定理の仲間である．

これらの結果の証明には，Brauer ファンクターや移送定理などを使う:

$$\mathrm{Br}_P : \mathbf{Hec}(G, \boldsymbol{\mathcal{O}} \otimes \boldsymbol{R}) \longrightarrow \mathbf{Hec}(N_G(P)/P, \mathbb{F} \otimes \boldsymbol{R}); X \longmapsto X^P,$$

$$\epsilon^{(p)}_t \mathbf{Hec}(G, \boldsymbol{\mathcal{O}} \otimes \boldsymbol{R}) \cong \mathrm{res}_{C_G(t)}(\epsilon^{(p)}_t)\mathbf{Hec}(C_G(t), \boldsymbol{\mathcal{O}} \otimes \boldsymbol{R}).$$

ここで $\epsilon_t^{(p)}$ は，p'-元 t に対応する $\boldsymbol{\mathcal{O}} \otimes \boldsymbol{R}(G)$ の cpi:

$$\epsilon_t^{(p)} = \sum\nolimits'_{s_{p'}^{(s)}=t} \epsilon_s,\ \epsilon_s := \frac{1}{|C_G(s)|} \sum_{\chi} \chi(s^{-1})\chi.$$

(C) $\mathbf{Hec}(G, \boldsymbol{B})$．まず．Burnside 環 $\boldsymbol{B}(G)$ を考える ([Yo 83b])．まず，有理係数の Burnside 環 $\mathbb{Q} \otimes \boldsymbol{B}(G)$ の原始ベキ等元は

$$e_{G,H} := \frac{1}{|N_G(H)|} \sum_{D \leq H} |D|\mu(D,H)[G/D], \quad H \leq G$$

の形をしている ($e_{G,H} = e_{G,K} \iff H$ と K が共役)．ここで，μ は部分群束のメビウス関数である:

$$\mu(A,A) = 0,\ \mu(A,B) = 0\ (A \not\leq B),\ \sum_{B \leq C} \mu(A,B) = 0\ (A \lneq C).$$

p-部分群複体の Euler 標数は $\chi(\mathcal{S}_p(G)) = 1 - \sum_{A,B \in \mathcal{S}_p(G)} \mu(A,B)$ と表せる．次に $\boldsymbol{\mathcal{O}} \otimes \boldsymbol{B}(G)$ の原始ベキ等元は $e_{G,Q}^{(p)} := \displaystyle\sum_{H^p \sim Q} e_{G,H}$ の形をしている．ここで $Q \leq G$ は p-完全部分群 (の共役類の代表系) を動く．和は H^p が Q に共役であるような部分群 H の共役類を動く．

$Q = 1$ で D が p-部分群 の場合，$e_1^{(p)}$ における $[G/D]$ の係数は

$$\frac{1}{|WD|} \sum_{H^p=1} \mu(D,H) = \frac{1}{|WD|}(1 - \chi(\mathcal{S}_p(G)_{>D})) \in \mathbb{Z}_p$$

($\mathcal{S}_p(G)_{>D}$ は D より大きい p-部分群のなす順序集合)．$D = 1$ の場合は，Brown のホモロジー論的 Sylow の定理 $\chi(\mathcal{S}_p(G)) \equiv 1 \pmod{|G|_p}$ となる．この定理は実は，$\mathrm{Hom}({C_p}^n, G)$ に対する Hom 予想に同値である．

Burnside 環を使って $\mathcal{S}_p(G)$ の幾何的性質を証明できるなら，Burnside 環に毛の生えたようなものを持ち込めば，Alperin 予想や Quillen 予想に何らかの寄与ができるかもしれない．この「Burnside 環に毛の生えたもの」として，一般 Hecke カテゴリーに期待したいのである．

$Q = Q^p \leq N := N_G(Q)$ とする．このとき transfer 定理と excision 定理:

$$e_{G,Q}^{(p)}\mathbf{Hec}(G, \boldsymbol{\mathcal{O}} \times \boldsymbol{B}) \cong e_{N,Q}^{(p)}\mathbf{Hec}(N, \boldsymbol{\mathcal{O}} \times \boldsymbol{B}) \cong e_{N/Q,1}^{(p)}\mathbf{Hec}(N/Q, \boldsymbol{\mathcal{O}} \times \boldsymbol{B}).$$

があるので，$e_{G,1}^{(p)}\mathbf{Hec}(G, \boldsymbol{\mathcal{O}} \times \boldsymbol{B})$ の cpi を考えればよい．埋め込み (Burnside ファンクター):

$$\begin{aligned}
\Phi &: e_{G,1}^{(p)}\mathbf{Hec}(G, \boldsymbol{\mathcal{O}} \otimes \boldsymbol{B}) \longrightarrow \prod\nolimits'_P \mathbf{Hec}_{\boldsymbol{\mathcal{O}}}(N_G(P)/P); X \longmapsto (X^P), \\
Z(\Phi) &: e_{G,1}^{(p)} Z(\mathbf{Hec}(G, \boldsymbol{\mathcal{O}} \otimes \boldsymbol{B})) \rightarrowtail \prod\nolimits'_P Z(\boldsymbol{\mathcal{O}}[N_G(P)/P]).
\end{aligned}$$

(和は，G の p-部分群 P の G-共役類の完全代表系上を動く) がある．$\mathrm{Coker}(Z(\Phi))$ は捻れ群である．さらに，Brauer ファンクター Br_P の存在から，

$$\begin{aligned} & e^{(p)}_{G,1}\mathbf{Hec}(G,\boldsymbol{\mathcal{O}}\otimes\boldsymbol{B})/\mathrm{radical}\cong\mathbf{Hec}_{\mathbb{F}}(G)/\mathrm{radical} \quad (\text{森田同値}), \\ \therefore\quad & \mathrm{cpi}(e^{(p)}_{G,1}\mathbf{Hec}(G,\boldsymbol{\mathcal{O}}\otimes\boldsymbol{B}))\longleftrightarrow\mathrm{cpi}(\mathbf{Hec}_{\mathbb{F}}(G))\longleftrightarrow\mathrm{cpi}(\mathbb{F}G)\end{aligned}$$

きわめて複雑だが具体的な公式もある．

6　今後の課題

(1) 有限群 G に対する一般 Hecke カテゴリー $\mathbf{Hec}(G,\boldsymbol{A})$.
(a) Hecke カテゴリー $\mathbf{Hec}_{\boldsymbol{k}}(G)$ の使ったモジュラー表現論の書き換え．有望.
(b) その理論の一般 Hecke カテゴリー $\mathbf{Hec}(G,\boldsymbol{R})$ や $\mathbf{Hec}(G,\boldsymbol{B})$ への拡張. 進行中.
(c) Mackey ファンクターの crossing ([OY 05]).

(2) 局所有限トポス $\mathcal{E}$ ([MM 92]) に対する $\mathbf{Hec}(G,\boldsymbol{A})$．例えば K_0, G_0 など.
(a) $\mathcal{E}$ が有限半群上の有限集合のカテゴリーや，根つき森のカテゴリー，有限半単体複体のカテゴリーの場合．有望.
(b) $\boldsymbol{A}$ が可換半環 (例えば分配束) の場合．$X\longmapsto\mathbf{Sub}(X)$ がその例.
(c) $\mathcal{E}=[\mathbf{grp}^{\mathrm{op}},\mathbf{set}]$ の場合．有限群論の再構成．穴.

(3) 高次元化．$\mathbf{Sp}(\mathcal{E})$ は (弱い意味の) 2-カテゴリー ([Ma 98]) なので，2-Mackey ファンクター $\mathbf{Sp}(\mathcal{E})^{\mathrm{op}}\longrightarrow\mathcal{S}$ ($\mathcal{S}$ は 2-カテゴリー) が考えられる.
(a) $\mathcal{E}=\mathbf{set}^G$ の場合．$\mathcal{S}$ が，$\mathbf{cat}$ (small cats のなす 2-cat)，$\mathbf{bimod}$ (環と両側加群の 2-cat) の場合．$X\longmapsto\mathbf{set}^G/X$ は 2-Mackey ファンクター (2-Tambara ファンクターにも)．有望.
(b) 一般の局所有限トポスの場合．例えば $X\longmapsto\mathcal{E}/X,\mathbf{Sub}(X),\Omega^X$ が例.

(4) 丹原ファンクター ([Ta 93])．乗法的 transfer を含む Mackey ファンクター．可換環に相当．例えば Burnside 環や指標環 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{R}$.
(a) $\mathbf{set}^G$ 上の場合．有望.
(b) 一般の局所有限トポスの場合．$X\longmapsto\mathrm{Gro}(\mathcal{E}/X)$ など.

(5) 丹原ファンクター係数の多項式環とベキ級数環．写像 $(\delta:A\longrightarrow 2^N)$ は多項式 $\sum_{a\in A}t^{|\delta(a)|}$ と同一視できる．これを一般化して，$\mathbf{set}^G$ 上の丹原ファンクター $\boldsymbol{T}$ 係数の多項式環や形式的ベキ級数環が定義出来る.
(a) $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{B},\boldsymbol{R},H^{**}(-,\boldsymbol{k}),\mathbf{Sub}$ の場合の具体例．有望.
(b) 有限群の表現論，符号理論，対称関数論などへの応用 ([Yo 93b])．有望.

References

[AT 93] T.Asai and T.Yoshida, $|\mathrm{Hom}(A, G)|$, II, *J.Algebra* **160** (1993), 273–285.

[Bo 00] S.Bouc, Burnside rings. "*Handbook of algebra, Vol. 2*", 739–804, North-Holland, Amsterdam, 2000.

[Ma 98] S.Mac Lane, "Categories for Working Mathematician,"revised version, Springer, 1998.

[MM 92] S.Mac Lane and l.Moerdijk, "Sheves in Geometry and Logic ", Springer, 1992.

[Mi 99] N.Minami, Hecke algebras and cohomotopical Mackey functors, *Transactions of AMS.*, **351** (1999), 4481–4513.

[OY 05] F.Oda and T.Yoshida, Crossed Burnside rings. II. The Dress construction of a Green functor. *J. Algebra* **282** (2004), 58–82.

[Qu 78] D.Quillen, Homotopy properties of the poset of nontrivial p-subgroups of a group, *Advances in Math.* **28** (1978), 101–128.

[Sh 71] G.Shimura, "*Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*", Iwanami Shoten and Princeton Univ.Press, 1971.

[Ta 93] D.Tambara, On multiplicative transfer, Comm. Algebra 21 (1993), 1393–1420.

[TW 90] J.The'venaz and P.J.Webb, A Mackey functor version of a conjecture of Alperin. *Aste'risque* **181-182** (1990), 263–272.

[Wa 92] M.Wakui, On Dijkgraaf-Witten invariant for 3-manifolds, *Osaka J.Math.*, **29** (1992), 675–696.

[We 00] P.Webb, A guide to Mackey functor, in: "*Handbook of Algebra*", vol. 2, Elsevier, Amsterdam, 2000, pp. 805–836.

[Yo 83a] T.Yoshida, On G-functors. II. Hecke operators and G-functors, *J. Math. Soc. Japan* **35** (1983), 179–190.

[Yo 83b] T.Yoshida, Idempotents of Burnside rings and Dress induction theorem, *J.Algebra* **80** (1983), 80–105.

[Yo 87a] T.Yoshida, On the Burnside rings of finite groups and finite categories, *Adv. Stud. Pure Math.* **11** (1987), 337–353.

[Yo 87b] T.Yoshida, Fisher's inequality for block designs with finite group action, *J. Faculty Sci. Tokyo Univ.* Sect. IA **34** (1987), 513–544.

[Yo 90] T.Yoshida, The generalized Burnside ring of a finite group, *Hokkaido Math.J.* **19** (1990), 509–574.

[Yo 93a] T.Yoshida, $|\mathrm{Hom}(A, G)|$, *J.Algebra* **156** (1993), 125–156.

[Yo 93b] T.Yoshida, MacWilliams identities for linear codes with group action, *Kumamoto J. Math.* **6** (1993), 29–45.