有理曲面の有する代数曲線束の相対標準環

今野　一宏

大阪大学大学院理学研究科

はじめに

北川真也君との共同研究をまとめた論文 [6] を書いた後に，それを補足する目的で計算してみたものを紹介します．論文 [6] の主目的は，有理曲面がもつ Clifford 指数 2 の代数曲線束に対して，最大階数の Mordell-Weil 格子を決定することだったのですが，そのためには幾何種数と不正則数がともに 0 であるような代数曲面がもつ代数曲線束の一般論を，ある程度整備しておく必要がありました．(とは言え，偏極曲面論というお手本があるので，それをなぞっただけですが．)

ここでは有理曲面がもつ非超楕円的代数曲線束のスロープと，相対標準環の構造（生成元，関係式，シチジー）との関係を述べたいと思います．

1.　基本事項

X は非特異既約な $\mathbb{C}$ 上の射影代数曲面で，幾何種数 $p_g(X)$ および不正則数 $q(X)$ が共に零であるとする．また，X は相対極小な代数曲線束 $f : X \to \mathbb{P}^1$ をもつものとし，その一般ファイバー F の種数 g は 2 以上であると仮定する．このとき, 相対標準束 $K_{X/\mathbb{P}^1} = K_X + 2F$ はネフであり，$K_{X/\mathbb{P}^1}C = 0$ となる X 上の既約曲線 C はファイバーに含まれるような，自己交点数 -2 の非特異有理曲線，通称 (-2) 曲線である．ファイバー束でない代数曲線束に付随する重要な量のひとつに「スロープ」がある．これは

$$\lambda_f = K^2_{X/\mathbb{P}^1} / \deg f_*\omega_{X/\mathbb{P}^1}$$

で定義される正の有理数であって，Xiao のスロープ不等式

$$4 - \frac{4}{g} \le \lambda_f \le 12$$

をみたす．われわれの場合，$p_g(X) = q(X) = 0$ なので，$f_*\omega_{X/\mathbb{P}^1}$ は g 個の $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ の直和に分解する:

$$f_*\omega_{X/\mathbb{P}^1} \simeq \overbrace{\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \cdots \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(1)}^{g}$$

従って，スロープは

$$\lambda_f = \left(4 - \frac{4}{g}\right) + \frac{(K_X + F)^2}{g} \tag{1.1}$$

によって与えられる．相対標準写像は，自然な層の準同型写像 $f^* f_*\omega_{X/\mathbb{P}^1} \to \omega_{X/\mathbb{P}^1}$ が導く有理写像

$$\Phi_f : X \cdots \to \mathbb{P}(f_*\omega_{X/\mathbb{P}^1})$$

であり，f の一般ファイバーが超楕円曲線ならば，Φ_f は像の上に $2:1$ であり，非超楕円曲線ならば双有理である．

補題 1.1. 上の状況で，次が成立する．

(1) $K_X + F$ はネフである．

(2) f の任意のファイバー F に対して，制限写像 $H^0(X, K_X + F) \to H^0(F, \omega_F)$ は同型写像であり，特に $h^0(X, K_X + F) = g$ である．また，完備線形系 $|K_X + F|$ の固定部分 Z は f に関して垂直である．

(3) X の小平次元が 0 以上ならば，$(K_X + F)^2 \geq 2g - 2$ である．

[証明] (1)：$f_*\omega_{X/\mathbb{P}^1}$ の直和分解から，対応する射影空間束 $\mathbb{P}(f_*\omega_{X/\mathbb{P}^1})$ は自然に $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{g-1}$ と同一視できる．$\mathbb{P}(f_*\omega_{X/\mathbb{P}^1})$ において，トートロジカル因子からファイバーを引いたものは第 2 成分への射影による $\mathbb{P}^{g-1}$ の超平面の引き戻しなので，ネフである．従って，それを相対標準写像 $\Phi_f : X \dashrightarrow \mathbb{P}(f_*\omega_{X/\mathbb{P}^1})$ で引き戻した $K_X + F = K_{X/\mathbb{P}^1} - F$ もネフである．(2) は，完全列

$$0 \to \mathscr{O}_X(K_X) \to \mathscr{O}_X(K_X + F) \to \omega_F \to 0$$

と仮定 $H^0(X, K_X) = H^1(X, K_X) = 0$ および一般ファイバーの標準一次系が自由であることから従う．(3): もし小平次元が 0 以上ならば，十分大きな適当な整数 m に対して $H^0(X, mK_X) \neq 0$ である．(1) より $K_X + F$ はネフなので，$mK_X(K_X + F) \geq 0$ が成立する．他方，$K_X(K_X + F) = (K_X + F)^2 - F(K_X + F) = (K_X + F)^2 - 2(g - 1)$ なので，$(K_X + F)^2 \geq 2g - 2$ である．□

X の小平次元が 0 以上で，$(K_X+F)^2=2g-2$ の場合，X は Enriques 曲面をブローアップしたものに他ならない．以下では専ら $(K_X+F)^2<2g-2$ の場合を考えるので，X は自動的に有理曲面になる．

補題 1.2. $(K_X+F)^2>0$ のとき，$(K_X+F)C=0$ をみたす既約曲線 C は次のいずれかである．

(1) f のファイバーに含まれる (-2) 曲線,

(2) f の (-1) 切断，すなわち f のファイバーと 1 点でのみ交わる (-1) 曲線.

[証明] F はネフなので，$FC\geq 0$ であり，もし $FC=0$ ならば C は f のファイバーに含まれる．既に述べたように $(K_X+2F)C=0$ ならば (1) である．よって $(K_X+2F)C>0$ としてよい．従って，もし $(K_X+F)C=0$ ならば $FC>0$ かつ $K_XC<0$ である．また，Hodge 指数定理より $C^2<0$ でなければならない．$K_XC+C^2=2p_a(C)-2$ だから $K_XC=C^2=-1$, $p_a(C)=0$ が従う．再び $(K_X+F)C=0$ より $FC=1$ だから (2) を得る．□

(2) のような (-1) 曲線を縮約しても特異点は生じず F の像も非特異なままである．従ってそのような曲線すべての縮約を $\sigma: X\to Y, G=\sigma_*F$ とおく．G は F と同型な非特異曲線で，Y 上にはもはや $GE=1$ なる (-1) 曲線 E は存在しないとしてよい．f はあるペンシル $\Lambda_f\subset|G|$ に対応し，Λ_f は単純基点しか持たない．組 (Y,Λ_f) あるいは (Y,G) を $f: X\to\mathbb{P}^1$ の簡約化と呼ぶ．$\sigma^*(K_Y+G)=K_X+F, \sigma^*H^0(Y,K_Y+G)\simeq H^0(X,K_X+F)$ なので, $|K_X+F|$ が定める X の有理写像は Y を経由する．補題 1.2 より，$\mathrm{Proj}(\bigoplus_{m=0}^{\infty}H^0(X,m(K_X+F)))$ の特異点は高々有理 2 重点であるが，X の簡約化 Y はその極小特異点解消である．

2. 随伴写像と超楕円曲線束

完備線形系 $|K_X+F|$ が誘導する $\mathbb{P}^{g-1}$ への有理写像 Φ_{K_X+F} を考える．これは合成写像

$$X \overset{\Phi_f}{\dashrightarrow} \mathbb{P}(f_*\omega_{X/\mathbb{P}^1})\simeq\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^{g-1}\xrightarrow{pr_2}\mathbb{P}^{g-1}$$

に他ならない．

補題 2.1. Φ_{K_X+F} の像が曲線ならば，$f: X\to\mathbb{P}^1$ は超楕円的である．また，$(K_X+F)^2=0$ または $(K_X+F)^2\geq 2g-2$ が成立する．

[証明] Z を $|K_X+F|$ の固定部分とすれば，$\Phi_{|K_X+F|}$ に対する仮定より，K_X+F は $(g-1)D+Z$ なる形の因子と線形同値である．ここに D は Φ_{K_X+F} の像 $\mathbb{P}^1$ 上の 1 点の引き戻しである．

補題 1.1 より $FZ=0$ なので，$2g-2=F(K_X+F)=(g-1)FD$ だから $FD=2$ を得る．従って Φ_{K_X+F} を一般ファイバー F に制限したもの（これは F の標準写像に他ならない）が $\mathbb{P}^1$ への分岐 2 重被覆になるから，F は超楕円曲線である．$(K_X+F)^2>0$ とする．

$$(K_X+F)^2=(K_X+F)((g-1)D+Z)\geq(g-1)(K_X+F)D$$

である．D はペンシルの中を動くので, 補題 1.2 より $(K_X+F)D>0$ であるが, $(K_X+F)D=1$ ならば Hodge 指数定理より $1=((K_X+F)D)^2\geq(K_X+F)^2D^2$ となり，$D^2=0$ または $(K_X+F)^2=D^2=1$ である．他方，$FD=2, (K_X+F)D=1$ より $K_XD=-1$ なので，D^2 は奇数でなければならず，$(K_X+F)^2=D^2=1$ を得る．このとき，K_X+F と D は線形同値だから，$g=2$ の場合にしか起こりえない．従って $g\geq3$ ならば $(K_X+F)D\geq2$ であり，$(K_X+F)^2\geq2(g-1)$ となる．□

次に，Φ_{K_X+F} による X の像 W は曲面であると仮定する．$W\subset\mathbb{P}^{g-1}$ は非退化既約曲面なので，$\deg W\geq g-2$ だから $(K_X+F)^2\geq(\deg\Phi_{K_X+F})(\deg W)\geq g-2$ である．また，$(K_X+F)^2\leq2g-5$ ならば自動的に $\deg\Phi_{K_X+F}=1$ である．$f:X\to\mathbb{P}^1$ が超楕円的な代数曲線束の場合には，相対標準写像 Φ_f が既に像の上に 2 対 1 なので，例え Φ_{K_X+F} による X の像が曲面だとしても，Φ_{K_X+F} はその上への双有理写像にはなり得ず，写像度は必ず偶数であり，特に $(K_X+F)^2\geq2g-4$ が成立する．従って，補題 2.1 と併せて，次を得る．

系 2.2. $p_g=q=0$ なる射影代数曲面のもつ相対極小な超楕円的代数曲線束のスロープは

$$\lambda_f=4-\frac{4}{g}\quad\text{または}\quad\lambda_f\geq6-\frac{8}{g}$$

をみたし，存在域に空白がある．

系 2.2 の不等式において等号が成立するとき，X は有理曲面である．空白域の境界に位置する超楕円曲線束を考える．

補題 2.3. 有理曲面 X が有するスロープ $4-4/g$ の超楕円的代数曲線束は，Hirzebruch 曲面上の，２重切断からなり高々単純基点しかもたないようなペンシルの基点解消によって得られる．

[証明] 補題 2.1 の記号を用いる．$(K_X+F)^2=0$ だから，K_X+F は $(g-1)D$ と線形同値であり，$FD=2$ 故 $K_XD=-2, D^2=0$ である．よって $|D|$ は正則写像 $\psi:X\to\mathbb{P}^1$ を誘導し，これにより X は conic bundle の構造をもつ．ψ の特異ファイバーは二つの (-1) 曲線のペアであって，$K_X^2=-4(g-1)$ より，このような特異ファイバーは全部で $4g+4$ 本存在す

ることがわかる．これら特異ファイバーを構成する 2 つの (−1) 曲線からひとつづつを選んで縮約することにより，ψ の相対極小モデルとして幾何学的線織面（Hirzebruch 曲面）が得られる．縮約する (−1) 曲線と F は 1 点でしか交わらないので，F は相対極小モデルにおいても非特異な曲線であり，2 重切断のクラスに入る．もちろん，その線形同値類も決定できる．自己交点数は必然的に $4g+4$ になるから，相対極小モデルのファイバーを Γ と記せば，線形同値類は $-K+(g-1)\Gamma$ である．□

$\lambda_f = 6-8/g$, すなわち $(K_X+F)^2 = 2g-4$ をみたすような有理曲面上の超楕円的代数曲線束も，すべて分類し構成法を明らかにすることができる．この場合 $\deg\Phi_{K_X+F} = 2$ であり，W は最小次数の曲面なので，その素性が良く知られているからである ([2], [3])．次の定理の証明は [7] に書いたので割愛する．

定理 2.4. 有理曲面 X がスロープ $6-8/g$, $g \geq 4$, なる相対極小な超楕円曲線束 $f: X \to \mathbb{P}^1$ をもてば，それは次のいずれかのような，高々単純 3 重点しかもたない曲線 B を分岐跡とする，d 次 Hirzebruch 曲面 Σ_d の分岐 2 重被覆 $\varphi: Y \to \Sigma_d$ をとり，その上の線形系 Λ の高々横断的な基点しかもたないペンシル $\Lambda_f \subset \Lambda$ の基点を解消することにより得られる．（Δ_0 および Γ は Σ_d の極小切断およびファイバーを表す．）

(1) 分岐跡 B は $2\Delta_0+(g+d)\Gamma$ と線形同値であり，$\Lambda = \varphi^*|2\Delta_0+(d+1)\Gamma|$ である．ただし，$g+d$ は偶数で $d=0,1$ である．

(2) 分岐跡 B は $4\Delta_0+(2d+2)\Gamma$ と線形同値であり，$\Lambda = \varphi^*|\Delta_0+\frac{g+d}{2}\Gamma|$ である．ただし，$g+d$ は偶数で $d=0,1,2$ である．また，$d=2$ ならば $g \geq 6$ である．

3. 斉次座標環の極小自由分解

本節では，Φ_{K_X+F} が像の上に双有理である場合を考える．

補題 3.1. Φ_{K_X+F} による X の像が曲面で $(K_X+F)^2 \leq 2g-4$ ならば，K_X+F は自由である．

[証明] $|K_X+F| = |M|+Z$ を可動部分と固定部分への分解とする．$(K_X+F)^2 = M^2 + MZ + (K_X+F)Z$ なので $M^2 \leq (K_X+F)^2 \leq 2g-4$ である．もし $\deg\Phi_{K_X+F} = 2$ ならば $(K_X+F)^2 = 2g-4$ であり，主張は明らかなので，$\deg\Phi_{K_X+F} = 1$ と仮定する．

Bertini の定理より一般元 $C \in |M|$ は既約であり，算術種数は $FZ=0$ より $2p_a(C)-2 =$

$M(K_X+M)=M(2M+Z-F)=2M^2+MZ-(K_X+F)F=2M^2+MZ-2(g-1)$ なので,

$$p_a(C)=M^2-g+2+\frac{1}{2}MZ \tag{3.1}$$

である．$q(X)=0$ なので，制限写像 $H^0(X,M)\to H^0(C,M)$ は全射であり，$h^0(C,M)=g-1$ である．$|M_{|C}|$ の可動部分は像の上への双有理正則写像を導く．像の次数を d とすれば $d\le \deg M_{|C}\le 2g-4$ である．$M^2=d, MZ=0$ を示せば十分である．なぜなら，$M^2=d$ より $|M_{|C}|$ は，よって $|M|$ は，基点をもたないことが従い，$MZ=0$ と Hodge 指数定理から $Z^2\le 0$ が得られ，もし $Z\ne 0$ ならば $Z^2<0$ なので $(K_X+F)Z<0$ となり K_X+F がネフであることに矛盾するからである．

まず，$d=2g-4$ ならば $M^2=\deg M_{|C}=2g-4$ であり，$(K_X+F)^2\le 2g-4$ より $(K_X+F)^2=2g-4, (K_X+F)Z=MZ=0$ である．次に，$d\le 2g-5$ と仮定する．$g=3$ ならば $d=1$ である．このとき $C\simeq\mathbb{P}^1$ なので，$p_a(C)=0$ より $M^2+MZ/2=1$ だから $M^2=1=d, MZ=0$ である．$g\ge 4$ とする．このとき $(d-1)/(g-3)$ の整数部分 m は高々 2 である．$\epsilon=d-1-m(g-3)$ とおけば，Castelnuovo の種数上限より

$$p_a(C)\le\binom{m}{2}(g-3)+m\epsilon$$

が成立する．$m=1$ ならば, $p_a(C)\le\epsilon=d-1-(g-3)$ なので, (3.1) より $(M^2-d)+(1/2)MZ\le 0$ を得る．よって $M^2=d, MZ=0$ である．$m=2$ ならば $p_a(C)\le g-3+2(d-1-2(g-3))=2d-3g+7$ なので，(3.1) より

$$(M^2-d)+\frac{1}{2}MZ\le d-(2g-5)\le 0$$

だから，$M^2=d$ かつ $MZ=0$ を得る．以上より，K_X+F は自由である．□

注意 3.2. Φ_{K_X+F} による X の像が曲面で $(K_X+F)^2\le 2g-5$ の場合，補題 3.1 の証明から，一般元 $C\in|K_X+F|$ は Castelnuovo の種数上限をとるので，projectively normal である．一方，$(K_X+F)^2=2g-4$ かつ $\deg\Phi_{K_X+F}=1$ なる場合，$p_a(C)=g-2$ で上限との差は 1 である．$\deg(K_X+F)|_C=2p_a(C)$ なので，$\mathrm{Sym}^2H^0(C,K_X+F)\to H^0(C,2(K_X+F))$ は必ずしも全射ではない．

以下，$g-2\le(K_X+F)^2\le 2g-5, g\ge 3$ の場合のみ考える．このとき，X は自動的に有理曲面であり，f は非超楕円的である．また，Φ_{K_X+F} は像 W の上への双有理正則写像である．簡単のため，$L=K_X+F$ とおき，次数付き $\mathbb{C}$ 代数

$$R(X,L)=\bigoplus_{m=0}^{\infty}H^0(X,mL)$$

の構造を，Koszul cohomology [4] を用いて調べる．

$\mathrm{Bs}|L| = \emptyset$ なので，evaluation 写像 $H^0(X, L) \otimes \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_X(L)$ は全射だから，完全列

$$0 \to M_L \to H^0(X, L) \otimes \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_X(L) \to 0$$

を得る．ここに M_L は階数 $g-1$ の局所自由層で $\bigwedge^{g-1} M_L \simeq \mathscr{O}_X(-L)$ である．正整数 i に対して

$$0 \to \bigwedge^i M_L \to \bigwedge^i H^0(L) \otimes \mathscr{O}_X \to \bigwedge^{i-1} M_L \otimes \mathscr{O}_X(L) \to 0$$

は完全である．合成写像 $\bigwedge^i H^0(L) \otimes H^0(jL) \to H^0(\bigwedge^i M_L \otimes \mathscr{O}_X((j+1)L)) \to \bigwedge^{i-1} H^0(L) \otimes H^0((j+1)L)$ を $d_{i,j}$ とおくと，容易に確認できるように $d_{i-1,j+1} \circ d_{i,j} = 0$ である．

$$K_{i,j}(X, L) = \mathrm{Ker}(d_{i,j})/\mathrm{Im}(d_{i+1,j-1})$$

とおく．また，$\bigwedge^i H^0(L) \otimes H^0(K_X + jL) \to \bigwedge^{i-1} H^0(L) \otimes H^0(K_X + (j+1)L)$ を用いて同様に定義されるものを $K_{i,j}(X, K_X, L)$ と記す．

$K_{i,j}(X, L)$ と $R(X, L)$ の極小自由分解における graded Betti 数との関係は以下の通りである．$H^0(X, L)$ 上の対称代数を $S = \mathrm{Sym}(H^0(X, L))$ とし，次数付き S 加群としての $R(X, L)$ の極小自由分解を

$$\cdots \to \bigoplus_{j \geq j_2} S(-j) \otimes M_{2,j} \to \bigoplus_{j \geq j_1} S(-j) \otimes M_{1,j} \to \bigoplus_{j \geq j_0} S(-j) \otimes M_{0,j} \to R(X, L) \to 0$$

のように表示するとき，ベクトル空間の同型 $M_{i,i+j} \simeq K_{i,j}(X, L)$ がある．従って，極小自由分解の様子を調べるためには $K_{i,j}(X, L)$ を調べればよい．

補題 3.3. $\Phi_L(X)$ が曲面で $L^2 \leq 2g-4$ のとき，任意の整数 i に対して $H^1(X, iL) = 0$ である．

[証明] $i = 0$ については明らかである．$i > 0$ とする．補題 3.1 と Bertini の定理から，一般元 $C \in |L|$ は非特異既約曲線である．$\deg(L|_C - K_C) = \deg(-K_X|_C) = -K_X(K_X + F) = -(K_X + F)^2 + 2(g-1)$ だから $L|_C$ は特殊直線束ではない．従って $H^1(C, iL) = 0$ であるから，完全列

$$\cdots \to H^1(X, (i-1)L) \to H^1(X, iL) \to H^1(C, iL) = 0$$

を用いた帰納法により $H^1(X, iL) = 0$ を得る．$i < 0$ ならば，連結曲線 $C_i \in |-iL|$ をとって

$$0 \to H^0(X, -C_i) \to H^0(X, \mathscr{O}_X) \to H^0(C_i, \mathscr{O}_{C_i}) \to H^1(X, -C_i) \to H^1(X, \mathscr{O}_X)$$

を考えれば, $H^0(X, \mathscr{O}_X) \simeq H^0(C_i, \mathscr{O}_{C_i})$ および $H^1(X, \mathscr{O}_X) = 0$ より, $H^1(X, -C_i) = H^1(X, iL) = 0$ を得る．□

補題 3.4. $\Phi_L(X)$ が曲面で $L^2 \leq 2g-4$ のとき，$K_{i,j}(X,L)^\vee \simeq K_{g-3-i,3-j}(X,K_X,L)$ である．

[証明] 補題 3.3 から $H^1(X,iL)=0\ \forall i \in \mathbb{Z}$ なので双対定理 [4] より従う．□

命題 3.5. $L^2 = 2g-5-p$ $(0 \leq p \leq g-3)$ とおく．$j \geq 3$ または，$j=2$ かつ $i \leq p$ ならば，$K_{i,j}(X,L)=0$ である．従って，$R(X,L)$ の極小自由分解は p 次部分まで線形であり，性質 (N_p) をもつ．特に，次が成立する．

(1) $L^2 \leq 2g-5$ ならば，$R(X,L)$ は 1 次部分で生成される．

(2) $L^2 \leq 2g-6$ ならば，$R(X,L)$ の関係式は 2 次である．

(3) $L^2 \leq 2g-7$ ならば，$R(X,L)$ の関係式の間の関係式（シチジー）は 3 次である．

[証明] 前補題より $K_{g-3-i,3-j}(X,K_X,L)$ の消滅を議論すればよい．問題の部分は

$$\begin{aligned}\bigwedge^{g-2-i} H^0(L)\otimes H^0(K_X+(2-j)L) \to & \bigwedge^{g-3-i} H^0(L)\otimes H^0(K_X+(3-j)L)\\ \to & \bigwedge^{g-4-i} H^0(L)\otimes H^0(K_X+(4-j)L) \to\end{aligned}$$

である．$K_X+(3-j)L=(4-j)K_X+(3-j)F$ なので $j \geq 3$ ならば $H^0(K_X+(3-j)L)=0$ を得る．$j=2$ とする．消滅定理 [4] より，$h^0(K_X+L) \leq g-3-i$ ならば $K_{g-3-i,1}(X,K_X,L)=0$ である．Riemann-Roch 定理と Ramanujam 消滅定理より $h^0(K_X+L) = \chi(K_X+L) = (1/2)L(K_X+L)+\chi(\mathscr{O}_X) = g-3-p$ なので，$i \leq p$ ならば $K_{g-3-i,1}(X,K_X,L)=0$ である．□

4. 相対標準環

本節では，$L=K_X+F$ について $g-2 \leq L^2 \leq 2g-5$ が成立する場合に，非超楕円的な代数曲線束 $f: X \to \mathbb{P}^1$ の相対標準環

$$\mathscr{R}_f = \bigoplus_{m=0}^{\infty} f_*(\omega_{X/\mathbb{P}^1}^{\otimes m})$$

の構造を調べる．中山の補題から，任意のファイバー F に対して標準環 $R(F,\omega_F)$ を調べればよい．

F を $f: X \to \mathbb{P}^1$ の任意のファイバーとする．$H^1(X,K_X+(j-1)L)=0$ なので，完全列

$$0 \to \mathscr{O}_X(K_X+(j-1)L) \to \mathscr{O}_X(jL) \to \omega_F^{\otimes j} \to 0$$

と同型 $H^0(X,L)\simeq H^0(F,\omega_F)$ より，可換図式

$$\begin{array}{ccccc}
\bigwedge^{i+1} H^0(\omega_F)\otimes H^0(\omega_F^{\otimes(j-1)}) & \longrightarrow & \bigwedge^{i} H^0(\omega_F)\otimes H^0(\omega_F^{\otimes j}) & \longrightarrow & \bigwedge^{i-1} H^0(\omega_F)\otimes H^0(\omega_F^{\otimes(j+1)}) \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\bigwedge^{i+1} H^0(L)\otimes H^0((j-1)L) & \longrightarrow & \bigwedge^{i} H^0(L)\otimes H^0(jL) & \longrightarrow & \bigwedge^{i-1} H^0(L)\otimes H^0((j-1)L) \\
 & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & \bigwedge^{i} H^0(L)\otimes H^0(K_X+(j-1)L) & \longrightarrow & \bigwedge^{i-1} H^0(L)\otimes H^0(K_X+jL)
\end{array}$$

が得られ，Koszul コホモロジー群の完全列

$$\cdots\to K_{i,j-1}(X,K_X,L)\to K_{i,j}(X,L)\to K_{i,j}(F,\omega_F)\to K_{i-1,j}(X,K_X,L)\to\cdots$$

が得られる．$K_{i,j}(X,L)$ は既に調べたので，$K_{i-1,j}(X,K_X,L)$ を調べれば，$K_{i,j}(F,K_F)=0$ となる条件を導くことができる．

補題 4.1. 次の場合，$K_{i-1,j}(X,K_X,L)=0$ である．

(1) $j\geq 4$

(2) $j=3$ かつ $i\leq g-3$

(3) $j=2$ かつ (a) $i=0$, または (b) $i=1$, $L^2\geq g-1$, または (c) $i=2$, $L^2\geq g$ かつ $W=\Phi_L(X)$ は最小次数の 3-fold 上にない．

[証明] $K_{i-1,j}(X,K_X,L)$ の双対空間は $K_{g-2-i,3-j}(X,L)$ なので，問題の部分は

$$\begin{aligned}\bigwedge^{g-1-i} H^0(L)\otimes H^0((2-j)L) &\to \bigwedge^{g-2-i} H^0(L)\otimes H^0((3-j)L)\\ &\to \bigwedge^{g-3-i} H^0(L)\otimes H^0((4-j)L)\end{aligned}$$

である．$j\geq 4$ ならば $H^0((3-j)L)=0$ である．$j=3$ のときには，$g-3-i\geq 0$ なる限り $\bigwedge^{g-2-i} H^0(L)\to\bigwedge^{g-3-i} H^0(L)\otimes H^0(L)$ は単射である．$j=2$ の場合の主張は $K_{p,1}$-Theorem [4] より従う．□

命題 3.5 と補題 4.1 より，次が得られる．一般ファイバーではなく，任意のファイバーに対する主張である点に注意されたい．

命題 4.2. $L^2=2g-5-p$ $(0\leq p\leq g-3)$ とおく．次の場合に，任意のファイバー F に対して $K_{i,j}(F,K_F)=0$ が成立する．

(1) $j \geq 4$, (2) $j = 3, i \leq g-3$,

(3) $j = 2$ かつ次のいずれか：

(a) $i = 0$, (b) $i = 1$ かつ $g-1 \leq L^2 \leq 2g-6$

(c) $i = 2, g \leq L^2 \leq 2g-7$ かつ W が最小次数の 3-fold に含まれない.

補題 4.1 の (3c) に関連して，次を示しておく.

補題 4.3. $g-1 \leq L^2 \leq 2g-6, g \geq 6$ とする．$W = \Phi_L(X)$ が最小次数の 3-fold に含まれるならば，つぎのいずれかが成り立つ.

(1) X は $LD = 2, D^2 = 0$ なるペンシル $|D|$ をもち，それは F に g^1_4 を誘導する.

(2) X は $LD = 4, D^2 = 2$ なるネット $|D|$ をもち，それは F に g^2_6 を誘導する．($g = 7$, $L^2 = 8$)

(3) X は $LD = 3, D^2 = 1$ なるネット $|D|$ をもち，それは F に g^2_6 を誘導する．($g = 7$, $L^2 = 6$)

[証明] $g \geq 6$ だから，良く知られた最小次数の 3-fold の分類結果から，それは 3 次元有理正規スクロールまたは Veronese 曲面上の錐体 ($g = 7$) である (e. g. [1], [3]).

まず，W が 3 次元有理正規スクロールに含まれる場合を考察する．対応する $\mathbb{P}^1$ 上の $\mathbb{P}^2$ 束を考え，W の固有変換を $\tilde{W}$ とする．$\mathbb{P}^2$ 束のトートロジカル因子を H とし，ファイバーを Γ と記す．Picard 群はこれらで生成される階数 2 の自由アーベル群である．$\tilde{W}$ の線形同値類を $\alpha H + \beta\Gamma$ とおく．W の斉次イデアルは 2 次で生成されるので，$|2H - \tilde{W}|$ は有効なメンバーを含む．よって $\alpha \leq 2$ である．もし $\alpha = 1$ ならば，W は直線による ruling をもつ．このとき，切断種数は 0 だから，$\deg W = g-2$ となり仮定に矛盾する．従って $\alpha = 2$ でなければならない．一方，$L^2 = (2H + \beta\Gamma)H^2 = 2(g-3) + \beta$ なので，$\tilde{W}$ の線形同値類は $2H - (2g - 6 - L^2)\Gamma$ である．これより，W は conic による ruling をもつから，X は $LD = 2$ をみたす有理曲線のペンシル $|D|$ をもつ．Hodge 指数定理より $4 = (LD)^2 \geq L^2D^2$ だから，$D^2 = 0$ である．D は有理曲線なので，$K_XD = -2$ だから，$2 = LD = (K_X + F)D$ より $FD = 4$ を得る．すなわち $|D|$ は F 上の g^1_4 を誘導する.

次に Veronese 曲面上の錐体に含まれる場合を考察する．頂点を通る超平面を引き戻すことにより，$L \sim 2D + \Delta$ なる分解を得る．ここに，D はネットの中を動き，Δ は頂点の逆像の因子部分である．特に $L\Delta = 0$ だから，$L^2 = 2LD = 4D^2 + 2D\Delta$ を得る．$g = 7$ なので，仮定から $L^2 = 6, 8$ である．従って $D^2 \leq 2$ である．もし $D^2 = 2$ ならば $D\Delta = 0$ だから $L\Delta = 0$ とあわせて $\Delta^2 = 0$ を得るので，Hodge 指数定理より $\Delta = 0$ である．このとき，

$L^2 = 8, 4 = LD = K_X D + FD$ である．$12 = FL = 2FD$ 故，$FD = 6, K_X D = -2$ を得る．$D^2 = 1$ ならば，頂点からの射影は W と $\mathbb{P}^2$ の間の双有理正則写像を与える．F は種数 7 の非超楕円曲線なので，$DF \geq 6$ だが，他方 $12 = LF = 2DF + \Delta F \geq 2DF$ より，$DF \leq 6$ なので $DF = 6$ である．よって $|D|$ は F に g^2_6 を誘導する．もし $LD = 4$ ならば $K_X D = -2$ であるが，$D^2 = 1$ なので，$K_X D + D^2$ が偶数であることに矛盾である．従って，$LD = 3$ である．□

ちなみに (2) のとき，W は $\mathbb{P}(1,1,1,2)$ の 4 次超曲面である．また，(3) の W は $\mathbb{P}^2$ を同一直線上にある 3 点をブローアップし，直線の固有逆像である (-2) 曲線を縮約して得られる正規 Del Pezzo 曲面である．

定義 4.4. 種数 4 以上の非特異射影代数曲線 C に対して，

$$\mathrm{Cliff}(C) = \min\{\deg M - 2h^0(M) + 2 \mid M \in \mathrm{Pic}(C),\ h^0(M) > 1,\ h^1(M) > 1\}$$

を，C の Clifford index と呼ぶ.

特殊直線束に関する Clifford の定理より，$\mathrm{Cliff}(C) \geq 0$ であり，$\mathrm{Cliff}(C) = 0$ であることと C が超楕円曲線であることは同値である．また，$\mathrm{Cliff}(C) = 1$ であることと，C が trigonal 曲線または非特異平面 5 次曲線であることは同値である．同様に，$\mathrm{Cliff}(C) = 2$ であるための必要十分条件は，C が tetragonal 曲線または非特異平面 6 次曲線であることである．従って，補題 4.3 の主張は $\mathrm{Cliff}(F) \leq 2$ であることと言い換えることができる．これを直接示すこともできる．すなわち，

補題 4.5. 種数 $g \geq 6$ の標準曲線 $F \subset \mathbb{P}^{g-1}$ が最小次数の 3-fold 上にあれば，$\mathrm{Cliff}(F) \leq 2$ である．

[証明] $\mathrm{Cliff}(F) \geq 2$ と仮定してよい．まず，F が Veronese 曲面上の錐体の上にあれば，頂点を通る超平面のなす線形系を F に引き戻すことにより $K_F \sim 2D + \Delta$ なる分解を得る．ここに D は g^2_d であり，錐体の底空間 $\mathbb{P}^2$ への正則写像を定める．$g = 7$ なので，$12 = 2g - 2 = 2\deg D + \deg \Delta$ だが，これより $d = \deg D \leq 6$ を得るので，$\mathrm{Cliff}(F) \leq 2$ である．つぎに，F が 3 次元有理正規スクロール上にある場合を考える．そのひとつの非特異モデルは $\mathbb{P}^1$ 上の $\mathbb{P}^2$ 束である．よって最初から F は $\mathbb{P}^1$ 上の $\mathbb{P}^2$ 束 $V = \mathbb{P}(\mathscr{E})$ 上にあるとしてよい．ここに $\mathscr{E} = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(b) \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(c)$ であり，a, b, c は $0 \leq a \leq b \leq c$ かつ $a + b + c = g - 3$ をみたす整数である．V の射影 $\pi : V \to \mathbb{P}^1$ は F 上にペンシル g^1_d を誘導する．H, Γ をそれぞれ V 上のトートロジカル因子，ファイバーとする．

$H - c\Gamma$ は有効因子であり $F \subset \mathbb{P}^{g-1}$ は非退化なので，$D \in g^1_d$ に対して $K_F - cD$ も有効である．また，明らかに $D \nsim K_F$ である．従って $H^1(F, 2K_F - D) = 0$ だから，制限写像 $H^0(F, 2K_F) \to H^0(D, 2K_F)$ は全射である．$H^0(V, 2H) \to H^0(F, 2K_F)$ は全射だから，$H^0(V, 2H) \to H^0(D, 2K_F) = H^0(D, 2H)$ も全射である．完全列

$$0 \to \mathscr{I}_F(2H) \to \mathscr{O}_V(2H) \to \omega_F^{\otimes 2} \to 0$$

の直像を取って

$$0 \to \pi_*\mathscr{I}_F(2H) \to \mathrm{Sym}^2\mathscr{E} \to (\pi|_F)_*(\omega_F^{\otimes 2}) \to R^1\pi_*\mathscr{I}_F(2H) \to 0$$

を得るが，上で見たことより $\mathrm{Sym}^2\mathscr{E} \to (\pi|_F)_*(\omega_F^{\otimes 2})$ は全射なので，$R^1\pi_*\mathscr{I}_F(2H) = 0$ である．$\mathrm{Sym}^2\mathscr{E}$ と $(\pi|_F)_*\omega_F^{\otimes 2}$ の階数はそれぞれ 6，d なので，$\pi_*\mathscr{I}_F(2H)$ は階数 $6 - d$ の局所自由層である．$\mathrm{Cliff}(F) \geq 2$ だから，$F \subset \mathbb{P}^{g-1}$ の定義イデアルは斉次 2 次式で生成される．F は V の中で余次元 2 だから，少なくとも 2 つの独立な相対 2 次超曲面で切り取られることになる．従って $6 - d \geq 2$, すなわち $d \leq 4$ でなければならない．□

以上より，次の定理が証明された．

定理 4.6. $f : X \to \mathbb{P}^1$ を有理曲面 X が有する相対極小な非超楕円的代数曲線束とする．このとき，

(1) $5 - 6/g \leq \lambda_f \leq 6 - 9/g$ ならば，$\mathscr{R}_f$ は 1 次で生成され，相対標準像は相対標準モデルに同型である．

(2) $5 - 5/g \leq \lambda_f \leq 6 - 10/g$ ならば，$\mathscr{R}_f$ の関係式は 2 次である．

(3) $5 - 4/g \leq \lambda_f \leq 6 - 11/g$ かつ f が tetragonal 曲線束でなければ，$\mathscr{R}_f$ の関係式の関係式は 3 次である．

注意 4.7. (i) 良く知られているように，種数 6 以上の Clifford 指数 2 の曲線が複数の g^1_4 をもてば，それは双楕円曲線かまたは種数 9 以下である．北川 [5] によれば，有理曲面が種数 6 以上の双楕円曲線束をもてば，スロープは $6 - 10/g$ 以上である．$g \geq 10$ のとき，上記 (3) の範囲にスロープがある tetragonal 曲線束の一般ファイバーが有する g^1_4 は唯一である．また，補題 4.3 の証明中で示した通り $\tilde{W} \sim 2H - (2g - 6 - L^2)\Gamma$ であり，これは階数 3 の相対 2 次超曲面でなければならないことから $2g - 6 - L^2 \leq \min\{a + c,\ 2b\}$ なので，特に $L^2 \geq (4/3)(g - 3)$ を得る．(この不等式の別証明は [6] にある)．

(ii) Clifford 指数が小さい標準曲線に対しては Green 予想が成立するので，上の命題は次のように言い換えることができる．

- $5 - 6/g \le \lambda_f \le 6 - 9/g$ ならば，$\mathrm{Cliff}(F) \ge 1$
- $5 - 5/g \le \lambda_f \le 6 - 10/g$ ならば，$\mathrm{Cliff}(F) \ge 2$
- $5 - 4/g \le \lambda_f \le 6 - 11/g$ かつ f が tetragonal 曲線束でなければ，$\mathrm{Cliff}(F) \ge 3$

Clifford index が 1 の場合には，超楕円曲線束と同様の現象が観察される．すなわち，

系 4.8. $p_g = q = 0$ なる射影代数曲面 X のもつ，$\mathrm{Cliff}(f) = 1$ なる相対極小な非超楕円的代数曲線束 $f : X \to \mathbb{P}^1$ のスロープは

$$\lambda_f = 5 - \frac{6}{g} \quad \text{または} \quad \lambda_f \ge 6 - \frac{9}{g}$$

をみたし，存在域に空白がある．

補題 4.9. 有理曲面が有する $\lambda_f = 5 - 6/g$ をみたす非超楕円曲線束は，高々単純基点しかもたない平面 d 次 $(d = 4, 5)$ 曲線のなすペンシル，または Hirzebruch 曲面上の 3 重切断がなすペンシルの基点解消によって得られる．

[証明] 最小次数の曲面 W は標準曲線 F の 2 次包に他ならないので，明らかである．□

$\lambda_f = 6 - 9/g$ の場合もすべて分類可能である．次節でその概略を紹介する．

5. スロープ $6 - 9/g$ の非超楕円曲線束

$L^2 = (K_X + F)^2 = 2g - 5$, $g \ge 4$, とする．引き続き $W = \Phi_L(X)$ とおく．

補題 5.1. W の 2 次包 $\mathrm{Quad}(W)$ は最小次数の 3-fold である．$g \ge 5$ なら 3 次元有理正規スクロールである．

[証明] F の Clifford index は 1 なので，Enriques-Petri 定理から，その 2 次包 $\mathrm{Quad}(F)$ は最小次数の曲面であり W とは一致しない．よって W と $\mathrm{Quad}(F)$ との交わりは高々 F を含む有限個の曲線である．他方，明らかな包含関係

$$\begin{array}{ccc} F & \subset & W \\ \cap & & \cap \\ \mathrm{Quad}(F) & \subset & \mathrm{Quad}(W) \end{array}$$

がある．F はペンシルの中を動くので, $\mathrm{Quad}(W)$ の W を含む既約成分の次元は 3 次元以上である．W を通る 2 次超曲面は $\dim\ker\{\mathrm{Sym}^2 H^0(X, L) \to H^0(X, 2L)\} = (1/2)(g-3)(g-4)$ 次元分あるので，$\mathrm{Quad}(W)$ は最小次数の 3-fold である．$g = 5$ で $\mathrm{Quad}(W)$ が非特異 2 次

超曲面ならば，その上の因子の次数は偶数であるが，一方，$\deg W = 2g-5 = 5$ なので矛盾である．$g=7$ で Quad(W) が Veronese 曲面上の錐体ならば，W の一般超平面切断は非特異平面曲線と同型である．一方，W の切断種数は 4 なので，これは不可能である．□

(Y, Λ_f) を $f : X \to \mathbb{P}^1$ の簡略化とする．$g=4$ ならば $\deg W = 3$ であり，種数 4 の標準曲線は 2 次と 3 次の超曲面の完全交差なので，次の補題は明らかであろう．

補題 5.2. $g=4$ のとき，Y は 3 次弱 Del Pezzo 曲面で，$\Lambda_f \subset |-2K_Y|$ である．

$g \geq 5$ ならば Quad(W) の特異点解消は $\mathbb{P}^1$ 上の $\mathbb{P}^2$ 束なので，階数 3 のベクトル束

$$\mathscr{E} = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(b) \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(c), \quad (a+b+c = g-3, 0 \leq a \leq b \leq c)$$

を用いて $\mathbb{P}(\mathscr{E})$ と書ける．W の固有逆像 $\hat{W}$ は

$$\text{(I) } 3H-(g-4)\Gamma, \qquad \text{(II) } 2H+\Gamma$$

のいずれかと線形同値である．ここに H はトートロジカル因子，Γ はファイバーである．実際，$\hat{W} \sim \alpha H + \beta\Gamma$ とおけば $K_{\hat{W}} \sim ((\alpha-3)H + (\beta+g-5)\Gamma)|_{\hat{W}}$ なので，次数および切断種数に関する等式から得られる連立方程式

$$\begin{cases} 2g-5 = \deg W = (\alpha H+\beta\Gamma)H^2, \\ 2g-8 = 2g(W, \mathscr{O}_W(1)) - 2 = ((\alpha-2)H + (\beta+g-5)\Gamma)(\alpha H+\beta\Gamma)H \end{cases}$$

を解いて (I), (II) を得る．他方，Quad(F) も Quad(W) の超曲面なので，全く同様にして線形同値類を与えることができる．

補題 5.3. Quad(F) の固有逆像 $\hat{Q}$ の線形同値類は，(I) 型ならば $H+\Gamma$ と (II) 型のときは $2H-(g-4)\Gamma$ と，それぞれ線形同値である．特に，(I) 型ならば $b \leq a+1, 2b+1 \geq a+c$ であり，(II) 型ならば $(g; a, b, c) = (6; 1, 1, 1), (6; 0, 1, 2), (5; 0, 1, 1)$

$\hat{Q}$ の線形同値類には上の二つの可能性しかないことは直ぐにわかる．どちらが (I) 型で，どちらが (II) 型になるのかを判断するためには，F が $\hat{W} \cap \hat{Q}$ に含まれ，従って $\hat{W}\hat{Q}H \geq \deg F = 2g-2$ であることを用いる．結果的に，F は 3 次元有理正規スクロールの中で，上述のような線形同値類に属する二つの相対超曲面に含まれるわけだが，F は丁度それらの完全交差になっていることが確認できる．上の (a, b, c) に対する条件は，W や Quad(F) の既約性や正規性から導かれるものである．また，$g=5$ で (II) 型ならば，W は Σ_0 上の cone なので，別方向の ruling を考えることによって (I) 型に帰着される．よって (II) 型は $g=6$ でのみ起こるとしてよい．このとき，$(a, b, c) = (1, 1, 1)$ ならば，スクロールは $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ と同型で，$\hat{Q} \sim 2(H-\Gamma)$ より，$\hat{Q} \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ である．$\hat{W} \sim 3\Gamma + 2(H-\Gamma)$ だか

ら，F は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ で bidegree$(3,4)$ である．$(a,b,c)=(0,1,2)$ ならば，$\hat{Q} \sim 2H - 2\Gamma$ は Σ_1 と同型で，$\hat{W} \sim 2H + \Gamma$ より，$F \subset \hat{Q} = \Sigma_1$ の線形同値類は $4\Delta_0 + 5\Gamma$ となる．すなわち F は平面 5 次曲線と同型である．以上より，

定理 5.4. (I) 型すなわち $\hat{W} \sim 3H - (g-4)\Gamma$ のとき，Λ_f は $|H+\Gamma|_{\hat{W}}$ から得られる trigonal 曲線のペンシルから誘導される．(II) 型すなわち $\hat{W} \sim 2H + \Gamma$ で $g=6$ の場合，Λ_f は $|2H - 2\Gamma|_{\hat{W}}$ から得られる．さらに

- $(a,b,c)=(1,1,1)$: Λ_f の既約なメンバーは，$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の bidegree $(3,4)$ の曲線である．
- $(a,b,c)=(0,1,2)$: Λ_f の既約なメンバーは，平面 5 次曲線である．

Clifford index 1 なる曲線は，種数 6 に対してのみ 2 種類あり，trigonal または平面 5 次曲線だった．そういう意味で (II) 型は興味深い．Quad(W) だけに着目すると，$(0,1,2)$ 型スクロールは $(1,1,1)$ 型スクロールの特殊化であるが，一方，平面 5 次曲線は trigonal 曲線の特殊化ではないからである．

参考文献

[1] E. Bertini, Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi, Enrico Spoerri, Pisa 1907

[2] P. Del Pezzo, Sulle superficie di ordine n immerse nello spazio di $n+1$ dimensioni, Rend. Circ. Mat. Palermo **1** (1886)

[3] T. Fujita, On the structure of polarized varieties with Δ-genera zero, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **22** (1975), 103–115.

[4] M. Green, Koszul cohomology and the geometry of projective varieties, J. Diff. Geom. **19** (1984), 125–167

[5] S. Kitagawa, On Mordell-Weil lattices of bielliptic fibrations on rational surfaces, J. Math. Soc. Japan **57** (2005), 137–155

[6] S. Kitagawa and K. Konno, Fibred rational surfaces with extremal Mordell-Weil lattices, to appear in Math. Z. **251** (2005), 179–204

[7] 今野一宏, On certain fibred rational surfaces, 研究集会「Hodge 理論・退化・複素曲面の代数幾何とトポロジー」報告集，2005

〒 560-0043 豊中市待兼山町 1–16 大阪大学大学院理学研究科数学教室
e-mail: konno@math.wani.osaka-u.ac.jp