葉層構造の特異点と形式的スキーム

安田　健彦

宮岡の形式的フロベニウスの定理 [Miy] により、代数的葉層構造の研究には自然に形式的スキームが現れるが、葉層構造が特異点を持つ場合には、形式的スキームの扱いに注意しなければならない。X を $\mathbb{C}$ 上の非特異代数多様体とし、$\mathcal{F}$ をその上の特異点を許した代数的葉層構造とする。すなわち、$\mathcal{F}$ は X の接層 $\mathcal{T}X$ の（代数的）部分層で $[\mathcal{F},\mathcal{F}] \subseteq \mathcal{F}$ をみたすもの。ザリスキ開集合 $U \subseteq X$ で $\mathcal{F}$ は非特異だと仮定しよう。形式的フロベニウスの定理により、$U \times U$ の対角 Δ_U に沿った完備化 $(U \times U)_{/\Delta_U}$ の閉部分スキーム $\mathcal{L}$ が存在し第１射影 $\mathcal{L} \to U$ は形式的 separatrix（積分多様体の完備化）の族となる。ここで $\mathcal{L}$ の $(X \times X)_{/\Delta_X}$ の中での（スキーム論的）閉包を取るのは自然に思えるが、スキームの場合と違って、形式的スキームの中では良い閉包は存在しない。このような良い閉包が存在しない例は、最近 B.Heinzer が最初に与えた ([AJL] の最初のページ、一部の専門家には、以前から知られていたのではないかと思われるが)。k を体としよう。彼は $k[x^{\pm}, y, z][[t]]$ のイデアル $I \neq (0)$ で $I \cap k[x,y,z][[t]] = (0)$ となるものが存在することを W.Heinzer と Rotthaus の定理 [HR] を使って示した。ただし、I として具体的な物は与えられていなかった。幾何学的には、これは $\mathrm{Spf}\, k[x^{\pm}, y, z][[t]]$ の I で定義される閉部分スキーム $\mathcal{Y}$ の $\mathrm{Spf}\, k[x,y,z][[t]]$ の中での素朴な意味での閉包は $\mathrm{Spf}\, k[x,y,z][[t]]$ 自身になるということである。とくに $\mathcal{Y}$ はその閉包の開部分スキームとならない。私は次のような、もう少し簡単で具体的な例を構成した。

$$f = y + a_1 x^{-1} t + a_2 x^{-2} t^2 + \cdots \in \mathbb{C}[x^{\pm}, y][[t]],\ a_i \in \mathbb{C}^*.$$

とし、任意の $j > i$ に対し、$|a_j| > |a_i|$ を仮定する。このとき $(f) \cap \mathbb{C}[x,y][[t]] = (0)$。この構成により、$\mathbb{C}[x^{\pm}, y][[t]]$ はこのようなイデアルを非加算無限個持つことも分かる。更に変数を減らし、環 $k[x^{\pm}][[t]]$ と $k[x][[t]]$ を考えると、そのような現象は起こらない。その意味で、上の例は一番簡単な例となっている。

ネーター的下部位相空間をもつ形式的スキーム $\mathcal{X}$ は、閉部分スキーム $X_i \subseteq \mathcal{X}$, $i \in \Lambda$ でそれ自身は通常のスキームとなっているものの帰納極限となっている。

$$\mathcal{X} = \varinjlim X_i.$$

$\mathcal{X}$ をネーター的形式的スキームとし、$\mathcal{Y}$ をその部分スキームとする。$\mathcal{Y}$ もまた、スキーム Y_i の極限になっている。ここで、簡単な議論により、Y_i は $\mathcal{X}$ の中で良い閉包 $\bar{Y}_i$ を持つことが分かる。そこで、極限

$$\bar{\mathcal{Y}} := \varinjlim \bar{Y}_i$$

を考えるのは自然であろう。実際、このような極限は形式的スキームとして存在し、$\mathcal{Y}$ をその開部分スキームとして含む。しかし、一般に、$\bar{\mathcal{Y}}$ はアディックでもネーター的でもなく、$\mathcal{X}$ の [EGA] の意味での閉部分スキームではない。ちなみに、ほとんどの形式的スキームを扱っている文献ではアディック形式的スキームのみを扱っているが、元々の [EGA] の定義はより一般的なものだった。局所的には形式的スキームはアドミシブル環 A(アディック環はアドミシブル環の特別なもの) に対し、その形式的スペクトラム $\mathrm{Spf}\,A$ として得られる。しかし、[EGA] でも部分スキームはネーター的形式的スキームに対してのみ定義されている。(少々紛らわしいのだが、ネーター的形式的スキームは定義より、アディックであることに注意)。アディックでないアドミシブル環の例として次のような物がある。環 $k[[x,y]]$ にイデアルの列

$$(xy) \supseteq (xy^2) \supseteq (xy^3) \supseteq \cdots$$

が 0 の基本開近傍系となるような位相を入れる。すると $k[[x,y]]$ はアディックではないが、アドミシブル。(環 $k[[x,y]]$ はネーター的だが、アディックではないので、[EGA] の定義によると $\mathrm{Spf}\,k[[x,y]]$ はネーター的ではない。)

上で考えた $\bar{\mathcal{Y}}$ のように、$\mathcal{X}$ の閉部分スキームの族 $Z_1 \subseteq Z_2 \subseteq \cdots$ で各 Z_i が通常のスキームになっていて、全て同じ下部位相空間をもつものに対して、その極限 $\mathcal{Z}$ を $\mathcal{X}$ の擬閉部分スキームと呼ぶことにする。そして $\bar{\mathcal{Y}}$ のことを $\mathcal{Y}$ の擬閉包と呼ぶ。擬閉部分スキームの自明な例として、スキーム X の閉部分スキーム Y に沿った完備化 $X_{/Y}$ がある。$X_{/Y}$ は X の擬閉部分スキーム。擬閉部分スキームは [AJP] で導入された。(そこでは、pseudo closed immersion と呼ばれている。また、局所ネーター的な形式的スキームだけが扱われているが、その仮定を緩めることは本質的

である。）上で言及したように、もし$\mathfrak{Y}$が良い閉包を持たないような場合には、擬閉包$\bar{\mathfrak{Y}}$は閉部分スキームではない、擬閉部分スキームの非自明な例となっている。このように、一般に擬閉部分スキームは閉部分スキームではない。しかし、次の特別な場合には、この二つの概念は一致する。$(A, \mathfrak{m})$はネーター的完備局所環で$\mathfrak{m}$進位相を持つものとする。このときSpf Aは点集合として１点だが、Chevalleyの定理[Che]を形式的スキームの言葉で言い換えると、Spf Aの全ての擬閉部分スキームは閉部分スキームであるということになる。

　ここで、最初に考えた葉層構造の話に戻ろう。形式的積分部分スキームの族$\mathcal{L} \subseteq (U \times U)_{/\Delta_U}$の$(X \times X)_{/\Delta_X}$のなかでの擬閉包$\bar{\mathcal{L}}$を考えよう。ここで、$\mathcal{F}$を余次元１とする（この仮定はあまり本質的では無いだろうが）。もし$\bar{\mathcal{L}}$が閉部分スキームであれば、$\mathcal{F}$の特異点でも形式的separatrixが存在することが示せる。しかし、Jouanolouは、Xが３次元の時、余次元１の葉層構造で特異点で形式的separatrixが存在しないものが存在することを示した[Jou]。したがって、この事からも擬閉部分スキームは一般に閉部分スキームで無いことが分かる。さらに、$X = \mathbb{C}^3$とし、直線$l \subseteq \mathbb{C}^3$に対し、$l \setminus \{o\}$上の形式的積分部分スキームの族$\mathcal{L}_{l \setminus \{o\}}$を考え、それの$(l \times \mathbb{C}^3)_{/l \times l}$のなかでの擬閉包$\mathcal{L}_l$を考えるとことで、Spf $\mathbb{C}[w][[x, y, z]]$は擬閉部分スキームでアディックでないものが非加算無限個存在する事が分かる。更に、$\mathcal{L}_l$は前ネーター的（すなわち、局所的に（必ずしもアディックではない）ネーター的アドミシブル環の形式的スペクトラムとなっている）でないことも示すことができる。このことは、Zariskiの、解析的既約ネーター環Aと素イデアルPにたいし、Aの上のP^n位相と$P^{(n)}$位相が等しいという定理[Zar]から従う。ここで$P^{(n)}$はPのsymbolic power。

参考文献

[EGA] A. Grothendieck. *Élément de géométrie algébrique I. Publ. Math. de l'I.H.E.S.*, Vol. 8 (1961).

[AJL] L. Alonso Tarrío, A. Jeremías López and J. Lipman. Correction to the paper "Duality and flat base change on formal schemes". preprint, math.AG/0106239.

[AJP] L. Alonso Tarrío, A. Jeremías López and M. Pérez Rodríguez. Infinitesimal local study of formal schemes. preprint, math.AG/0504256.

[Che] C. Chevalley. On the theory of local rings. *Ann. Math.*, Vol. 44 (1943), 690–708.

[HR] W. Heinzer and C. Rotthaus. Formal fibers and complete homomorphic images. *Proc. Amer. Math. Soc.* 120 (1994), no. 2, 359–369.

[Jou] J.P. Jouanolou. *Equations de Pfaff algébriques*. L.N.M. 708, Springer-Verlag, Berlin.

[Miy] Y. Miyaoka. Deformations of a morphism along a foliation and applications. *Proc. Sym. Pure Math.*, Vol. 46 (1987), 245–268.

[Zar] O. Zariski. Theory and applications of holomorphic functions on algebraic varieties over arbitrary ground fields. *Mem. Amer. Math. Soc.*, Vol. 5 (1951), 1–90.