tame harmonic bundle の小林-Hitchin対応について

京都大学数学教室・望月拓郎

代数学シンポジウムでの講演内容について報告します. 講演の元々のタイトルは "従順調和バンドルの漸近挙動と小林-Hitchin 対応について" でした. しかし, 実際の講演では小林-Hitchin 対応についての説明がほとんどでしたので, この拙文のタイトルは上のように変更致します.

この場をお借りして, 講演の機会を与えて下さった organizer の方々, および拙い講演を聴いて下さった方々に感謝の意を表します.

1 Introduction

1.1 主結果

初めに定理を紹介します. 言葉の説明などは 2 節で行います. X を複素数体上の滑らかな射影多様体, D を単純正規交叉因子とします.

Theorem 1.1 (regular filtered Higgs bundle に関する Bogomolov-Gieseker の不等式) (X, D) 上の *regular filtered Higgs bundle*$(\boldsymbol{E}_*, \theta)$ が μ_L*-stable* ならば, その特性数に関して次の不等式が成り立つ.

$$\int_X \mathrm{par\text{-}ch}_{2,L}(\boldsymbol{E}_*) - \frac{\int_X \mathrm{par\text{-}c}_{1,L}^2(\boldsymbol{E}_*)}{2\,\mathrm{rank}\,E} \leq 0.$$

∎

さらに, 特性数が消えてしまうような stable parabolic Higgs bundle と, tame harmonic bundle が対応することがわかります.

Theorem 1.2 (tame harmonic bundle の Kobayashi-Hitchin 対応) 次のような対象が対応する.

- $X - D$ 上の *tame harmonic bundle* $(E, \overline{\partial}_E, \theta, h)$.
- $\mathrm{par\text{-}deg}_L(\boldsymbol{E}_*) = \int_X \mathrm{par\text{-}ch}_{2,L}(\boldsymbol{E}_*) = 0$ を満たすような, (X, D) 上の μ_L*-polystable regular filtered Higgs bundle* $(\boldsymbol{E}_*, \theta)$. ∎

1.2 背景

定理の主張の説明は後回しにして, 以前からよく知られている事実, 特に二つめの定理に関連する事柄について, 少し思い出しておきます.

二つめの定理は大雑把にいうと代数幾何における "stable" なものと微分幾何的に良いモノ (metric) が対応するというタイプの定理です. このような対応についての研究は 1960 年代の Narasimhan-Seshadri の定理から始まりました. 彼らの定理はコンパクトリーマン面上で, polystable vector bundle と flat unitary bundle が対応することを主張するものでした. (ここでは, flat metric を持つような flat bundle を flat unitary bundle と呼ぶことにします.) そして, 1980 年代に (a) 高次元への拡張 (b) Chern class が 0 でない場合への拡張, が小林と Hitchin によって定式化され, Uhlenbeck-Yau や Donaldson によって証明されました.

Theorem 1.3 (正則ベクトル束の Kobayahi-Hitchin 対応, Uhlenbeck-Yau, Donaldson) 滑らかな射影多様体上では, 次の二つが対応する.

- μ_L*-polystable vector bundle.*
- *Hermitian Einstein metric* を持つような *holomorphic vector bundle.*

特に, *Chern class* が 0 であるような μ_L*-polystable vector bundle* には, *flat unitary bundle* が対応します. *(*μ_L*-stability* や *Hermitian Einstein metric* に関しては 2 節を参照.*)* ▮

さらにベクトル束に section などを載せたものについても, μ_L-stability と Hermitian-Einstein condition が自然に定義され, その対応に関して盛んに研究された時期がありました. その中で特に注目すべき結果は Simpson によるものです. 彼は Higgs bundle の場合に stability と Hermitian-Einstein metric の存在が同値であることを示しました.

Theorem 1.4 (Simpson) 滑らかな射影多様体上で, 次のような対象が対応する.

- μ_L*-polystable Higgs bundle.*
- *Hermitian Einstein metric* を持つような *Higgs bundle.* ▮

Chern class が 0 の場合は特に重要で, Corlette の結果もあわせると次の三位一体が確立されました.

Theorem 1.5 (Simpson-Corlette) 滑らかな射影多様体 X 上の次のような対象は対応する.

- *Chern class* が 0 であるような *polystable Higgs bundle.*
- *harmonic bundle.*
- *semisimple flat bundle.* ▮

さらに, この対応は (a) moduli の同相のレベルで成り立つ, (b) モノドロミーやコホモロジーが自然に同型になる, というようなところまで深められました.

これは大変素晴しい結果でした. 例えば, よく知られた議論ですが, (E, θ) を stable Higgs bundle とすると, $(E, \alpha \cdot \theta)$ も stable Higgs bundle であるので, stable Higgs bundle は容易に変形できます. これを flat bundle の側にもっていくと非自明な変形を与えます. そして, 雑にいうと極限として variation of Polarized Hodge structure (以下 VPHS と略す) が出てくるのでした. VPHS はかなり特殊なものなので, このような変形ができる, ということには意味があります. 実際, Simpson はこのことを用いて, 次の結果を得ました.

Theorem 1.6 (Simpson) $SL(n, \mathbb{Z})$ $(n \geq 3)$ と任意の群 Γ の直積は, 滑らかな射影多様体の基本群にはならない. *(*もう少し強い主張が示されていますが, 簡単のためにこのような形で述べておきます.*)*

(証明の概略): $G \subset \pi_1(X)$ と準同型 $\rho : \pi_1(X) \longrightarrow SL(n, \mathbb{Z})$ があって, $\rho_{|G} : G \simeq SL(n, \mathbb{Z})$ が同型であると仮定します.

- $\rho : \pi_1(X) \longrightarrow SL(n, \mathbb{Z}) \subset SL(n, \boldsymbol{C})$ を変形して, VPHS の下にあるような flat bundle から得られる ρ' に変形する.
- VPHS についての一般論から, $\rho'(\pi_1(X))$ の real Zariski closure は Hodge type と呼ばれる特殊な reductive group になることがわかります. (real algebraic group W が Hodge type とは, 複素化 $G = W^{\boldsymbol{C}}$ に $\boldsymbol{C}^*$ が作用していて, $S^1 \subset \boldsymbol{C}^*$ は W を保ち, $C = -1$ が G の Cartan involution を与えるもの.)

- $SL(n,\mathbb{Z}) \subset SL(n,\boldsymbol{C})$ の rigidity に注意すると, $\rho'(\pi_1(X))$ の real Zariski closure は $SL(n,\boldsymbol{R})$ と同型です. 一方, Hodge type であるような群の分類はされていて $SL(n,\boldsymbol{R})$ が Hodge type でないことがわかっています. したがって, 上のような ρ が存在しないことがわかります. (詳しくは, [22] を参照.) ▮

Theorem 1.5 のような対応を準射影多様体 Y 上で考えることは意味のある問題です. その場合, 準射影多様体上でそのまま考えるのではなく, Y を射影多様体 X と正規交叉因子 D の差 $Y = X - D$ のようにあらわして, X 上のモノに D における parabolic structure を加味して考えることになります. そして, そのような拡張はいろいろと試みられていて, Higgs がついている場合には, Simpson-Biquard の結果がよく知られています.

Theorem 1.7 *parabolic Higgs bundle* の小林*-Hitchin* 対応に関して,

- $\dim X = 1$ ならば成り立つ. *(Simpson).*
- D が滑らかならば成り立つ. *(Biquard).* ▮

(応用上は D が smooth というのは条件として厳しすぎます.) Higgs field のない vector bundle の場合には既に解決されていました.

Theorem 1.8 (Li, Steer-Wren) D が *normal crossing* でも*, parabolic vector bundle* の場合の小林*-Hitchin* 対応は成り立つ*. Bogomolov-Gieseker* 不等式も成り立つ. ▮

しかし, D が滑らかでなく, Higgs field が非自明な場合には知られていませんでした. それは単に研究されていなかったから, ということでは必ずしもなくて, vector bundle の場合とは違う困難が生じるから, という面もあったものと思われます.

どういう点が難しかったかについて, 少しだけ述べておきます. stable な代数幾何的対象に良い metric をとるための構成法は雑に分けると (i) 適当に metric をとる (initial metric), (ii) 熱方程式に沿って変形する, (iii) 極限をとると HE-metric が得られて, Chern class がある条件を満たすと flat になる, という具合に 3 つのステップからなります. base が compact (D が $\emptyset$) の時は, (i) は自明になり (ii) と (iii) が厄介になります.

non-compact の場合は (i) も厄介になります. 実は, Simpson は non-compact の場合も議論しており, 適当な条件を満たす initial metric を構成できれば, 彼の結果を適用することによって, Hermitian-Einstein metric の存在が示されます. しかし, initial metric は curvature がある種の有限性を満たすようにとる必要があり, Higgs が非自明な場合にはその構成が厄介でした. これについてはまた後で触れます.

そのあたりのことについて, 仮定をおいて議論したのが [16] です. tame harmonic bundle の下にある parabolic Higgs bundle はどういう条件を満たすかは漸近挙動の研究からわかっていました. そこで, それよりは少し緩い条件 (Hodge type in codimension two) を課したものに関しては対応が成り立つ, ということを示しました.

Theorem 1.9 (M) 次のような対象が対応する*.*

- $\int_X \text{par-ch}_{2,L}(\boldsymbol{E}_*) = \text{par-deg}_L(\boldsymbol{E}_*) = 0$ かつ *"Hodge type in codimension two"* であるような*,* (X,D) 上の μ_L*-stable parabolic Higgs bundle.*
- $X - D$ 上の *tame harmonic bundle.* ▮

この結果は弱いのですが, それなりに満足すべき結果でして, 先程述べたような VPHS への変形の議論が適用できるようになり, "$SL(n,\mathbb{Z})$ $(n \geq 3)$ と任意の群との直積が滑らかな準射影多様体の基本群にならない", という類のことはこれで示せるようになります.

しかし, Hodge type in codimension two という条件をつけたものが moduli の中でどういう集合をなすのかがはっきりしませんでした. さらに, Hodge type in codimension two という条件はもともとの基礎体上で定義されるものではなく, 複素数にまでいって定義されるものでした. ですから, Hodge type in codimension two という条件を外すことが望ましかったわけです. そこで 今回紹介したいのは, より完全な結果であり, "Hodge type in codimension two" というような条件をつけない場合の対応です.

2　定理の説明

2.1　微分幾何サイド

2.1.1　pluri-harmonic metric, harmonic bundle

$(E, \overline{\partial}_E)$ を X 上の holomorphic vector bundle とし, θ を Higgs field, すなわち $\mathrm{End}(E) \otimes \Omega_X^{1,0}$ の holomorphic section で $\theta^2 = 0$ が成り立つようなものとします. この時, E の metric h が与えられると, $(1,0)$-型の微分作用素 ∂_E が $\overline{\partial} h(u,v) = h\big(\overline{\partial}_E u, v\big) + h\big(u, \partial_E v\big)$ によって定まります. また, $\theta^\dagger$ が $h\big(\theta u, v\big) = h\big(u, \theta^\dagger v\big)$ によって定まります. 二つの connection $\partial_E + \overline{\partial}_E$ connection $\mathbb{D}^1 = \overline{\partial}_E + \partial_E + \theta + \theta^\dagger$ が得られるので, その curvature をそれぞれ $R(h)$ と $F(h)$ であらわします.

$$R(h) = \big(\partial_E + \overline{\partial}_E\big)^2, \quad F(h) = \big(\partial_E + \overline{\partial}_E + \theta + \theta^\dagger\big)^2.$$

Definition 2.1 *connection* $\mathbb{D}^1$ *が flat の時,* h *を pluri-harmonic metric と呼び,* $(E, \overline{\partial}_E, \theta, h)$ *を harmonic bundle と呼ぶ.* ∎

2.1.2　Hermitian Einstein metric

pluri-harmonic metric よりも弱い条件を満たすものとして, Hermitian-Einstein metric がありました. (X, ω) がケーラー多様体の時, ω をかけることで得られる線型写像 $(\Omega^{p,q} \longmapsto \Omega^{p+1,q+1},\ \tau \longmapsto \omega \cdot \tau)$ の adjoint を $\Lambda_\omega : \Omega^{p,q} \longrightarrow \Omega^{p-1,q-1}$ で表しておきます.

Definition 2.2 ある定数 a が存在して $\Lambda_\omega F(h) = a \cdot \mathrm{id}_E$ が成り立つような計量 h を, *Higgs bundle* $(E, \overline{\partial}_E, \theta)$ の *Hermitian-Einstein metric* と呼ぶ. ∎

容易にわかるように, pluri-harmonic metric であれば HE-metric です. 逆方向として次が成り立ちます.

Lemma 2.1 (Simpson) *(簡単のために)* $\dim X = 2$ の時,

- $\Lambda_\omega F(h) = 0$ *(これは HE よりも強い条件, 簡単のため)* ならば

$$\mathrm{tr}\, F(h)^2 = C \cdot \big|F(h)\big|_{h,\omega}^2 \cdot \mathrm{dvol}_\omega \geq 0. \qquad (C \text{ は定数.})$$

- 特に $\int \mathrm{tr}(F(h)^2) = 0$ ならば h は *pluri-harmonic metric* である. ∎

2.1.3　tame harmonic bundle

harmonic bundle にもどる. quasi projective variety 上の harmonic bundle を研究したいのですが, 完全に一般のものを扱うのは現段階では困難です. そこで, 無限遠の挙動に次のような条件をつけておきます. 簡単のために $X = \Delta^n = \big\{(z_1, \ldots, z_n) \,\big|\, |z_i| < 1\big\}$, $D_i = \{z_i = 0\}$, $D = \bigcup_{i=1}^n D_i$ とし, $(E, \overline{\partial}_E, \theta, h)$ を $X - D$ 上の harmonic bundle とします. この時, Higgs field θ は

$$\theta = \sum f_i \cdot \frac{dz_i}{z_i}$$

のようにあらわされます. そこで, 特性多項式 $P_i(z,t) = \det(t - f_i) = \sum a_j(z) \cdot t^j$ が得られて, この係数達は $X - D$ 上の正則関数を与えます.

Definition 2.3

- $(E, \overline{\partial}_E, \theta, h)$ が *tame* とは, $P_i(z,t)$ の係数達が X 上正則であること.

- *tame harmonic bundle* $(E, \overline{\partial}_E, \theta, h)$ が *pure imaginary* とは, $P_i(z,t)$ $(z \in D_i)$ の解が純虚数であること. ▮

次の定理によって, tame harmonic bundle は十分に広い範囲のものを扱っていることが保証されます.

Theorem 2.1 (Jost-Zuo, Sabbah, Simpson, M)
滑らかな準射影多様体上で次のような対象が対応する.

$$\begin{pmatrix} \text{tame pure imaginary} \\ \text{harmonic bundle} \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \text{semisimple} \\ \text{flat bundle} \end{pmatrix}$$

Remark 2.1 誰がなにをしたかについて一応述べておきますと, *semisimple* であれば, *tame harmonic bundle* の構造が入るということを初めに述べたのは *Jost-Zuo* で, ここが定理の一番難しいところと言えます. ([6]). ただし, 彼らは逆向きの主張については目につくところには定理としては書いていません. 逆向きの対応を示すには, 得られている *harmonic bundle* が *pure imaginary* であるというところまで見る必要があり, それは [15] でなされました. *pure imaginary* までであると, *semisimple* が出るのですが, そのためのアイディアは *Sabbah* の論文 ([19]) に書いてありました. 一意性は, *curve* の場合に帰着でき, その場合の対応は *Simpson* ([21]) で示されていた. ▮

2.2 代数幾何サイド

2.2.1 filtered vector bundle

X を複素多様体とし, D を X の正規交叉因子とします. $D = \bigcup_{i \in S} D_i$ を既約分解とし, 各 D_i は滑らかと仮定します. Mehta-Seshadri ([12]), Simpson ([21]), Yokogawa, Maruyama ([9], [28]) にならって, parabolic structure をわれわれにとって都合のよい形で思い出しておきます.

Definition 2.4 (X, D) 上の *filtered vector bundle* $\boldsymbol{E}_*$ とは次のようなデータ.

- 各 $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^S$ に対して, *locally free* $\mathcal{O}_X$*-module* ${}_{\boldsymbol{a}}E$ が与えられている.
- $\boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{a}$ $(b_i \leq a_i, \forall i)$ の時, ${}_{\boldsymbol{b}}E \subset {}_{\boldsymbol{a}}E$ であり, ${}_{\boldsymbol{b}}E_{|X-D} = {}_{\boldsymbol{a}}E_{|X-D}$.
- ${}^iF_c({}_{\boldsymbol{a}}E) := \mathrm{Im}\Big({}_{\boldsymbol{a}'}E_{|D_i} \longrightarrow {}_{\boldsymbol{a}}E_{|D_i}\Big)$ とおく. ただし, $\boldsymbol{a}'$ は $\boldsymbol{a}$ の i 番目の成分だけ c におきかえたもの. この時, ${}^i\,\mathrm{Gr}^F_c({}_{\boldsymbol{a}}E) := {}^iF_c/{}^iF_{<c}$ は *locally free* $\mathcal{O}_{D_i}$*-module.* ▮

$\boldsymbol{E}_*$ に対して, $E := {}_{\boldsymbol{a}}E_{|X-D}$ とおきます.

Remark 2.2 $\mathcal{P}ar\big({}_{\boldsymbol{a}}E, i\big) := \big\{c \,\big|\, \mathrm{Gr}^F_c({}_{\boldsymbol{a}}E) \neq 0\big\}$ とおきます. この時, $\mathcal{P}ar\big({}_{\boldsymbol{a}}E, i\big)$ が $]a_i - 1, a_i]$ の有限部分集合であることに注意. ▮

Remark 2.3 実際には, もう少し制限を緩めて, 余次元 3 の閉集合を除いたところで上のような条件を満たすものについて議論します. ▮

各 $\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{R}^S$ と各 $i \in S$ に対して, ${}_{\boldsymbol{c}}E_{|D_i}$ に filtration が入っている. これを $\boldsymbol{c}$-parabolic filtration と呼び, ${}_{\boldsymbol{c}}E_* := \big({}_{\boldsymbol{c}}E, \boldsymbol{F}\big)$ を $\boldsymbol{E}_*$ に対応する $\boldsymbol{c}$-parabolic vector bundle と呼ぶことにします ($\boldsymbol{c}$-trunctation).

Remark 2.4 ${}_{\boldsymbol{c}}E_*$ から $\boldsymbol{E}_*$ を復元できるという意味で, *filtered bundle* と $\boldsymbol{c}$*-parabolic bundle* は対応します. ▮

2.2.2 adapted metric

parabolic structure でとらえたいのは, holomorphic vector bundle の延長です. つまり, E を $X - D$ 上の holomorphic vector bundle とし, h を E の hermitian metric とした時, $\mathcal{O}_X$-module ${}_{\boldsymbol{a}}E$ ($\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^S$) が次のようにして得られます. (簡単のために $X = \Delta^n$, $D_i = \{z_i = 0\}$, $D = \bigcup_{i=1}^{l} D_i$ の場合に説明します.) 各 $U \subset X$ に対して,

$$ {}_{\boldsymbol{a}}E(U) := \Big\{ f \in E(U \setminus D) \,\Big|\, |f|_h = O\Big(\prod_{i=1}^{l} |z_i|^{-a_i - \epsilon}\Big)\ \forall \epsilon > 0 \Big\}. $$

ただし, 一般には, これは locally free ではありません. 連接性も一般には満たされません.

Definition 2.5 $\boldsymbol{E}_*$ を (X, D) 上の *filtered vector bundle* とする. $E = \boldsymbol{E}_{*|X-D}$ 上の *hermitian metric* h に対して ${}_{\boldsymbol{a}}E(h)$ を上のように定める. ${}_{\boldsymbol{a}}E(h) \simeq {}_{\boldsymbol{a}}E$ が自然に成り立つ時, h は $\boldsymbol{E}_*$ に *adapted* であるという. ∎

2.2.3 parabolic characteristic number

Chern class に parabolic structure からの寄与を付け加えることで, filtered bundle $\boldsymbol{E}_*$ の特性数が定まることを説明します. $\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{R}^S$ と $\boldsymbol{c}$-truncation ${}_{\boldsymbol{c}}E$ をとります. この時,

$$ \mathrm{wt}_{D_i}({}_{\boldsymbol{c}}E_*) := \sum_{a \in \mathcal{P}ar({}_{\boldsymbol{c}}E, i)} a \cdot \operatorname{rank} {}^{i}\mathrm{Gr}^F_a({}_{\boldsymbol{c}}E) $$

とおき, この parabolic structure からの寄与を $\boldsymbol{c}$-truncation の first Chern class に, 加味します.

$$ \text{par-c}_1({}_{\boldsymbol{c}}E_*) = c_1({}_{\boldsymbol{c}}E) - \sum_{i \in S} \mathrm{wt}_{D_i}({}_{\boldsymbol{c}}E_*) \cdot [D_i] \in H^2(X, \boldsymbol{R}). $$

すると, これは $\boldsymbol{c}$ の取り方には依存せず, $\boldsymbol{E}_*$ に対して well defined であることがわかるので, $\text{par-c}_1(\boldsymbol{E}_*)$ とあらわすことにします. 射影多様体とその上の ample line bundle L が与えられている時に,

$$ \mu_L(\boldsymbol{E}_*) := \frac{1}{\operatorname{rank} E} \int_X \text{par-c}_1(\boldsymbol{E}_*) \cdot c_1(L)^{\dim X - 1} $$

とおきます.

また, $\boldsymbol{c}$-truncation の second Chern character に parabolic structure からの寄与をつけ加えることで parabolic second Chern character が与えられます. X で evaluate した形だけ述べます.

$$ \begin{aligned} \int_X \text{par-ch}_{2,L}({}_{\boldsymbol{c}}E_*) := \int_X ch_2({}_{\boldsymbol{c}}E) \cdot c_1(L)^{\dim X - 2} &- \sum_{i \in S} \sum_a a \cdot \deg_{D_i} \mathrm{Gr}^F_a({}_{\boldsymbol{c}}E_{|D_i}) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i \in S} \sum_a a^2 \cdot \operatorname{rank}\big({}^{i}\mathrm{Gr}^F_a\big({}_{\boldsymbol{c}}E\big)\big) \cdot [D_i]^2 \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i \in S} \sum_{\substack{j \in S, \\ j \neq i}} \sum_{P \in D_i \cap D_j} \sum_{(a_i, a_j) \in \mathcal{P}ar({}_{\boldsymbol{c}}E, P)} a_i \cdot a_j \cdot \operatorname{rank} {}^{i}\mathrm{Gr}^F_{(a_i, a_j)}\big({}_{\boldsymbol{a}}E\big). \end{aligned} \quad (1) $$

- ch_2 は普通の second Chern character.
- $[D_i] \in H^2(X)$, $[P] \in H^4(X)$.
- $P \in D_i \cap D_j$ において, ${}^{P}F_{(a_i, a_j)} := {}^{i}F_{a_i} \cap {}^{j}F_{a_j}$ とおき, ${}^{P}\mathrm{Gr}^F_{\boldsymbol{a}} := {}^{P}F_{\boldsymbol{a}} \big/ \sum_{\boldsymbol{b} \sqsubset \boldsymbol{a}} {}^{P}F_{\boldsymbol{b}}$.
- $\mathcal{P}ar({}_{\boldsymbol{c}}E_*, P) = \big\{ \boldsymbol{a} \,\big|\, {}^{P}\mathrm{Gr}^F_{\boldsymbol{a}}\big({}_{\boldsymbol{c}}E\big) \neq 0 \big\}$.

値 (1) は $\boldsymbol{c}$ の取り方に依存しないことがわかるので, $\int_X \text{par-ch}_{2,L}(\boldsymbol{E}_*)$ のように表すことにします.

2.2.4 regular filtered Higgs bundle とその stability

filtered bundle に対する Higgs field も自然に定義されます.

Definition 2.6 *filtered vector bundle* $\boldsymbol{E}_*$ *の regular Higgs field* θ *とは,*

- $\boldsymbol{E} = \bigcup_{\boldsymbol{c}\in\boldsymbol{R}^S} {}_{\boldsymbol{c}}E$ とおくと, $\theta : \boldsymbol{E} \longrightarrow \boldsymbol{E} \otimes \Omega^{1,0}$ であり,
- $\theta\big({}_{\boldsymbol{c}}E\big) \subset {}_{\boldsymbol{c}}E \otimes \Omega_X^{1,0}(\log D)$ かつ $\theta^2 = 0$. ∎

regular filtered Higgs subsheaf と, それに対する μ_L も自然に定義されるので, μ_L-stability が定義されます.

Definition 2.7 *parabolic regular filtered Higgs bundle* $(\boldsymbol{E}_*, \theta)$ *が stable とは,* $\mu_L(\boldsymbol{E}'_*) < \mu_L(\boldsymbol{E}_*)$ *が任意の regular filtered Higgs subsheaf* $(\boldsymbol{E}'_*, \theta')$ *に対して成り立つこと.*

等号を許す時は semistable という. $(\boldsymbol{E}_*, \theta) = \bigoplus (\boldsymbol{E}_{i\,*}, \theta_i)$ *と分解し各* i *について* $(\boldsymbol{E}_{i\,*}, \theta_i)$ *が stable で* $\mu_L(\boldsymbol{E}_*) = \mu_L(\boldsymbol{E}_{i\,*})$ *が成り立つとき, polystable という.* ∎

3 証明の概略

3.1 Theorem 1.1 の証明の方針

Theorem 1.1 との証明の概略を述べます. 方針はとても素朴で, だいたい次の三つの部分からなります.

- graded semisimple な場合の小林-Hitchin 対応と Bogomolov 不等式.
- 与えられた $({}_{\boldsymbol{c}}E, \boldsymbol{F}, \theta)$ に対して, parabolic structure の perturbation $\boldsymbol{F}'_\epsilon$ を適当にとり, $({}_{\boldsymbol{c}}E, \boldsymbol{F}'_\epsilon, \theta)$ が graded semisimple になるようにする.
- 極限をとる.

3.2 graded semisimple の場合の小林-Hitchin 対応

既に少し触れましたが, 通常, 小林-Hithin 対応の証明で難しいのは, stable な代数幾何的対象に良い metric をとるところでした. それは (i) 適当に metric をとる (initial metric), (ii) 熱方程式に沿って変形する, (iii) 極限をとる, の 3 つのステップからなり, (ii) と (iii) のあたりが厄介になるのですが, しかし, non-compact の場合 (i) の initial metric の構成も厄介でした.

なにが問題を引き起こすかを説明します. X を射影多様体, D を正規交叉因子とし, (X, D) 上の $\boldsymbol{c}$-parabolic Higgs bundle $({}_{\boldsymbol{c}}E, \boldsymbol{F}, \theta)$ をとります. D_i 上に, ${}^i\operatorname{Gr}_a^F({}_{\boldsymbol{c}}E)$ という vector bundle が得られ, 自己準同形 $\operatorname{Res}_{D_i}(\theta)$ が得られます. $\operatorname{Gr}^F \operatorname{Res}_{D_i}(\theta)$ の固有値は一定なので,

$$
{}^i\operatorname{Gr}_a^F({}_{\boldsymbol{c}}E) = \bigoplus_{\alpha} {}^i\operatorname{Gr}_{(a,\alpha)}^{F,\mathbb{E}}({}_{\boldsymbol{c}}E)
$$

という分解が得られます. ${}^i\operatorname{Gr}_{(a,\alpha)}^{F,\mathbb{E}}({}_{\boldsymbol{c}}E)$ 上では $\operatorname{Gr}^F \operatorname{Res}_{D_i}(\theta) = \alpha + N_{i,(a,\alpha)}$ のようにあらわされます. (ただし, $N_{i,(a,\alpha)}$ は nilpotent part.) この nilpotent part の扱いが注意を要するところです.

divisor の交わりの部分, $P \in D_i \cap D_j$ において, ${}^P\operatorname{Gr}_{\boldsymbol{a}}^F({}_{\boldsymbol{c}}E)$ 上に $\operatorname{Gr}^F \operatorname{Res}_{D_i}(\theta)$ と $\operatorname{Gr}^F \operatorname{Res}_{D_j}(\theta)$ の作用が得られ, これらの同時一般化固有空間分解が得られます.

$$
{}^P\operatorname{Gr}_{\boldsymbol{a}}^F({}_{\boldsymbol{c}}E) = \bigoplus_{\square} {}^P\operatorname{Gr}_{(\boldsymbol{a},\square)}^{F,\mathbb{E}}({}_{\boldsymbol{c}}E).
$$

$\operatorname{Gr}^F \operatorname{Res}_{D_i}(\theta)$ と $\operatorname{Gr}^F \operatorname{Res}_{D_j}(\theta)$ がなんらかの条件も満たしていないと, P の近くで適切な有限性を満たすような metric の構成をどうすれば良いのかがよくわかりません. (よくわからないというよりも, たぶん構成できないのだろうと思います. ここに適当な条件を課したのが [16] でした.) 逆にいうと次のような場合には, 話が簡単になります.

Definition 3.1 $\mathrm{Gr}^F \mathrm{Res}_{D_i}(\theta)$ の *nilpotent part* が自明であるような $(\boldsymbol{E}_*, \theta)$ を *graded semisimle* と呼ぶことにする. ▮

Proposition 3.1 射影曲面と正規交叉因子の組 (X, D) 上の *μ_L-stable graded semisimple* な *parabolic Higgs bundle* $(\boldsymbol{E}_*, \theta)$ に対しては, *adapted* な *HE-metric* h が存在する. これに関して, 次のような等式が成り立つ.

$$\text{par-deg}_L(\boldsymbol{E}_*) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \int_{X-D} \operatorname{tr} \Lambda F(h) \cdot c_1(L),$$

$$\int_X \text{par-c}_1^2(\boldsymbol{E}_*) = \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \right)^2 \int_{X-D} \big(\operatorname{tr} F(h) \big)^2$$

$$\int_X 2\, \text{par-ch}_2(\boldsymbol{E}_*) = \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \right)^2 \int_{X-D} \big(\operatorname{tr} F(h)^2 \big)$$

これより特に, 次の不等式が得られる.

$$2\, \text{par-ch}_2(\boldsymbol{E}_*) - \frac{\text{par-c}_1^2(\boldsymbol{E}_*)}{\operatorname{rank} E} = \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \right)^2 \int_{X-D} \operatorname{tr}\Big(F(h)^{\perp\, 2} \Big) \leq 0.$$

▮

なすべきことは initial metric の構成です. 雑な言い方をすると, parabolic structure というのは (z_1, z_2) という正則な座標に関して $|z_1|, |z_2|$ の多項式 order な部分を見ていることになります. それに対して, residue の nilpotent part の寄与の仕方は $-\log|z_1|$, $-\log|z_2|$ の多項式 order です. ですから, parabolic filtration で gr をとると nilpotent part が 0 になる, ということは nilpotent part の寄与は無視できるということになります. そのような理由で graded semisimple の場合は initial metric の構成が容易です.

3.3 parabolic structure の perturbation

(graded semisimple とは限らない) 一般の regular filtered Higgs bundle も, parabolic structure を少し動かすことによって, graded semisimple にすることができます. 射影曲面と正規交叉因子の組 (X, D) 上の regular filtered Higgs bundle $(\boldsymbol{E}_*, \theta)$ に対して, $c_i \notin \mathcal{P}ar(\boldsymbol{E}_*, i)$ のように $\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{R}^S$ をとっておきます. そして, $\boldsymbol{c}$-truncation $\big({}_{\boldsymbol{c}}E, \boldsymbol{F}, \theta\big)$ を考えます. $\boldsymbol{F} = \big({}^iF\big)$ は標準的に誘導される parabolic structure とします. この filtration を少しずらします.

1. η を D_i の generic point とし, ${}_{\boldsymbol{c}}E_\eta$ を η 上の fiber とします. $\mathrm{Gr}^F({}_{\boldsymbol{c}}E_\eta)$ 上には $\mathrm{Gr}^F \mathrm{Res}_{D_i}(\theta)$ の nilpotent part として得られる N_i が作用しており, これの weight filtration W が定まります.

   $$N_i W_k \subset W_{k-2}, \quad N_i^k : \mathrm{Gr}_k^W \simeq \mathrm{Gr}_{-k}^W.$$

   これを D_i 上の filtration に延ばしておきます.

2. $\pi_a : {}^iF_a({}_{\boldsymbol{c}}E_{|D_i}) \longrightarrow {}^i\mathrm{Gr}_a^F({}_{\boldsymbol{c}}E_{|D_i})$ によって $W_k \subset {}^i\mathrm{Gr}_a^F({}_{\boldsymbol{c}}E_{|D_i})$ を pull back したものを ${}^i\widetilde{F}_{(a,k)}$ とおきます.

3. あとは, 単射 $\varphi_i : \{(a,k)\} \longrightarrow \boldsymbol{R}$ を $|\varphi_i(a,k) - a| < \epsilon$, $|\varphi_i(a,k) - \varphi_i(a,k')| > \epsilon/r$ $(k \neq k')$ が満たされるようにとります.

4. 上のデータ ${}^i\widetilde{F}$ と φ_i は filtration ${}^iF'_\epsilon$ を誘導します. こうして得られる filtration の組を $\boldsymbol{F}'_\epsilon$ であらわします.

Remark 3.1 par-$\deg_L({}_{\boldsymbol{c}}E, \boldsymbol{F}) =$ par-$\deg_L({}_{\boldsymbol{c}}E, \boldsymbol{F}'_\epsilon)$ が満たされるようにとれます. ∎

Lemma 3.1

- $({}_{\boldsymbol{c}}E, \boldsymbol{F}'_\epsilon, \theta)$ は *graded semisimple.*
- $({}_{\boldsymbol{c}}E, \boldsymbol{F}, \theta)$ が μ_L*-stable* で ϵ が十分に小さければ, $({}_{\boldsymbol{c}}E, \boldsymbol{F}'_\epsilon, \theta)$ も μ_L*-stable.* ∎

3.4 極限をとる

すると, Bogomolov の不等式は容易に得られます. $({}_{\boldsymbol{c}}E, \boldsymbol{F}, \theta)$ が graded semisimple ならば, Proposition 3.1 より,

$$\text{par-ch}_{2,L}({}_{\boldsymbol{c}}E, \boldsymbol{F}) - \frac{\text{par-c}_1^2({}_{\boldsymbol{c}}E, \boldsymbol{F})}{2\,\text{rank}\,E} \leq 0$$

が成り立ちます. 一般の場合には, perturbation $({}_{\boldsymbol{c}}E, \boldsymbol{F}'_\epsilon, \theta)$ をとると

$$\text{par-ch}_{2,L}({}_{\boldsymbol{c}}E, \boldsymbol{F}'_\epsilon) - \frac{\text{par-c}_1^2({}_{\boldsymbol{c}}E, \boldsymbol{F}'_\epsilon)}{2\,\text{rank}\,E} \leq 0$$

が成り立ちますので, ϵ を 0 に近づけると求める不等式が得られます.

3.5 Theorem 1.2 の証明の方針

Theorem 1.2 の証明は大きく分けて二つにわかれます. 一つは, tame harmonic bundle から μ_L-polystable parabolic Higgs bundle を構成し, さらにその特性数が消えていることを示すことです. これは, parabolic structure がない時には “easy part” とされる部分ですが, 今の場合はかなり厄介で tame harmonic bundle の漸近挙動についての結果 ([14]) が必要になります.

もう一つは, 特性数が 0 であるような μ_L-polystable parabolic Higgs bundle に対して pluri-harmonic metric を構成することです. そのために, 3.1 節で述べた方針をここでも用います. すなわち,

1. 与えられた $({}_{\boldsymbol{c}}E, \boldsymbol{F}, \theta)$ の perturbation $({}_{\boldsymbol{c}}E, \boldsymbol{F}'_\epsilon, \theta)$ に, adapted な Hermitian Einstein metric h_ϵ をとります. そして, ϵ を 0 に近づけた時の, h_ϵ の $X - D$ 上での収束を調べます. とりあえず極限として, $X - D$ 上の tame harmonic bundle $(E', \overline{\partial}_{E'}, \theta', h')$ が得られます. (比較的容易.)
2. (E', h') より X 上の regular filtered Higgs bundle $({}_{\boldsymbol{c}}E', \boldsymbol{F}, \theta')$ が得られます. (漸近挙動の研究より.)
3. 元の $({}_{\boldsymbol{c}}E, \boldsymbol{F}, \theta)$ と $({}_{\boldsymbol{c}}E', \boldsymbol{F}, \theta')$ の同型を示します. (現段階の理解では, ここは厄介)

1. について. punctured disc 上に $(E, \overline{\partial}_E, h, \theta)$ が与えられた時, $R(h) + [\theta, \theta^\dagger] = F(h)$ という関係があります. $\theta = g \cdot dz$ とすると,

$$\Delta \log |g|_h^2 \leq -\frac{\left|[g, g^\dagger]\right|_h^2}{|g|_h^2} + |F(h)|_h$$

という不等式が得られます. これを用いると, $|g|_h$ が固有値の大きさと, $|F(h)|_h$ の L^2-norm で抑えられます. (C_1, C_2 は g の固有値のみに依存.)

$$|g|_h \leq C_1 \cdot e^{C_2 \cdot ||F(h)||_{L^2}}.$$

そこで, $(E, \overline{\partial}_E, \theta, h)$ が $\Delta^2 = \{(z_1, z_2) \,|\, |z_i| < 1\}$ 上に与えられているとします. すると, θ の大きさは θ の固有値と $F(h)$ の L^2-norm で抑えられます. したがって, $R(h)$ の L^2-norm と $\Lambda R(h)$ の sup norm が, 固有値と $F(h)$ の L^2-norm で抑えられます. これは curvature の self dual part の sup norm と全体の L^2-norm が抑えられることを意味します.

そこで, 80 年代に Uhlenbeck や Donaldson によって確立された議論を使うことによって, $X-D$ 上での収束部分列の存在がわかります. また, Hermitian Einstein metirc に関しては $\int |F(h)|_h^2$ が特性数でかけるので, 極限に出てくるものが harmonic bundle であることもわかります.

3. について. 標準的な議論によって, 0 でない map $f: ({}_{\boldsymbol{c}}E'_*, \theta') \longrightarrow ({}_{\boldsymbol{c}}E_*, \theta)$ の存在が示されれば, $({}_{\boldsymbol{c}}E_*, \theta)$ の stability と $({}_{\boldsymbol{c}}E'_*, \theta')$ の poly-stability から, 同型であることがわかります. さらに, 十分 ample で generic な curve C をとると, C への制限上での非自明な map の存在 $f_C: ({}_{\boldsymbol{c}}E'_*, \theta')_{|C} \longrightarrow ({}_{\boldsymbol{c}}E_*, \theta)_{|C}$ の存在を示すことに帰着されます. しかし, これを示すには比較的長い議論が必要になります.

References

[1] O. Biquard, *Fibrés de Higgs et connexions intégrables: le cas logarithmique (diviseur lisse)*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **30** (1997), 41–96.

[2] K. Corlette, *Flat G-bundles with canonical metrics*, J. Differential Geom. **28** (1988), 361–382.

[3] K. Corlette, *Rigid representations of Kählerian fundamental groups,* J. Differential Geom. **33** (1991), 239–252.

[4] S. K. Donaldson, *Anti self-dual Yang-Mills connections over complex algebraic surfaces and stable vector bundles*, Proc. London Math. Soc. **50** (1985), 1–26.

[5] S. K. Donaldson, *Infinite determinants, stable bundles and curvature*, Duke Math. J. **54**, (1987), 231–247.

[6] J. Jost and K. Zuo, *Harmonic maps of infinite energy and rigidity results for representations of fundamental groups of quasiprojective varieties*, J. Differential Geom. **47** (1997), 469–503.

[7] J. Li, *Hermitian-Einstein metrics and Chern number inequalities on parabolic stable bundles over Kähler manifolds,* Comm. Anal. Geom. **8** (2000), 445–475.

[8] M. Lübke, *Stability of Einstein-Hermitian vector bundles*, Manuscripta Math. **42** (1983), 245–257.

[9] M. Maruyama and K. Yokogawa, *Moduli of parabolic stable sheaves*, Math. Ann. **293**, (1992), 77–99.

[10] V. Mehta and A. Ramanathan, *Semistable sheaves on projective varieties and their restriction to curves*, Math. Ann., **258** (1982), 213-224.

[11] V. Mehta and A. Ramanathan, *Restriction of stable sheaves and representations of the fundamental group*, Invent. Math., **77**, (1984), 163–172.

[12] V. Mehta and C. S. Seshadri, *Moduli of vector bundles on curves with parabolic structures*, Math. Ann. **248**, (1980), 205–239

[13] T. Mochizuki, *Asymptotic behaviour of tame nilpotent harmonic bundles with trivial parabolic structure*, J. Diff. Geometry, **62**, (2002), 351–559.

[14] T. Mochizuki, *Asymptotic Behaviour of tame harmonic bundles and an application to pure twistor D-modules*, math.DG/0312230. (Memoirs of A.M.S. から出版予定.)

[15] T. Mochizuki, *A characterization of semisimple local system by tame pure imaginary pluri-harmonic metric*, math.DG/0402122. ([14] の一部として Memoirs of A.M.S. から出版予定.)

[16] T. Mochizuki, *Kobayashi-Hitchin correspondence for tame harmonic bundles and an application* (1st version), math.DG/0411300.

[17] T. Mochizuki, *Kobayashi-Hitchin correspondence for tame harmonic bundles and an application* (2nd version), in preparation, http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~takuro/kh-correspondence.ps

[18] M. S, Narasimhan and C. S. Seshadri, *Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface*, Ann. of Math. **82** (1965), 540–567.

[19] C. Sabbah, *Polarizable twistor D-modules*, Astérisque **300** (2005)

[20] C. Simpson, *Constructing variations of Hodge structure using Yang-Mills theory and application to uniformization*, J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), 867–918.

[21] C. Simpson, *Harmonic bundles on non-compact curves*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 713–770.

[22] C. Simpson, *Higgs bundles and local systmes*, Publ. IHES, **75** (1992), 5–95.

[23] C. Simpson, *Moduli of representations of the fundametal group of a smooth projective variety, I*: Publ. Math. I.H.E.S., **79**, (1994), 47–129.

[24] C. Simpson, *Moduli of representations of the fundametal group of a smooth projective variety, II*: Publ. Math. I.H.E.S., **80**, (1994), 5–79.

[25] C. Simpson, *Mixed twistor structures*, math.AG/9705006.

[26] B. Steer and A. Wren, *The Donaldson-Hitchin-Kobayashi correspondence for parabolic bundles over orbifold surfaces*, Canad. J. Math. **53** (2001), 1309–1339.

[27] K. Uhlenbeck and S. T. Yau, *On the existence of Hermitian Yang-Mills connections in stable bundles*, Comm. Pure Appl. Math., **39**-S (1986), 257–293.

[28] K. Yokogawa, *Compactification of moduli of parabolic sheaves and moduli of parabolic Higgs sheaves*, J. Math. Kyoto Univ. **33** (1993), 451–504.