Asymptotic multiplier ideals and symbolic powers

高木 俊輔（九州大学大学院数理学研究院）

イデアルの記号ベキというのは古典的な題材でありながら，その挙動に関してはまだまだ分かっていないことが多いように（私には）思われます．この小文では，漸近乗数イデアル（もしくは正標数におけるその類似）を用いて得られる，記号ベキに関する幾つかの結果について御報告したいと思います．以下 環 R の素イデアル P が与えられたとき，P の 記号的 n 乗を $P^{(n)} := P^n R_P \cap R$ と書くことにします．また簡単のため整域の素イデアルの記号ベキのみ扱うことにします．

1 漸近乗数イデアル

Ein-Lazarsfeld-Smith は，標数 0 のアフィン正則環のイデアルについて，通常のベキと記号ベキの増大度を比較して，次のような結果を得ました．

定理 1.1 ([3, Theorem 2.2])**.** R を標数 0 のアフィン正則整域，P を高さ $h > 0$ の R の素イデアル とする．このとき任意の自然数 n に対して， $P^{(hn)} \subseteq P^n$ が成り立つ．

定理 1.1 の証明で重要な役割を果たすのが，漸近乗数イデアル $\mathcal{J}(t \cdot \mathfrak{a}_\bullet)$ と呼ばれるイデアルです．このイデアルはイデアルの次数付き族 $\mathfrak{a}_\bullet = \{\mathfrak{a}_m\}$ と実数 $t \geq 0$ に付随する乗数イデアルとも言うべきイデアルで，普通の乗数イデアルと類似の性質を満たします．漸近乗数イデアルの定義を述べる前に，イデアルの次数付き族について復習しましょう．ネーター整域 R の**イデアルの次数付き族** $\mathfrak{a}_\bullet = \{\mathfrak{a}_m\}_{m \geq 0}$ とは， R のイデアル $\mathfrak{a}_m$ の集まりで $\mathfrak{a}_0 = R, \mathfrak{a}_1 \neq 0$ でかつ 任意の自然数 k, l に対し $\mathfrak{a}_k \cdot \mathfrak{a}_l \subseteq \mathfrak{a}_{k+l}$ を満たすものです（[3], [14] の流儀と多少異なりますが，ここではこれを定義とします）．例えば，記号ベキの集まり $P^{(\bullet)} = \{P^{(m)}\}_{m \geq 0}$（$P$ は R の素イデアル）はイデアルの次数付き族です．

定義 1.2. R を標数 0 の $\mathbb{Q}$-Gorenstein アフィン整閉整域とし，$t \geq 0$ を非負の実数とする．

(1) ([14, Definition 9.2.3]) $\mathfrak{a}$ を R の非零イデアルとし，$\mathfrak{a}$ のログ特異点解消 $f : Y \to X := \operatorname{Spec} R$ をとる．すなわち f は $\mathfrak{a}\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_Y(-F)$ が可逆で $\operatorname{Supp}(F) \cup$

$\mathrm{Exc}(f)$ が単純交差因子になるような X の特異点解消である．このとき指数 t の $\mathfrak{a}$ の**乗数イデアル** $\mathcal{J}(\mathfrak{a}^t)$ を次のように定義する．

$$\mathcal{J}(\mathfrak{a}^t) = H^0(Y, \mathcal{O}_Y(\lceil K_{Y/X} - tF \rceil)) \subseteq R.$$

$\mathcal{J}(\mathfrak{a}^t)$ は f の取り方に依らない ([14, Theorem 9.2.18])．

(2) ([14, Definition 11.1.15]) $\mathfrak{a}_\bullet = \{\mathfrak{a}_m\}$ を R のイデアルの次数付き族とする．このとき，乗数イデアルの定義から，任意の自然数 k, l について $\mathcal{J}(\mathfrak{a}_k^{t/k}) \subseteq \mathcal{J}(\mathfrak{a}_{kl}^{t/kl})$ が成り立つ ([14, Lemma 11.1.14])．これより乗数イデアルの族 $\{\mathcal{J}(\mathfrak{a}_m^{t/m})\}_{m \geq 1}$ は包含関係に関して 1 つだけ極大元を持つ（極大元の存在は R のネーター性から従う）．この極大元を係数 t の $\mathfrak{a}_\bullet$ の**漸近乗数イデアル**と呼び，$\mathcal{J}(t \cdot \mathfrak{a}_\bullet)$ と記す．

（漸近）乗数イデアルについての詳しい解説は [14, Part Three] を参照して下さい．定理 1.1 の証明に必要な漸近乗数イデアルの性質は次の 3 つだけです．

補題 1.3 ([14, Theorem 11.1.19])**.** R を標数 0 の $\mathbb{Q}$-Gorenstein アフィン整閉整域とし，$\mathfrak{a}_\bullet = \{a_m\}$ を R のイデアルの次数付き族とする．また実数 $t \geq 0$ を 1 つ固定する．このとき任意の非負整数 $k, l \geq 0$ に対し，

$$\mathfrak{a}_k \mathcal{J}(l \cdot \mathfrak{a}_\bullet) \subseteq \mathcal{J}((k+l) \cdot \mathfrak{a}_\bullet).$$

上の補題は漸近乗数イデアルの定義からほぼ明らかですが，残りの 2 つは非自明です．次は（乗数イデアルに関する）**Skoda の定理**と呼ばれるもの（の特別な場合）です．

命題 1.4 (cf. [14, Theorem 9.6.21], [15])**.** R を標数 0 の $\mathbb{Q}$-Gorenstein アフィン整閉整域とし，$P \subset R$ を高さ $h > 0$ の素イデアルとする．また $P^{(\bullet)} = \{P^{(m)}\}$ を P の記号ベキからなる次数付き族とする．このとき

$$\mathcal{J}(h \cdot P^{(\bullet)}) \subseteq P.$$

定理 1.5 ([14, Theorem 11.2.3], cf. [2, Variant 2.5])**.** R を標数 0 のアフィン正則整域とし，$\mathfrak{a}_\bullet = \{a_m\}$ を R のイデアルの次数付き族とする．また実数 $t \geq 0$ を 1 つ固定する．このとき任意の非負整数 $k, l \geq 0$ に対し，

$$\mathcal{J}(t(k+l) \cdot \mathfrak{a}_\bullet) \subseteq \mathcal{J}(tk \cdot \mathfrak{a}_\bullet)\mathcal{J}(tl \cdot \mathfrak{a}_\bullet).$$

特に任意の自然数 n に対し，

$$\mathcal{J}(tn \cdot \mathfrak{a}_\bullet) \subseteq \mathcal{J}(t \cdot \mathfrak{a}_\bullet)^n$$

上の定理 1.5 は**漸近乗数イデアルの劣加法性**と呼ばれるもので，Demailly-Ein-Lazarsfeld によって最初に証明されました．補題 1.3, 命題 1.4 は特異点を持った環に対しても成り立ちますが，定理 1.5 は正則な環上でしか成り立ちません．簡単な例を 1 つ見てみましょう．

例 1.6. $R = \mathbb{C}[X, Y, Z]/(XY - Z^3)$ を A_2-特異点とし，$\mathfrak{a} = (x, y^2, yz, z^2) \subset R$ とおく．また $\mathfrak{a}_\bullet = \{\mathfrak{a}^m\}$ を $\mathfrak{a}$ のベキからなる次数付き族とする．このとき

$$\mathfrak{a} = \mathcal{J}(1 \cdot \mathfrak{a}_\bullet) \not\subseteq \mathcal{J}(\frac{1}{2} \cdot \mathfrak{a}_\bullet)^2 = (x, y, z)^2$$

となり，漸近乗数イデアルの劣加法性は成り立たない．

以上の 3 つの漸近乗数イデアルの性質を認めると，定理 1.1 の証明は至極簡単です．

定理 1.1 の証明． $P^{(\bullet)} = \{P^{(m)}\}$ を P の記号ベキからなる次数付き族とする．$P^{(\bullet)}$ に補題 1.3，定理 1.5，命題 1.4 を順番に適用すると，

$$P^{(hn)} = P^{(hn)}\mathcal{J}(0 \cdot P^{(\bullet)}) \subseteq \mathcal{J}(hn \cdot P^{(\bullet)}) \subseteq \mathcal{J}(h \cdot P^{(\bullet)})^n \subseteq P^n.$$

□

ここで特異点を研究する者としては，次の疑問が頭に浮かびます: R が特異点を持つ場合に定理 1.1 は拡張できるか？ 定理 1.5 は正則な環に対してしか成り立ちませんので，Ein-Lazarsfeld-Smith の証明はこの場合機能しません．従って特異点を持つ場合を考えるには，何らかの新しいアイディアが必要になります．Hochster-Huneke は，密着閉包の理論を使って，この問いに対する 1 つの答えを提示しました．

2 判定イデアルの一般化

Ein-Lazarsfeld-Smith が 定理 1.1 を証明してからほどなくして，Hochster-Huneke は，全く別の方法，密着閉包と呼ばれる正標数の可換環の理論を用いて，定理 1.1 を（標数 0 を含む）任意の等標数の正則環に対して証明しました ([10, Theorem 2.6])．**密着閉包**とは，1980 年代後半に Hochster と Huneke によって導入されたイデアル（もしくは加群）の閉包操作で，今日では可換環論における強力な道具の 1 つとなっています．密着閉包の定義や基本的性質については [9], [12] を参照して下さい．さらに Hochster-Huneke は，Jacobi イデアルを使って，特異点を持つ場合に定理 1.1 を拡張しました．

定理 2.1 ([10, Theorem 3.7])**.** K を完全体とし，R を K 上のアフィン整域とする．$P \subset R$ を高さ $h > 0$ の素イデアル，$J = \mathfrak{J}(R/K)$ を R の K 上の Jacobi イデアルとする．このとき任意の自然数 n に対して，$\tau(R)J^nP^{(hn)} \subseteq P^n$ が成り立つ．ただし $\tau(R)$ は R の判定イデアルである（判定イデアルについては下記参照）．一般に $J \subseteq \tau(R)$ なので ([11, (1.5.5)])，特に $J^{n+1}P^{(hn)} \subseteq P^n$.

ネーター環 R の**判定イデアル** $\tau(R) \subseteq R$ は $\tau(R) = \bigcap_{I \subseteq R} I : I^*$（$I^*$ はイデアル I の密着閉包，I は R の全てのイデアルを動く）と定義され，密着閉包の理論において中心的な役割を担います.

これで特異点を持つ場合にも定理 1.1 が拡張できることは分かりましたが，定理 2.1 の結果は最良と言えるのでしょうか？ 次の例を見てみましょう.

例 2.2 ([10, Example 3.8])**.** $n \geq 2$ とし $R = k[X, Y, Z]/(XY - Z^n)$ を標数 $p > 0$ の A_{n-1}-特異点とする． $P = (y, z) \subset R$ とおくと，P は高さ 1 の素イデアルで $P^{(n)} = (y)$ となる． 一方 R の Jacobi イデアルは $J = (x, y, z^{n-1})$．また R の判定イデアル $\tau(R)$ は単位イデアル R と一致する（R が **F-正則環**だから．詳しくは [9], [12] を参照のこと）．従って $\tau(R)J^{n-1}P^{(n)} \subseteq P^n$ だが，$\tau(R)J^{n-2}P^{(n)} \not\subseteq P^n$ （左辺は y^{n-1} を含むが，右辺は含まない）.

この例を見ると，自然と次の疑問が頭に浮かびます.

問題 2.3. 定理 2.1 において Jacobi イデアル J の指数を 1 減らせるか？（例 2.2 から 2 以上は減らせない）

この疑問に答える上で重要な役割を担うのが，原-吉田による**判定イデアルの一般化**です．原は判定イデアル $\tau(R)$ の概念を一般化して，イデアルの次数付き族 $\mathfrak{a}_\bullet = \{\mathfrak{a}_m\}$ と実数 $t \geq 0$ に付随する $\widetilde{\tau}(t \cdot \mathfrak{a}_\bullet)$ というイデアルを導入しました. $\widetilde{\tau}(t \cdot \mathfrak{a}_\bullet)$ の定義を述べる前に，記号を用意します．R を標数 $p > 0$ の整域とし，$F : R \to R$ を R の元 x を x^p に送る Frobenius 射とします．e 回 Frobenius 射 $F^e : R \to R$ を通じて R を R-加群と見なすときは，${}^eR$ と書くことにします．さらに ${}^1R$ が有限生成 R-加群になるとき，R は **F-有限**であると定義します．また R のイデアル I が与えられたとき，任意の $q = p^e > 0$ に対して $I^{[q]} := (a^q \mid a \in I)R$ と定義します.

定義 2.4. $\mathfrak{a}_\bullet = \{a_m\}$ を 標数 $p > 0$ の ネーター整域 R のイデアルの次数付き族，$t \geq 0$ を非負の実数とする.

(1) ([6, Definition 2.7]) M を R-加群とする．このとき 零加群 0 の M における $t \cdot \mathfrak{a}_\bullet$-**密着閉包** $0_M^{*t \cdot \mathfrak{a}_\bullet} \subseteq M$ を以下のように定義する: $z \in M$ が $0_M^{*t \cdot \mathfrak{a}_\bullet}$ に含まれるとは，ある非零元 $c \in R$ が存在して 十分大きい全ての $q = p^e \gg 0$ に対し

$$z \otimes c\mathfrak{a}_{\lceil tq \rceil} = 0 \in M \otimes_R {}^eR.$$

(2)(cf. [6, Definition 2.9]) $E = \bigoplus_{\mathfrak{m}} E_R(R/\mathfrak{m})$ を $\mathfrak{m}$ が R の全ての極大イデアルを動くときの 剰余体 $R/\mathfrak{m}$ の入射包絡 $E_R(R/\mathfrak{m})$ の直和とする．このときイデアル $\widetilde{\tau}(t \cdot \mathfrak{a}_\bullet)$ を次のように定義する.

$$\widetilde{\tau}(t \cdot \mathfrak{a}_\bullet) = \mathrm{Ann}_R(0_E^{*t \cdot \mathfrak{a}_\bullet}) \subseteq R.$$

特に $\mathfrak{a}_\bullet = \{\mathfrak{a}^m\}$ が R のイデアル $\mathfrak{a}$ のベキからなる次数付き族の場合には $\widetilde{\tau}(t \cdot \mathfrak{a}_\bullet)$ を $\widetilde{\tau}(\mathfrak{a}^t)$ と，$\mathfrak{a}_\bullet = \{R\}$ が単位イデアル R からなる自明な次数付き族の場合には単に $\widetilde{\tau}(R)$ と書くことにする.

注意 2.5. (1) $\widetilde{\tau}(R)$ は判定イデアル $\tau(R)$ に含まれる ([9, Proposition 8.23]). さらに R が $\mathbb{Q}$-Gorenstein 正規環の場合には，$\widetilde{\tau}(R)=\tau(R)$ が成り立つ ([1]). この意味で $\widetilde{\tau}(t\cdot\mathfrak{a}_\bullet)$ は判定イデアル $\tau(R)$ の一般化になっている.

(2) R が F-有限ならば，イデアル $\widetilde{\tau}(t\cdot\mathfrak{a}_\bullet)$ は局所化・完備化と可換である ([7, Propositions 3.1, 3.2]).

(3) R を標数 $p>0$ のアフィン整域，J を R の Jacobi イデアルとする．このとき $J\subseteq\widetilde{\tau}(R)$ が成り立つ．さらに $(R,\mathfrak{m})$ がアフィン整域の局所環の場合には，より強く任意の $\epsilon>0$ に対し $J\subseteq\widetilde{\tau}(\mathfrak{m}^{\dim R(1-\epsilon)})$ となることが示せる（[17, Theorem 4.6] の証明の後半部分とほぼ同じ議論から従う）.

原-吉田は，この $\widetilde{\tau}(t\cdot\mathfrak{a}_\bullet)$ というイデアルが漸近乗数イデアル $\mathcal{J}(t\cdot\mathfrak{a}_\bullet)$ の正標数における類似になっていることを証明しました.

定理 2.6 ([8, Theorem 6.8]). R を標数 0 の $\mathbb{Q}$-Gorenstein アフィン整閉整域とし，$\mathfrak{a}_\bullet=\{\mathfrak{a}_m\}$ を R のイデアルの次数付き族とする．また実数 $t\geq 0$ を 1 つ固定する．$(\widetilde{R},\widetilde{\mathfrak{a}}_\bullet,\widetilde{\mathcal{J}(t\cdot\mathfrak{a}_\bullet)})$ を $(R,\mathfrak{a}_\bullet,\mathcal{J}(t\cdot\mathfrak{a}_\bullet))$ の十分大きい標数 $p\gg 0$ への還元とすると，

$$\widetilde{\mathcal{J}(t\cdot\mathfrak{a}_\bullet)}=\widetilde{\tau}(t\cdot\widetilde{\mathfrak{a}}_\bullet)$$

定理 2.6 のおかげで，イデアル $\widetilde{\tau}(t\cdot\mathfrak{a}_\bullet)$ を介して漸近乗数イデアル $\mathcal{J}(t\cdot\mathfrak{a}_\bullet)$ の局所的性質を調べられるようになりました．さらに $\widetilde{\tau}(t\cdot\mathfrak{a}_\bullet)$ の研究が進むにつれて，(十分大きな $p\gg 0$ ではなく) 固定された標数 $p>0$ においても，イデアル $\widetilde{\tau}(t\cdot\mathfrak{a}_\bullet)$ は 漸近乗数イデアル $\mathcal{J}(t\cdot\mathfrak{a}_\bullet)$ と類似の様々な良い性質を満たすことが分かりました．特に補題 1.3，命題 1.4 の類似が成り立ちます.

補題 2.7 ([17, Lemma 4.5]). $\mathfrak{a}_\bullet=\{a_m\}$ を標数 $p>0$ のネーター整域 R のイデアルの次数付き族とし，$t\geq 0$ を非負の実数とする．このとき任意の非負整数 $k,l\geq 0$ に対し，

$$\mathfrak{a}_k\widetilde{\tau}(l\cdot\mathfrak{a}_\bullet)\subseteq\widetilde{\tau}((k+l)\cdot\mathfrak{a}_\bullet).$$

命題 2.8 ([7, Theorem 4.2]). R を標数 $p>0$ の F-有限なネーター整域とし，$P\subset R$ を高さ $h>0$ の素イデアルとする．$P^{(\bullet)}=\{P^{(m)}\}$ を P の記号ベキからなる次数付き族とする．さらに R_P の剰余体 R_P/PR_P は無限体であると仮定する．このとき

$$\widetilde{\tau}(h\cdot P^{(\bullet)})\subseteq P.$$

さらに原-吉田は定理 1.5 の類似も証明しました（[8, Theorem 6.10], $\widetilde{\tau}(t\cdot\mathfrak{a}_\bullet)$ **の劣加法性**）．しかしながら彼らの証明は本質的に Demailly-Ein-Lazarsfeld のものと同じで，非特異な環上でしか機能しないものでした．もしこの $\widetilde{\tau}(t\cdot\mathfrak{a}_\bullet)$ の劣加法性を特異点を持つ場合に拡張できれば，漸近乗数イデアル $\mathcal{J}(t\cdot\mathfrak{a}_\bullet)$ の代わりに $\widetilde{\tau}(t\cdot\mathfrak{a}_\bullet)$ を使って Ein-Lazarsfeld-Smith の証明をなぞることによって， 定理 1.1 を特異点を持つ場合に拡張できます.

漸近乗数イデアル $\mathcal{J}(t\cdot\mathfrak{a}_\bullet)$ に比べ，$\widetilde{\tau}(t\cdot\mathfrak{a}_\bullet)$ には Matlis 双対性が使えるという利点があります．この利点を生かし，Jacobi イデアルを使うことによって $\widetilde{\tau}(t\cdot\mathfrak{a}_\bullet)$ の劣加法性を特異点を持つ環に対して拡張したのが，次の定理です．

定理 2.9 ([17, Proposition 4.4])**.** R を標数 $p>0$ の完全体 K 上のアフィン整域とし，$J=\mathfrak{J}(R/K)$ を R の K 上の Jacobi イデアルとする．さらに $\mathfrak{a}_\bullet=\{\mathfrak{a}_m\}$ を R のイデアルの次数付き族とし，実数 $t\geq 0$ を 1 つ固定する．このとき任意の非負整数 $k,l\geq 0$ に対して，

$$J\widetilde{\tau}(t(k+l)\cdot\mathfrak{a}_\bullet)\subseteq\widetilde{\tau}(tk\cdot\mathfrak{a}_\bullet)\widetilde{\tau}(tl\cdot\mathfrak{a}_\bullet)$$

が成り立つ．特に任意の自然数 n に対し，

$$J^{n-1}\widetilde{\tau}(tn\cdot\mathfrak{a}_\bullet)\subseteq\widetilde{\tau}(t\cdot\mathfrak{a}_\bullet)^n.$$

補題 2.7，命題 2.8，定理 2.9 を使い Ein-Lazarsfeld-Smith の証明をなぞることによって，定理 1.1 を特異点を持つ場合に拡張できます．この拡張は問題 2.3 に対するほぼ完璧な解答になっています．

定理 2.10 ([17, Theorem 4.6])**.** R を標数 $p>0$ の完全体 K 上のアフィン整域とし，$J=\mathfrak{J}(R/K)$ を R の K 上の Jacobi イデアルとする．また $P\subset R$ を高さ $h>0$ の素イデアルとする．このとき任意の自然数 n に対し，

$$\widetilde{\tau}(R)J^{n-1}P^{(hn)}\subseteq P^n$$

が成り立つ．特に

$$J^n\mathfrak{a}^{(hn)}\subseteq P^n.$$

3 Eisenbud-Mazur 予想

Einsenbud-Mazur は，正則局所環の素イデアル P の記号的 2 乗 $P^{(2)}$ について，次のような予想を立てました．

予想 3.1 ([4])**.** $(R,\mathfrak{m})$ を等標数 0 の正則局所環とし，P を R の素イデアルとする．このとき $P^{(2)}$ は $\mathfrak{m}P$ に含まれる．

R が正標数もしくは混標数の環の場合には反例が知られていますが（[4] 及び [13] を参照），等標数 0 の場合は未解決です．しかしながら，定理 2.10 の証明と類似のテクニックを使うことによって，正標数の環においても Eisenbud-Mazur の予想に「比較的近い」結果を証明することができます．

定理 3.2. $(R, \mathfrak{m})$ を標数 $p > 0$ の F-有限な正則局所環とし，$P \subset R$ を高さ $h > 0$ の素イデアルとする．このとき次が成り立つ．

(1) $P^{(h+1)} \subseteq \mathfrak{m}P$.

(2) もし R/P が **F-純**（Frobenius 射 $F : R/P \to {}^1R/P$ が分裂する）ならば，$P^{(2h-1)} \subseteq P^2$.

証明. $P^{(\bullet)} = \{P^{(m)}\}$ を P の記号ベキからなるイデアルの次数付き族とし，m を $\widetilde{\tau}(k \cdot P^{(\bullet)}) = R$ を満たす非負整数 k のうち最大のものとする．$\widetilde{\tau}(0 \cdot P^{(\bullet)}) = R$ より，このような m は必ず存在する．

(1) 補題 2.7，命題 2.8，定理 2.9 及び m の定義より，

$$\begin{aligned} P^{(h+1)} = P^{(h+1)}\widetilde{\tau}(m \cdot P^{(\bullet)}) &\subseteq \widetilde{\tau}((m+h+1) \cdot P^{(\bullet)}) \\ &\subseteq \widetilde{\tau}((m+1) \cdot P^{(\bullet)})\widetilde{\tau}(h \cdot P^{(\bullet)}) \\ &\subseteq \mathfrak{m}P. \end{aligned}$$

(2) R が正則で R/P が F-純なので，Fedder の判定法 [5] より，任意の $q = p^e > 0$ に対して $(P^{[q]} : P) \not\subseteq \mathfrak{m}^{[q]}$．また $(P^{[q]}R_P : PR_P) = P^{h(q-1)}R_P + P^{[q]}R_P$ より，任意の $q = p^e \gg 0$ に対し $(P^{[q]} : P) \subseteq P^{(q)}$ が成り立つ．従って任意の $q = p^e \gg 0$ に対し $P^{(q)} \not\subseteq \mathfrak{m}^{[q]}$ となり，これは $\widetilde{\tau}(1 \cdot P^{(\bullet)}) = R$ を意味する (cf. [16, Lemma 3.9])．ここで補題 2.7，命題 2.8，定理 2.9 を $P^{(\bullet)}$ に適用すると，

$$\begin{aligned} P^{(2h-1)} = P^{(2h-1)}\widetilde{\tau}(1 \cdot P^{(\bullet)}) &\subseteq \widetilde{\tau}(2h \cdot P^{(\bullet)}) \\ &\subseteq \widetilde{\tau}(h \cdot P^{(\bullet)})^2 \\ &\subseteq P^2. \end{aligned}$$

□

注意 3.3. 定理 2.10, 定理 3.2 は正標数の環についての主張だが，定理 2.6 を用いることによって，標数 0 の（$\mathbb{Q}$-Gorenstein 正規）アフィン環に関する同様の主張をも導く．

参考文献

[1] Aberbach, I. and MacCrimmon, B., *Some results on test ideals*, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) **42** (1999), 541-549.

[2] Demailly, J.-P., Ein, L. and Lazarsfeld, R., *A subadditivity property of multiplier ideals*, Michigan Math. J. **48** (2000), 137–156.

[3] Ein, L., Lazarsfeld, R. and Smith, K., *Uniform bounds and symbolic powers on smooth varieties*, Invent. Math. **144** (2001), no.2, 241–252.

[4] Eisenbud, D. and Mazur, B., *Evolutions, symbolic squares, and Fitting ideals*, J. Reine Angew. Math. **488** (1997), 189–201.

[5] Fedder, R., *F-purity and rational singularity*, Trans. Amer. Math. Soc. **278** (1983), no. 2, 461–480.

[6] Hara, N., *A characteristic p analog of multiplier ideals and applications*, preprint, to appear in Comm. Algebra.

[7] Hara, N. and Takagi, S., *On a generalization of test ideals*, Nagoya Math. J. **175** (2004), 59–74.

[8] Hara, N. and Yoshida, K., *A generalization of tight closure and multiplier ideals*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), no.8, 3143–3174.

[9] Hochster, M. and Huneke, C., *Tight closure, invariant theory and the Briançon-Skoda theorem*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), no.1, 31–116.

[10] Hochster, M. and Huneke, C., *Comparison of symbolic and ordinary powers of ideals*, Invent. Math. **147** (2002), no. 2, 349–369.

[11] Hochster, M. and Huneke, C., *Tight closure in equal characteristic zero*, preprint.

[12] Huneke, C., Tight closure and its applications, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 88, the American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.

[13] Kurano, K. and Roberts, P., *The positivity of intersections multiplicities and symbolic powers of prime ideals*, Compositio. Math. **122** (2000), no.2, 165–182.

[14] Lazarsfeld, R., Positivity in Algebraic Geometry II, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge, A Series of Modern Surveys in Mathematics, Vol. 49, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[15] Lipman, J., *Adjoints of ideals in regular local rings*, Math. Res. Lett. **1** (1994), no. 6, 739–755.

[16] Takagi, S., *F-singularities of pairs and Inversion of Adjunction of arbitrary codimension*, Invent. Math. **157** (2004), no.1, 123–146.

[17] Takagi, S., *Formulas for multiplier ideals on singular varieties*, to appear in Amer. J. Math.

九州大学大学院数理学研究院
〒 812-8581 福岡市東区箱崎６－１０－１
E-mail address: stakagi@math.kyushu-u.ac.jp