Auslander-Reiten 理論の高次元化に向けて

伊山 修

以下 k を標数 0 の体とし, G を $\mathrm{SL}_d(k)$ の有限部分群とする. S で冪級数環 $k[[x_1, \cdots, x_d]]$ を表し, S^G で G の不変式環を表す. 以下 S^G が孤立特異点であると仮定する. また CM S^G で maximal Cohen-Macaulay S^G-加群（以下, 単に CMS^G-加群と呼ぶ）の成す圏を表す. 有限生成 S^G-加群の圏 $\mathrm{mod}\, S^G$（特に CM S^G）においては, 直既約分解に関する Krull-Schmidt 型の定理が成立する. 本文の出発点は Auslander による, 2 次元における次の定理である [A3][Y1].

0.1 定理 $d = 2$ とする.

(1) S^G は**有限表現型**, 即ち直既約 CM S^G-加群は同型を除いて有限個しか存在しない.

(2) S^G の Auslander-Reiten quiver は G の McKay quiver に一致する. ここで各々の quiver の定義は略すが（1.11 参照）以下の要素から成るものである.

	S^G の Auslander-Reiten quiver	G の McKay quiver
頂点	直既約 CM S^G-加群	既約 G-加群
矢印	概分裂完全列で決める	$(k^d) \otimes -$ で決める

しかし一方で $d \geq 3$, $G \neq 1$ の時, S^G は決して有限表現型にならない事が証明される [AR2]. より強くその表現は, 表現型理論 [CB] における有限-tame-wild の 3 分割中, 最も難しい wild と呼ばれるクラスに属する事さえ分かる.

本文の動機は, 表現型理論とは異なる視点から CM S^G を理解する方法を模索する事にある. そのために S^G とともに本文における主役である**捩れ群環** $S * G$ を導入する. これは G を基底とする自由 S-加群に, 積を

$$(sg)(s'g') = (sg(s'))(gg') \qquad (s, s' \in S,\ g, g' \in G)$$

と定めたものである. McKay quiver は $S * G$ の構造を与える quiver に他ならない.

表題にある Auslander-Reiten 理論は, 有限次多元環や可換 Cohen-Macaulay 環, 或いはそれらを統合した整環の表現論における基本理論である [ARS][Y1]. その典型が 2 次元における定理 0.1 であるが, d 次元の類似を考察すると, 以下の 1 章で紹介するように Auslander-Reiten 理論の高次元版とでも呼ぶべき現象が観察される事が分かる [I1,2]. 一方で代数幾何学において S^G の特異点解消の導来圏の研究は, McKay 対応として近年非常に盛んである [KV][BKR]. 我々の考察する捩れ群環 $S * G$ 上の加群は, McKay 対応に現れる k^d（の原点での完備化）上の G-同変連接層と見なされる. また 2 次元 McKay 対応において基本的な Artin-Verdier 理論 [AV] は, 直既約 CMS^G-加群と S^G の特異点解消の例外集合の間の対応を与えるが, その一種の高次元版が Van den Bergh [V1,2] により非可換クレパント解消 (2.3) として導入された. これらを含めた観点から, 本文では圏 CM S^G や $D^b(\mathrm{mod}\, S * G)$ を 0.1 の高次元版として調べる.

3 章は吉野雄二氏との共同研究 [IY][I3][Y2], 2・4 章は I.Reiten との共同研究 [IR] です. また McKay 対応に関して石井亮氏はじめ多くの方々に御教示を頂いた事を感謝します.

以下特に断らない限りΛ, Γ等は**整環**（=**CM 多元環**）, 即ちd次元完備正則局所環R上の多元環であり, R-加群として有限生成射影的なものを表す. S^Gや$S*G$を典型例として想定している. 整環Λ上の**CM 加群**とは, Λ-加群のうちR-加群として有限生成射影的なものの事である. また整環Λが**孤立特異点**であるとは, $\mathrm{gl.dim}\,\Lambda \otimes_R R_{\mathfrak{p}} = \mathrm{ht}\,\mathfrak{p}$が$R$の全ての極大でない素イデアル$\mathfrak{p}$に対して成立する事であり, 整環$\Lambda$が**対称**であるとは, (Λ, Λ)-加群として$\mathrm{Hom}_R(\Lambda, R) \simeq \Lambda$である事を意味する. 例えば可換 Gorenstein 環は対称整環である.

1. 高次元 Auslander-Reiten 理論の試み

一般に加法圏$\mathcal{C}$の直既約対象の同型類の全体を$\mathrm{ind}\,\mathcal{C}$で表す. また$X \in \mathcal{C}$に対して

$$\mathrm{add}\,X := \{Y \in \mathcal{C} \mid Y \text{ は } X^n\ (n>0) \text{ の直和因子}\}$$

とおく. Xが$\mathcal{C}$の**加法生成元**であるとは, $\mathcal{C} = \mathrm{add}\,X$となる事である.

まずはS^Gと$S*G$の関係を少し詳しく観察してみる.

1.1 (1) $\mathrm{gl.dim}\,S*G = d = \mathrm{depth}\,S*G$が成立する. 即ち$S*G$は非可環な正則環と呼ぶに相応しい性質を有する.

(2) $\mathrm{End}_{S^G}(S) = S*G$が成立し, さらに$d=2$ならば, Sは CM S^Gの加法生成元である.

即ち CM S^Gの加法生成元Sの準同型環として$S*G$が現れる. このような有限表現型であるS^Gと大域次元が 2 である$S*G$の関係を観察すると, 有限次多元環における類似である, やはり Auslander による次の定理 [A1][ARS] が思いつく.

1.2 定理 有限表現型有限次多元環Λの森田同値類と, 大域次元が 2 以下で dominant 次元が 2 以上の有限次多元環Γの森田同値類の間に一対一対応が存在する. それはΛに対して$\mathrm{mod}\,\Lambda$の加法生成元Mをとり$\Gamma := \mathrm{End}_\Lambda(M)$と置く事により与えられる.

ここでは dominant 次元の定義は与えないが, 自己入射分解によって定義されるものであり, 後藤-西田 [GN] により depth の一種の類似とみなす事が可能である事のみ注意しておく.

1.3 Auslander-Reiten 理論のアイデアを一言で述べるとすれば, 加群圏$\mathrm{mod}\,\Lambda$上の関手圏における単純関手の射影分解の考察, となろう. 例えば$\mathrm{mod}\,\Lambda$における概分裂完全列の存在は,（特定の例外を除いて）単純関手が自己双対性を有する長さ 2 の射影分解を持つという事に他ならない. ここで 2 という数字が現れたのは, $\mathrm{mod}\,\Lambda$がアーベル圏であるためその関手圏の大域次元が 2 となるからである. この意味で Auslander-Reiten 理論は 2 次元的な理論であるといえる.

最も典型的なのはΛが有限表現型の場合であり, その場合$\mathrm{mod}\,\Lambda$上の関手圏は, 上記のΓ上の加群圏$\mathrm{mod}\,\Gamma$と一致し, $\mathrm{mod}\,\Lambda$における概分裂完全列の存在は, 単純Γ-加群が自己双対性を有する長さ 2 の射影分解を持つ事に対応する [I1]. その意味で 1.2 は Auslander-Reiten 理論の起点であり, 実際 1.2 を与えた Auslander の講義録 [A1] の後, Auslander-Reiten による一連の論文 [A2][AR1] により, 所謂 Auslander-Reiten 理論の骨格が出来上がった.

さて 1.1 も 1.2 も「表現論的な圏の加法生成元の準同型環を取る事により, ホモロジカルに良い性質を持った環が現れる」という事を意味している. それでは逆に「ある種のホモロジカルに良い環を与えた時に, それを準同型環として実現するような, 表現論的な圏が存在する」のでは無いだろうか？勿論それは条件の良さに依存するであろうが, ではどの様な条件であれば存在するのか調べてみたくなる. 1.1,1.2 では大域次元が 2 の環を扱っていたが, それではある種の大域次元nの環に対応する圏においては, 何か「n次元 Auslander-Reiten 理論」とでも呼ぶべき現象が存在するのでは無いだろうか？

そのために次の概念を導入する.

1.4 定義 以下本文では $\mathrm{CM}\,\Lambda$ の部分圏 $\mathcal{C}$ としては, 充満かつ同型・直和・直和因子で閉じたもののみ考える事にする. ゆえに $\mathcal{C}$ は $\mathrm{ind}\,\mathcal{C}$ によって一意的に決定される.

(1) $\mathrm{CM}\,\Lambda$ の部分圏 $\mathcal{C}$ が**関手的有限**であるとは, 任意の $X \in \mathrm{CM}\,\Lambda$ に対して射 $f : Y \to X$ 及び $g : X \to Z$ で, $Y, Z \in \mathcal{C}$ かつ

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(\ ,Y) \xrightarrow{\cdot f} \mathrm{Hom}_\Lambda(\ ,X) \to 0, \quad \mathrm{Hom}_\Lambda(Z,\ ) \xrightarrow{g\cdot} \mathrm{Hom}_\Lambda(X,\ ) \to 0$$

が $\mathcal{C}$ 上完全となるものが存在する事である. 例えば $\#\,\mathrm{ind}\,\mathcal{C} < \infty$ ならば, $\mathcal{C}$ は関手的有限である事は容易に分かる.

(2) 関手的有限な部分圏 $\mathcal{C}$ が

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{X \in \mathrm{CM}\,\Lambda \mid \mathrm{Ext}^i_\Lambda(\mathcal{C}, X) = 0 \text{ for any } i\ (0 < i \le n)\} \\ &= \{X \in \mathrm{CM}\,\Lambda \mid \mathrm{Ext}^i_\Lambda(X, \mathcal{C}) = 0 \text{ for any } i\ (0 < i \le n)\} \end{aligned}$$

を満たす時, $\mathcal{C}$ を**極大 n-直交部分圏**と呼ぶ事にする. $\mathcal{C}$ 上では $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(\ ,\ )\ (0 < i \le n)$ が全て消え, またそのような性質を持つ部分圏の中で極大である.

この時, 有限次多元環において, 次の定理 1.5 が成立するが, $\mathrm{CM}\,\Lambda$ 自身は $\mathrm{CM}\,\Lambda$ の唯一つの極大 0-直交部分圏である事に注意すると, 1.5 は 1.2 の一種の高次元化になっている事が分かる.

1.5 定理 有限次多元環の加群圏の極大 $(n-1)$-直交部分圏 $\mathcal{C}$ で $\#\,\mathrm{ind}\,\mathcal{C} < \infty$ となるものの同値類と, 大域次元が $(n+1)$ 以下で dominant 次元が $(n+1)$ 以上の有限次多元環 Γ の森田同値類の間に一対一対応が存在する. それは $\mathcal{C}$ の加法生成元 M をとり $\Gamma := \mathrm{End}_\Lambda(M)$ と置く事により与えられる.

そこで 1.3 に述べた様に, 極大 $(n-1)$-直交部分圏では何らかの意味において Auslander-Reiten 理論の $(n+1)$-次元版が存在するのでは無いかと期待したくなるが, 以下それを考察する.

1.6 定義 $\mathrm{CM}\,\Lambda$ の部分圏 $\mathcal{C}$ を factor through する射全体から成る $\mathrm{CM}\,\Lambda$ のイデアルを $[\mathcal{C}]$ と表す. **安定圏** $\underline{\mathrm{CM}}\Lambda$ と**余安定圏** $\overline{\mathrm{CM}}\Lambda$ を

$$\underline{\mathrm{CM}}\Lambda := (\mathrm{CM}\,\Lambda)/[\mathrm{add}\,\Lambda], \quad \overline{\mathrm{CM}}\Lambda := (\mathrm{CM}\,\Lambda)/[\mathrm{add}\,\mathrm{Hom}_R(\Lambda, R)]$$

と定める. $\mathrm{CM}\,\Lambda$ の部分圏 $\mathcal{C}$ に対し, 対応する $\underline{\mathrm{CM}}\Lambda$ 及び $\overline{\mathrm{CM}}\Lambda$ の部分圏をそれぞれ $\underline{\mathcal{C}}$ 及び $\overline{\mathcal{C}}$ と表す.

1.7 定理 $\mathrm{CM}\,\Lambda$ の極大 $(n-1)$-直交部分圏 $\mathcal{C}$ に対し, 圏同値 *n-Auslander-Reiten translation*

$$\tau_n : \underline{\mathcal{C}} \to \overline{\mathcal{C}}$$

及び関手的同型 *n-Auslander-Reiten* **双対**

$$\underline{\mathrm{Hom}}_\Lambda(X, Y) \simeq \mathrm{Ext}^n_\Lambda(Y, \tau_n X)^*, \quad (X \in \mathcal{C},\ Y \in \mathrm{CM}\,\Lambda)$$

が存在する.

Auslander-Reiten 双対は Serre 双対の類似と捉える事が出来る [RV] が, 以下では 3.3 で用いる. Auslander-Reiten 双対より, Auslander-Reiten 理論において基本的な概分裂完全列の存在定理の, 以下の様な類似が従う. 但し J は圏 $\mathrm{CM}\,\Lambda$ の Jacobson 根基を表す.

1.8 定理　CM Λ の極大 $(n-1)$-直交部分圏 $\mathcal{C}$ は n-**概分裂完全列**を持つ．即ち任意の非射影的な $X \in \operatorname{ind}\mathcal{C}$ に対して完全列

$$0 \to \tau_n X \xrightarrow{f_n} C_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} C_{n-2} \xrightarrow{f_{n-2}} \cdots \xrightarrow{f_2} C_1 \xrightarrow{f_1} C_0 \xrightarrow{f_0} X \to 0 \qquad (C_i \in \mathcal{C},\ f_i \in J)$$

で, 以下が $\mathcal{C}$ 上完全となるものが同型を除いて一意に存在する．

$$0 \to \operatorname{Hom}_\Lambda(\ ,\tau_n X) \xrightarrow{\cdot f_n} \operatorname{Hom}_\Lambda(\ ,C_{n-1}) \xrightarrow{\cdot f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\cdot f_1} \operatorname{Hom}_\Lambda(\ ,C_0) \xrightarrow{\cdot f_0} J(\ ,X) \to 0$$
$$0 \to \operatorname{Hom}_\Lambda(X,\ ) \xrightarrow{f_0 \cdot} \operatorname{Hom}_\Lambda(C_0,\ ) \xrightarrow{f_1 \cdot} \cdots \xrightarrow{f_{n-1} \cdot} \operatorname{Hom}_\Lambda(C_{n-1},\ ) \xrightarrow{f_n \cdot} J(\tau_n X,\ ) \to 0$$

1.9　n-概分裂完全列の存在は, $\mathcal{C}$ 上の関手圏において, 非射影的な直既約加群に対応する単純関手が, 長さ n の自己双対性を有する射影分解を持つ事に他ならない．

さて $X \in \mathcal{C}$ の *sink* とは, $\mathcal{C}$ の射 $f \in J(Y,X)$ で, $\operatorname{Hom}_\Lambda(\ ,Y) \xrightarrow{\cdot f} J(\ ,X) \to 0$ が完全となり, かつ $Z \to 0$ $(Z \neq 0)$ の形の直和因子を持たないものの事である．それは存在すれば同型を除いて一意である．1.8 により非射影的な $X \in \operatorname{ind}\mathcal{C}$ は sink f_0 を持つ．それでは射影的な X に対してはどうであろうか？実はその場合も sink は存在するのであるが, 一般には 1.8 のような自己双対性を持つ列にまで延長しない．

しかし Auslander-Reiten 理論においては, 2 次元の場合に限って**基本列**と呼ばれる特別な列が存在した事を思い出そう [A3][Y1]．それは全ての単純関手が, 長さ 2 の自己双対性を有する射影分解を持つ事を意味する．その事の極大 $(n-1)$-直交部分圏における類似として次の 1.10 が成立する．$n=1$, $d=2$ の場合が通常の Auslander-Reiten 理論である．ここで ν は**中山関手** $\operatorname{Hom}_R(\operatorname{Hom}_\Lambda(\ ,\Lambda),R)$ を表すが, それは射影 CM Λ-加群の圏と入射 CM Λ-加群の圏の間の同値を与える．

1.10 定理　$d=n+1$ ならば, CM Λ の極大 $(n-1)$-直交部分圏 $\mathcal{C}$ は n-**基本列**を持つ．即ち任意の射影加群 $X \in \operatorname{ind}\mathcal{C}$ に対して完全列

$$0 \to \nu X \xrightarrow{f_n} C_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} C_{n-2} \xrightarrow{f_{n-2}} \cdots \xrightarrow{f_2} C_1 \xrightarrow{f_1} C_0 \xrightarrow{f_0} X \qquad (C_i \in \mathcal{C},\ f_i \in J)$$

で, 以下が $\mathcal{C}$ 上完全となるものが同型を除いて一意に存在する．

$$0 \to \operatorname{Hom}_\Lambda(\ ,\nu X) \xrightarrow{\cdot f_n} \operatorname{Hom}_\Lambda(\ ,C_{n-1}) \xrightarrow{\cdot f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\cdot f_1} \operatorname{Hom}_\Lambda(\ ,C_0) \xrightarrow{\cdot f_0} J(\ ,X) \to 0$$
$$0 \to \operatorname{Hom}_\Lambda(X,\ ) \xrightarrow{f_0 \cdot} \operatorname{Hom}_\Lambda(C_0,\ ) \xrightarrow{f_1 \cdot} \cdots \xrightarrow{f_{n-1} \cdot} \operatorname{Hom}_\Lambda(C_{n-1},\ ) \xrightarrow{f_n \cdot} J(\nu X,\ ) \to 0$$

また ν は $\mathcal{C}$ 上の自己圏同値であり, それは τ_n の持ち上げを与える．

1.11 定義　CM Λ の極大 $(n-1)$-直交部分圏 $\mathcal{C}$ の *Auslander-Reiten quiver* $\mathfrak{A}(\mathcal{C})$ を定める．簡単のため R の剰余体 k が代数的閉体であるとする．$\mathfrak{A}(\mathcal{C})$ の頂点集合は $\operatorname{ind}\mathcal{C}$ とする．$X, Y \in \operatorname{ind}\mathcal{C}$ に対して, Y の sink $f : Z \to Y$ をとり, Z の直既約分解に現れる X の個数を d_{XY} とする時, d_{XY} 本の矢印を X から Y に引く．

この時次が成立する．特に 0.1 は $d=2$ の場合とみなす事が出来る．

1.12 定理　k を標数 0 の体, G を $\mathrm{GL}_d(k)$ の有限部分群, $S := k[[x_1, \cdots, x_d]]$ とし, 不変式環 S^G が孤立特異点であると仮定する．すると $\mathcal{C} := \operatorname{add} S$ は CM S^G の極大 $(d-2)$-直交部分圏であり, その Auslander-Reiten quiver $\mathfrak{A}(\mathcal{C})$ は G の McKay quiver と一致する．

2. 傾斜複体と非可換クレパント解消

1章では, Auslander-Reiten 理論の高次元化という視点から極大直交部分圏を導入したが, この章では表面上異なる視点からそれを考察する. 本章と4章では導来圏まで考察する範囲を拡張し, その中の扱いやすい部分として CM 加群の圏がある, という見方をする.

さて代数幾何学においては, 代数多様体の導来圏の間の三角同値を作る際の手法として, Fourier-向井変換が広く用いられており, 最近では Kapranov-Vasserot [KV], Bridgeland-King-Reid [BKR] らによる McKay 対応の構成に用いられた. 一方で多元環論においては, 傾斜複体が多元環の導来圏の三角同値を構成する際の基本的な手法であるが, それは Fourier-向井変換のアフィン版と捉えるのが妥当と思われる. それは歴史的には Bernstein-Gelfand-Ponomarev による Gabriel の定理の証明に現れた鏡映関手に始まる [BGP]. 鏡映関手は通常のルート系における鏡映の圏論的実現であり, Auslander-Platzeck-Reiten による一般化・抽象化 [APR] を経て, Brenner-Butler 及び宮下により傾斜加群の概念として加群論的に定式化された [BB][M]. 一方, 傾斜加群の導来圏的研究は Happel 及び Cline-Parshall-Scott に始まり [H][CPS], 間もなく Rickard [R] により, 古典的森田理論における射影生成加群の概念の導来圏版である傾斜複体の概念が, 2.6 に示す導来森田定理とともに与えられた.

2.1 定義 $T \in D^b(\operatorname{mod}\Lambda)$ が**傾斜複体**であるとは, 以下の3条件が成立する事.

(i) $\operatorname{pd} T < \infty$.

(ii) $\operatorname{Hom}(T, T[i]) = 0$ $(i \neq 0)$.

(iii) T は, 射影次元有限の対象全体からなる部分圏 $D^b(\operatorname{mod}\Lambda)_{fpd}$ を生成する.

加群である様な傾斜複体を**傾斜加群**と呼ぶ. 以下簡単のために, 導来圏が三角同値である事を, **導来同値**と呼ぶ.

2.2 定理 環 Λ と Γ に対し, 以下の条件は同値である.

(1) Λ と Γ は導来同値である.

(2) Λ の傾斜複体 T が存在して, $\operatorname{End}(T)$ は Γ に同型.

さてここで Bondal-Orlov [BO] により予想された, 3次元端末特異点のクレパント解消の間の導来同値に関する, Bridgeland の定理 [B1] を思い出そう. Van den Bergh は [V1,2] において Bridgeland の定理の別証明を与えたが, そこで用いられている概念が次である.

2.3 定義 Λ の**非可換クレパント解消** (*non-commutative crepant resolution*) とは, reflexive Λ-加群 M で $\Gamma := \operatorname{End}_\Lambda(M)$ が $\operatorname{gl.dim}\Gamma = d = \operatorname{depth}\Gamma$ を満たすものの事である. ただし, 本来の定義では Γ が Λ の非可換クレパント解消なのであるが, 本文では便宜上 Γ を与える M の方を, そう呼ぶ事にする.

これは代数幾何学におけるクレパント解消（強調して可換クレパント解消と呼ぶ事にする）とは随分異なる様に見えるが, Van den Bergh は論文 [V1,2] において, 実際に可換クレパント解消と非可換クレパント解消の間のある種の対応を与えている. 可換から非可換を作る方法は2次元の Artin-Verdier 理論 [AV] の高次元化であり, 非可換から可換を作る方法には, McKay 対応における G-Hilbert スキーム [IN][INj] や G-constellation のモジュライの一般化である, Γ-加群のモジュライを用いている.

2.4 例 $\mathrm{SL}_d(k)$ の有限部分群 G に対して, $\operatorname{End}_{S^G}(S) = S * G$ 及び $\operatorname{gl.dim} S * G = d = \operatorname{depth} S * G$ が成立していた (1.1) ので, S は S^G の非可換クレパント解消である.

一方で 1.12 より $\operatorname{add} S$ は $\mathrm{CM}\, S^G$ の極大 $(d-2)$-直交部分圏でもあった. この事は偶然ではなく 2.5 により説明される. 非可換クレパント解消の方が極大 $(d-2)$-直交部分圏よりも, Cohen-Macaulay でなく reflexive としている分だけ一般なのである.

2.5 定理 $M \in \mathrm{CM}\,\Lambda$ に対し, M が Λ の非可換クレパント解消でかつ $\Lambda \oplus \mathrm{Hom}_R(\Lambda, R) \in \mathrm{add}\,M$ である事と, $\mathrm{add}\,M$ が $\mathrm{CM}\,\Lambda$ の極大 $(d-2)$-直交部分圏である事は同値である.

2.6 Van den Bergh は [V1,2] において, Bondal-Orlov [BO] による予想を一般化した次を予想し, 実際に Bridgeland らの手法 [B1][BKR] を拡張する事により, 3 次元端末特異点を含んだ場合に対して証明を与えた.

問題 Λ の全ての（可換・非可換）クレパント解消は導来圏が三角同値であるか？即ち Λ の全ての可換クレパント解消を X_i $(i \in I)$ とし, 全ての非可換クレパント解消を M_j $(j \in J)$ とした時に, 導来圏 $D^b(\mathrm{Coh}\,X_i)$ $(i \in I)$, $D^b(\mathrm{mod}\,\mathrm{End}_\Lambda(M_j))$ $(j \in J)$ は全てが三角同値ではないか？

この問題のうち非可換クレパント解消に関する部分に対して, 最近得た結果を報告する [IR]. 特に M が Cohen-Macaulay である場合等は, 極めて容易に証明される事柄である [I2].

2.7 定理 Λ を 3 次元孤立特異点とし, M と N を Λ の非可換クレパント解消とする. この時, $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, N)$ は射影次元 1 以下の傾斜 $(\mathrm{End}_\Lambda(M), \mathrm{End}_\Lambda(N))$-加群である. 特に全ての非可換クレパント解消は導来同値.

2.8 Λ が対称整環である場合は, より強く次が言える.

定理 対称整環 Λ を 3 次元孤立特異点とし, M を Λ の非可換クレパント解消とする. この時, Λ の非可換クレパント解消全体と, $\mathrm{End}_\Lambda(M)$ の射影次元 1 以下の傾斜加群全体の間に一対一対応が存在する. それは $N \mapsto \mathrm{Hom}_\Lambda(M, N)$ により与えられる.

$M = \Lambda$ とする事により, 次が分かる.

2.9 系 対称整環 Λ が $\mathrm{gl.dim}\,\Lambda = 3$ を満たせば, Λ の非可換クレパント解消と Λ の射影次元 1 以下の傾斜加群とは一致する.

また, 傾斜加群の一般論等より次が従う.

2.10 系 G を $\mathrm{SL}_3(k)$ の有限部分群とし, $k^3 \backslash \{0\}$ に自由に作用するとする. G の共役類の個数を g とする.

(1) S^G の任意の非可換クレパント解消の非同型な直既約直和因子の個数は g に等しい.

(2) 任意の reflexive S^G-加群で rigid (i.e. $\mathrm{Ext}^1_{S^G}(M, M) = 0$) であるものは, ある非可換クレパント解消の直和因子である. 特に M の非同型な直既約直和因子の個数は g 以下.

特に, S^G の非可換クレパント解消の考察は, rigid reflexive S^G-加群の考察と同等である.

3. mutation

Gorodentsev-Rudakov [GR] による $\mathbb{P}^2$ 上の例外ベクトル束の分類では, 鏡映関手に類似した *mutation* と呼ばれる圏論的手法が用いられている. それは Bondal-Kapranov [BK] による Serre 双対を持つ三角圏への応用を経て, Seidel-Thomas [ST] により特別な Fourier-向井変換である *twist* **関手**の構成へと繋がった. mutation は braid 群の生成系の圏論的実現であり, また興味深い事に Auslander-Reiten による古典的近似理論の一端と捉える事も可能である. 一方でごく最近 Fomin-Zelevinsky [FZ1,2] により, root 系と深く関係した cluster algebra が導入されたが, そこには mutation (3.5) と呼ばれる組み合わせ的操作が現れる. その圏論的実現が Buan-Marsh-Reineke-Reiten-Todorov [BMRRT], Geiss-Leclerc-Schröer [GLS] 等で与えられている. 本章で扱う mutation もその一種である.

この章では Λ が Gorenstein（左 Λ-加群として $\mathrm{Hom}_R(\Lambda, R) \simeq \Lambda$）であると仮定し, $\mathrm{CM}\,\Lambda$ の極大直交部分圏に対して mutation を定める事を試みる. Λ が Gorenstein である場合に

は, 1.6 で定めた安定圏 $\underline{\mathrm{CM}}\Lambda$ が, 三角圏の構造を持つ事が容易に分かる. mutation が上手く定まるために, 三角圏 $\underline{\mathrm{CM}}\Lambda$ が次に示す Calabi-Yau 条件を満たす事を要請する.

3.1 Bondal-Kapranov [BK] による, d 次元非特異射影多様体 X における Serre 双対

$$\mathrm{Hom}(F,G) \simeq \mathrm{Hom}(G, \omega_X \overset{\mathbf{L}}{\otimes} F[d])^* \quad (F,G \in D^b(\mathrm{Coh}\, X))$$

を思い出そう. X が Calabi-Yau 多様体の時に右辺は $\mathrm{Hom}(G,F[d])^*$ となるが, これを一般の三角圏に適用して Kontsevich は次の定義 (1) を与えた.

定義 (1) 三角圏 $\mathcal{T}$ が *n-Calabi-Yau* ($n \geq 0$) であるとは, 関手的同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(F,G) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(G,F[n])^* \quad (F,G \in \mathcal{T})$$

が存在する事.

(2) 特に, 多元環 Γ 上の長さ有限の加群の導来圏 $D^b(\mathrm{flmod}\,\Gamma)$ が n-Calabi-Yau である時, Γ を *n-Calabi-Yau* **多元環**と呼ぶ. この時 $\mathrm{gl.dim}\,\Gamma = n$ が成立する. また n-Calabi-Yau 多元環全体は, 導来同値で閉じている.

3.2 例 G を $\mathrm{SL}_d(k)$ の有限部分群とする.

(1) 安定圏 $\underline{\mathrm{CM}}S^G$ は $(d-1)$-Calabi-Yau である.

(2) $S * G$ は d-Calabi-Yau 多元環である. より一般に d 次元対称整環 Γ で $\mathrm{gl.dim}\,\Gamma = d$ となるものは, d-Calabi-Yau 多元環である.

3.3 定義 以下安定圏 $\underline{\mathrm{CM}}\Lambda$ が n-Calabi-Yau であると仮定する. この時, $\mathrm{CM}\,\Lambda$ の極大 $(n-1)$-直交部分圏 $\mathcal{C}$ と射影的でない $X \in \mathrm{ind}\,\mathcal{C}$ から, 別の極大 $(n-1)$-直交部分圏を以下のようにして構成する. まず 1.8 で述べた n-概分裂完全列

$$0 \to \tau_n X \xrightarrow{f_n} C_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} C_{n-2} \xrightarrow{f_{n-2}} \cdots \xrightarrow{f_2} C_1 \xrightarrow{f_1} C_0 \xrightarrow{f_0} X \to 0$$

をとる. ここで 1.7 の n-Auslander-Reiten 双対と 3.1 の Serre 双対を比較すると $\tau_n X = X$ が分かる. また $X_i := \mathrm{Im}\, f_i$ ($i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) は互いに非同型な直既約加群である事が容易に分かる. $\mathrm{CM}\,\Lambda$ の部分圏を

$$\mathrm{ind}\,\mu_X^i(\mathcal{C}) = (\mathrm{ind}\,\mathcal{C} \setminus \{X\}) \cup \{X_i\} \quad (0 \leq i < n)$$

と定める. この操作 μ_X^i の事を *mutation* と呼ぶ.

一方 X が**ループ**を持たないとは, $X \notin \mathrm{add} \bigoplus_{i=1}^{n-1} C_i$ が成立する事とする. 全ての $X \in \mathrm{ind}\,\mathcal{C}$ がループを持たない時, $\mathcal{C}$ もループを持たないと言う. この時 $\mathcal{C}$ の Auslander-Reiten quiver (1.11) はループを持たず, $n=2$ の時は逆も成立する.

3.4 定理 X がループを持たないならば, 以下が成立する.

(1) $\mu_X^i(\mathcal{C})$ ($i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) は $\mathrm{CM}\,\Lambda$ の極大 $(n-1)$-直交部分圏である.

(2) $\mathrm{ind}\,\mathcal{C} \setminus \{X\}$ を含む $\mathrm{CM}\,\Lambda$ の極大 $(n-1)$-直交部分圏は, (1) の n 個に限る.

(3) $\mu_X^i(\mathcal{C}) = \mu^1_{X_{i-1}} \circ \cdots \circ \mu^1_{X_1} \circ \mu^1_X(\mathcal{C})$.

(3) より $(\mu^1)^n = \mu^n = \mathrm{id}$ が成立する. 特に $n=2$ の時, μ^1 は鏡映の類似と見なされ, また, $\mathcal{C}$ の Auslander-Reiten quiver $\mathfrak{A}(\mathcal{C})$ から, $\mu_X^1(\mathcal{C})$ の Auslander-Reiten quiver $\mathfrak{A}(\mu_X^1(\mathcal{C}))$ を求める事が可能である. それを次に説明する.

3.5 定義 (1) 整数係数歪対称行列 $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le l}$ に対して, 次の様にして quiver を対応させる. 頂点の集合を $\{1,2,\cdots,l\}$ とする. $a_{ij}>0$ ならば i から j へ a_{ij} 本の矢印を描く. $a_{ij}<0$ ならば j から i へ $-a_{ij}(=a_{ji})$ 本の矢印を描く.

この対応により整数係数歪対称行列と, ループと長さ 2 のサイクルを持たない quiver が一対一に対応する.

(2) 整数係数の歪対称行列 $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le l}$ と $k=1,2,\cdots,l$ から, 新しい行列 $\mu_k(A)=(b_{ij})_{1\le i,j\le l}$ を次のように定める.

$$b_{ij}:=\begin{cases} -a_{ij} & (i=k \text{ または } j=k) \\ a_{ij}+\frac{1}{2}(a_{ik}|a_{kj}|+|a_{ik}|a_{kj}) & (\text{else}) \end{cases}$$

この時, $\mu_k(A)$ も歪対称行列で $\mu_k\circ\mu_k(A)=A$ を満たす事が分かる. この操作 μ_k の事を *Fomin-Zelevinsky mutation* と呼ぶ [FZ1,2].

3.6 定理 $\underline{\mathrm{CM}}\Lambda$ が 2-Calabi-Yau であると仮定する. $\mathrm{CM}\,\Lambda$ の極大 1-直交部分圏 $\mathcal{C}$ に対し, $\mathrm{ind}\,\mathcal{C}=\{1,2,\cdots,l\}$ とし $X\in\mathrm{ind}\,\mathcal{C}$ と自然数 k が対応するとする. もし $\mathcal{C}$ と $\mu^1_X(\mathcal{C})$ がともにループと長さ 2 のサイクルを持たないならば, $\mathfrak{A}(\mu^1_X(\mathcal{C}))=\mu_k(\mathfrak{A}(\mathcal{C}))$ が成立する.

3.7 例 $G=\langle\sigma\rangle\subset\mathrm{SL}_3(k)$ ($\sigma=$diag$(\omega,\omega,\omega),\omega^3=1$) とする. この時, $S_i:=\{x\in S\mid\sigma(x)=\omega^iX\}$ $(i\in\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ と置くと, $S^G=S_0$ で, S^G-加群として $S\simeq S_0\oplus S_1\oplus S_2$ と分解する. 1.12 より $\mathrm{add}\,S$ は $\mathrm{CM}\,S^G$ の極大 1-直交部分圏であるが, その mutation を計算すると下図左のようになる. ただし, 部分圏 $\mathcal{C}$ を $\mathrm{ind}\,\mathcal{C}$ によって表しており, Ω と Ω^- は S^G-加群としての syzygy と cosyzygy である. mutation の定義より, 常に $\#\,\mathrm{ind}\,\mathcal{C}=3$ と $S_0\in\mathrm{ind}\,\mathcal{C}$ が成立する事に注意せよ.

$$\begin{array}{c}
\vdots \\
\{\Omega^{-2}S_1,\Omega^{-2}S_2,S_0\} \\
\downarrow^{\mu^1_{\Omega^{-2}S_1}}\quad\uparrow^{\mu^1_{\Omega^{-}S_1}} \\
\{\Omega^{-}S_1,\Omega^{-2}S_2,S_0\} \\
\downarrow^{\mu^1_{\Omega^{-2}S_2}}\quad\uparrow^{\mu^1_{\Omega^{-}S_2}} \\
\{\Omega^{-}S_1,\Omega^{-}S_2,S_0\} \\
\downarrow^{\mu^1_{\Omega^{-}S_1}}\quad\uparrow^{\mu^1_{S_1}} \\
\{S_1,\Omega^{-}S_2,S_0\} \\
\downarrow^{\mu^1_{\Omega^{-}S_2}}\quad\uparrow^{\mu^1_{S_2}} \\
\{S_1,S_2,S_0\} \\
\downarrow^{\mu^1_{S_1}}\quad\uparrow^{\mu^1_{\Omega S_1}} \\
\{\Omega S_1,S_2,S_0\} \\
\downarrow^{\mu^1_{S_2}}\quad\uparrow^{\mu^1_{\Omega S_2}} \\
\{\Omega S_1,\Omega S_2,S_0\} \\
\downarrow^{\mu^1_{\Omega S_1}}\quad\uparrow^{\mu^1_{\Omega^2 S_1}} \\
\{\Omega^2 S_1,\Omega S_2,S_0\} \\
\downarrow^{\mu^1_{\Omega S_2}}\quad\uparrow^{\mu^1_{\Omega^2 S_2}} \\
\{\Omega^2 S_1,\Omega^2 S_2,S_0\} \\
\vdots
\end{array}$$

$$\begin{tikzcd} \Omega^{-2}S_2 \arrow[d, "102"] & \\ S_0 \arrow[r, "39"] & \Omega^{-2}S_1 \arrow[ul, "3"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \Omega^{-}S_2 \arrow[d, "15"] & \\ S_0 \arrow[r, "6"] & \Omega^{-}S_1 \arrow[ul, "3"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Omega^{-2}S_2 \arrow[dr, "3"] & \\ S_0 \arrow[u, "15"] & \Omega^{-}S_1 \arrow[l, "39"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} S_2 \arrow[d, "3"] & \\ S_0 \arrow[r, "3"] & S_1 \arrow[ul, "3"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Omega^{-}S_2 \arrow[dr, "3"] & \\ S_0 \arrow[u, "3"] & S_1 \arrow[l, "6"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \Omega S_2 \arrow[d, "6"] & \\ S_0 \arrow[r, "15"] & \Omega S_1 \arrow[ul, "3"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S_2 \arrow[dr, "3"] & \\ S_0 \arrow[u, "6"] & \Omega S_1 \arrow[l, "3"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \Omega^2 S_2 \arrow[d, "39"] & \\ S_0 \arrow[r, "102"] & \Omega^2 S_1 \arrow[ul, "3"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Omega S_2 \arrow[dr, "3"] & \\ S_0 \arrow[u, "39"] & \Omega^2 S_1 \arrow[l, "15"'] \end{tikzcd}$$

また, 各極大 1-直交部分圏の Auslander-Reiten quiver を描いたものが下図右である. 例えば $\mathfrak{A}(\mathrm{add}\, S)$ は 1.12 より G の McKay quiver により与えられ, それは歪対称行列 $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ に対応する. この行列に μ_1 を施すと $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 3 & 0 & -6 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ となり, これが $\mathfrak{A}(\mathrm{add}\, \Omega S_1 \oplus S_2 \oplus S_0)$ を与える. この様にして全ての Auslander-Reiten quiver が計算される.

3.8 問題 興味深い問題が 2 つある.

(1) $\mathrm{CM}\,\Lambda$ の全ての極大 $(n-1)$-直交部分圏はループを持たないか？

(2)(transitivity) $\mathrm{CM}\,\Lambda$ の全ての極大 $(n-1)$-直交部分圏は, $\mathrm{add}\, S$ から始めて mutation の繰り返しによって得られるか？

これに関しては, 次の場合のみ分かっている.

3.9 定理 $\mathrm{CM}\, S^G$ の極大 1-直交部分圏は, 3.7 で挙げたものが全てである. 特に, 3.8(1)(2) はともに正しい.

4. d-Calabi-Yau 多元環上の傾斜複体

G を $\mathrm{SL}_d(k)$ の有限部分群とする時, 包含関係

$$\{\mathrm{CM}\, S^G \text{ の極大 } (d-2)\text{-直交部分圏}\} \overset{2.5}{\subseteq} \{S^G \text{ の非可換クレパント解消}\}$$
$$\overset{2.8}{\simeq} \{S*G \text{ の射影次元 1 以下の傾斜加群}\} \subseteq \{S*G \text{ の傾斜複体}\}$$

より, $S*G$ 上の傾斜複体を決定する事が一つの目標であるが, この章では現段階で分かっている事を簡潔に述べる.

4.1 T を (Γ,Γ')-加群の両側傾斜複体, T' を (Γ',Γ'')-加群の両側傾斜複体とする. この時, $T \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\Gamma'} T'$ は (Γ,Γ'')-加群の両側傾斜複体であり, また $T^{-1} := \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(T,R)$ は (Γ',Γ)-加群の両側傾斜複体で, $T \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\Gamma'} T^{-1} \simeq \Gamma$ と $T^{-1} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\Gamma} T \simeq \Gamma'$ を満たす.

これより, Γ と導来同値な多元環の森田同値類を対象とし, $\mathrm{Hom}(\Gamma',\Gamma'')$ は (Γ',Γ'')-加群の両側傾斜複体の同型類, 射の合成は $\overset{\mathbf{L}}{\otimes}$ とする圏を考える事ができる. この圏では全ての射は可逆であり, 特に群 $\mathrm{End}(\Gamma)$ は Γ の**導来 Picard 群**と呼ばれる [Ye]. 導来 Picard 群は, 導来圏 $D^b(\mathrm{mod}\,\Gamma)$ の自己同型群の部分群を成し, 近年盛んに研究されている [LM][MY][RZ].

$\Gamma = S*G$ の場合にこの圏の構造を決める事が一つの目標となるが, 以下, 圏の生成元の候補となる傾斜複体の構成に付いて述べる. 鍵となる事実は, $S*G$ が d-Calabi-Yau 多元環である事である.

4.2 定義 Γ を d-Calabi-Yau 多元環 (3.1) とし, 森田同値なものに取り替える事により basic, 即ち Γ の Jacobson 根基による商が斜体の直和であると仮定する.

この時, 左 Γ-加群 P で直既約射影的であるものを任意に選ぶと, P は直既約なので唯一つの極大部分加群 P' を持つ. $\Gamma \simeq P \oplus Q$ と直和分解して, 左 Γ-加群 $\mu_P^i(\Gamma)$ を

$$\mu_P^i(\Gamma) := \Omega^{i+1}(P/P') \oplus Q \quad (0 \le i < d)$$

と定める. この操作 μ_P^i を, 3.3 と同様に *mutation* と呼ぶ.

一方, $\mathrm{gl.dim}\,\Gamma = d$ なので P/P' は極小射影分解

$$0 \to P_d \to P_{d-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to P/P' \to 0$$

を持つが, Γ が d-Calabi-Yau である事より, $P_d \simeq P_0 = P$ である事が容易に分かる. P が **ループ**を持たないとは, $P \notin \mathrm{add} \bigoplus_{i=1}^{d-1} P_i$ が成立する事とする. 全ての直既約射影加群がループを持たない時, Γ もループを持たないという.

4.3 命題 P がループを持たなければ, $\mu_P^i(\Gamma)$ $(0 \le i < d)$ は射影次元 $d-i-1$ の傾斜 Γ-加群である. 特に $\mathrm{End}_\Gamma(\mu_P^i(\Gamma))$ も d-Calabi-Yau 多元環である.

4.4 注意 この mutation は, 以下の様にして 3 章で定めたものの一般化とみなされる.

Λ を d 次元対称整環とする. $\mathcal{C}$ を $\mathrm{CM}\,\Lambda$ の極大直交 $(d-2)$-部分圏とし, M を $\mathcal{C}$ の加法生成元とする. この時, $\Gamma := \mathrm{End}_\Lambda(M)$ は d-Calabi-Yau 多元環である事がわかる. 任意の非射影的な $X \in \mathrm{ind}\,\mathcal{C}$ に対し, $P := \mathrm{Hom}_\Lambda(M, X)$ は直既約射影 Γ-加群であり, 任意の i $(0 < i < d)$ に対して, $\mu_X^i(\mathcal{C})$ のある加法生成元 N は $\mu_P^i(\Gamma) = \mathrm{End}_\Lambda(N)$ を満たす.

また, Γ（正確には $\mathrm{add}\,\Gamma$）の Auslander-Reiten quiver も 1.11 と全く同様に定義されるが, $d = 3$ の場合, Γ と $\mu_P^1(\Gamma)$ の Auslander-Reiten quiver の変化に関して, 3.6 と同様の事柄が成立する.

4.5 $i = 0$ とした $\mu_P^0(\Gamma)$ は Γ の極大両側イデアルであり, P を変える事により全ての Γ の極大両側イデアルが現れる. これらに関して以下の興味深い事実が成立するが, これは McKay 対応 [KV] を介した, Seidel-Thomas の twist 関手 [ST] の持つ性質の言い換えでもある.

命題 G を $\mathrm{SL}_2(k)$ の有限部分群とし, $\Gamma := S * G$ の極大両側イデアルを $\mathfrak{m}_0, \cdots, \mathfrak{m}_n$ とすると, これらは G の既約表現と一対一に対応し, 以下の braid 関係式が成立する.

(i) $\mathfrak{m}_i$ と $\mathfrak{m}_j$ が G の McKay quiver で隣接していない場合, $\mathfrak{m}_i \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_\Gamma \mathfrak{m}_j \simeq \mathfrak{m}_j \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_\Gamma \mathfrak{m}_i$.

(ii) 隣接している場合, $G \not\simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ならば, $\mathfrak{m}_i \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_\Gamma \mathfrak{m}_j \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_\Gamma \mathfrak{m}_i \simeq \mathfrak{m}_j \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_\Gamma \mathfrak{m}_i \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_\Gamma \mathfrak{m}_j$.

石井-上原 [IU] において, A_n 型の 2 次元単純特異点の最小解消の導来圏の, Fourier-向井変換の成す自己同型群の生成系が決定されている. McKay 対応を介する事により, A_n 型の $S * G$ の導来 Picard 群の生成系として, $\mathfrak{m}_0, \cdots, \mathfrak{m}_n$ に $\mathrm{Aut}(S * G)$ や shift を施した全体が取れると思われるが, これを直接加群論的に示す事は興味深い.

4.6 一方, 射影次元 1 以下の傾斜加群をのみを考えると, 次のような結果を得る. ここで Γ-加群 M と N が加法同値であるとは, $\mathrm{add}\,M = \mathrm{add}\,N$ となる事とする.

定理 G を $\mathrm{SL}_2(k)$ の有限部分群とすると, 射影次元 1 以下の傾斜 $S * G$-加群の加法同値類と, G に対応するアフィン Weyl 群の間に一対一対応が存在する.

特に射影次元 1 以下の傾斜 $S * G$-加群は, 加法同値を除いて, 極大両側イデアルを適当に掛け合わせる事により得られる事が分かる. ここで「掛け合わせる」とはイデアルとしての積を取る事であり, 無駄の無い掛け合わせ方の場合は $\otimes_{S*G}$ や $\overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{S*G}$ とも一致する.

4.7 以下 $d = 3$ の場合を考察する. 3-Calabi-Yau 多元環 $\Gamma_0 := \Gamma$ に対し, 以下のように 4.3 を繰り返す事により, 射影次元 1 の傾斜 Γ-加群を構成する事ができる.

Γ_n まで構成された時, 左 Γ_n-加群 Γ_n の直既約直和因子 P_n を取り,

$$T_n := \mu_{P_n}^1(\Gamma_n), \quad \Gamma_{n+1} := \mathrm{End}_{\Gamma_n}(T_n)$$

と置く. これを繰り返して 3-Calabi-Yau 多元環 $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \cdots$ と傾斜 (Γ_n, Γ_{n+1})-加群 T_n を得る. この時,

$$(T_0 \otimes_{\Gamma_1} T_1 \otimes_{\Gamma_2} \cdots \otimes_{\Gamma_n} T_n)^{**}$$

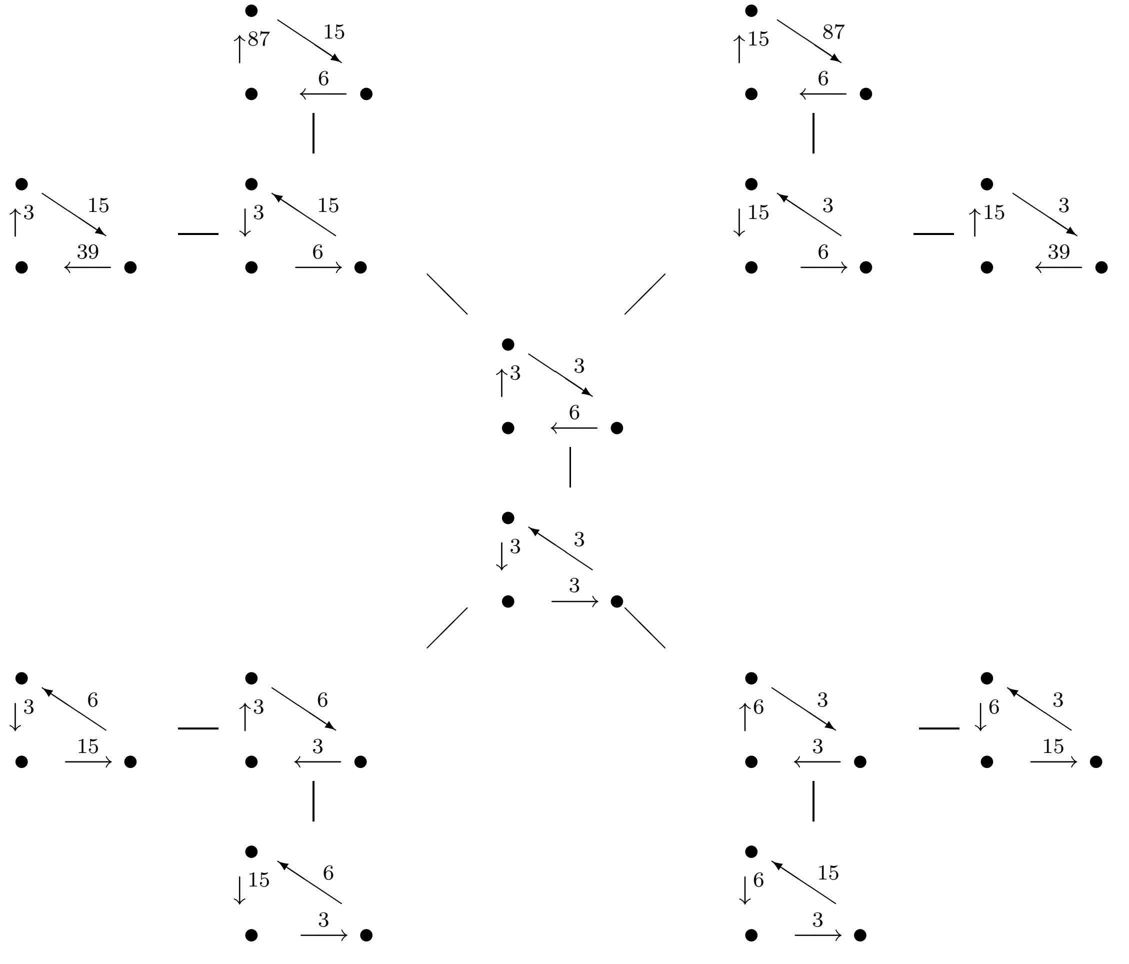
は射影次元 1 以下の傾斜 (Γ, Γ_{n+1})-加群である事が示される．また

$$T_0 \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\Gamma_1} T_1 \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\Gamma_2} \cdots \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\Gamma_n} T_n$$

は (Γ, Γ_{n+1})-加群の両側傾斜複体である．

これらで射影次元 1 以下の傾斜 Γ-加群及び Γ の傾斜複体が, 加法同値を除いて全て尽くされるか否かは, 興味深い問題と思われる．

4.8 例 $G = \langle \sigma \rangle \subset \mathrm{SL}_3(k)$ ($\sigma =$diag$(\omega, \omega, \omega), \omega^3 = 1$) とする．この時, $\Gamma := S * G$ に対して 4.7 を適用して得られる 3-Calabi-Yau 多元環の Auslander-Reiten quiver を, 4.4 により描いたものの一部が次図である．これは 3 分木 (Markov tree) であり, 2 つの quiver を結ぶ辺には 1 つの傾斜加群が対応している．矢印の本数に着目する事により, Markov 等式 $x^3 + y^3 + z^3 = xyz$ の全ての自然数解が現れている．3.7 の図は, 下図の中の一系列である．



この様な構造は [GR][B2] にも現れているもので, より一般の G に対してどの様な構造が現れるのかは非常に興味深い．Bridgeland [B3] により定義された三角圏の安定性条件の空間の構造と関係していると思われる．

References

[AV] M. Artin, J.-L. Verdier: Reflexive modules over rational double points. Math. Ann. 270 (1985), no. 1, 79–82.

[A1] M. Auslander: Representation dimension of Artin algebras. Lecture notes, Queen Mary College, London, 1971.

[A2] M. Auslander: Representation theory of Artin algebras. I, II. Comm. Algebra 1 (1974), 177–268; ibid. 1 (1974), 269–310.

[A3] M. Auslander: Rational singularities and almost split sequences. Trans. Amer. Math. Soc. 293 (1986), no. 2, 511–531.

[APR] M. Auslander, M. I. Platzeck, I. Reiten: Coxeter functors without diagrams. Trans. Amer. Math. Soc. 250 (1979), 1–46.

[AR1] M. Auslander, I. Reiten: Representation theory of Artin algebras. III, IV, V, VI. Comm. Algebra 3 (1975), 239–294; ibid. 5 (1977), no. 5, 443–518; ibid. 5 (1977), no. 5, 519–554; ibid. 6 (1978), no. 3, 257–300.

[AR2] M. Auslander, I. Reiten: Almost split sequences in dimension two. Adv. in Math. 66 (1987), no. 1, 88–118.

[ARS] M. Auslander, I. Reiten, S. O. Smalo: Representation theory of Artin algebras. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 36. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[B1] T. Bridgeland: Flops and derived categories. Invent. Math. 147 (2002), no. 3, 613–632.

[B2] T. Bridgeland: T-structures on some local Calabi-Yau varieties, preprint.

[B3] T. Bridgeland: Stability conditions on triangulated categories, preprint.

[BB] S. Brenner, M. C. R. Butler: Generalizations of the Bernstein-Gelfand-Ponomarev reflection functors. Representation theory, II (Proc. Second Internat. Conf., Carleton Univ., Ottawa, Ont., 1979), pp. 103–169, Lecture Notes in Math., 832, Springer, Berlin-New York, 1980.

[BGP] I. N. Bernstein, I. M. Gelfand, V. A. Ponomarev: Coxeter functors, and Gabriel's theorem. (Russian) Uspehi Mat. Nauk 28 (1973), no. 2(170), 19–33.

[BK] A. I. Bondal, M. M. Kapranov: Representable functors, Serre functors, and reconstructions. Math. USSR-Izv. 35 (1990), no. 3, 519–541.

[BKR] T. Bridgeland, A. King, M. Reid: The McKay correspondence as an equivalence of derived categories. J. Amer. Math. Soc. 14 (2001), no. 3, 535–554.

[BMRRT] A. Buan, R. Marsh, M. Reineke, I. Reiten, G. Todorov: Tilting theory and cluster combinatorics, preprint.

[BO] A. Bondal, D. Orlov: Semiorthogonal decomposition for algebraic varieties, preprint.

[CB] W. W. Crawley-Boevey: On tame algebras and bocses. Proc. London Math. Soc. (3) 56 (1988), no. 3, 451–483.

[CPS] E. Cline, B. Parshall, L. Scott: Derived categories and Morita theory. J. Algebra 104 (1986), no. 2, 397–409.

[FZ1] S. Fomin, A. Zelevinsky: Cluster algebras. I. Foundations. J. Amer. Math. Soc. 15 (2002), no. 2, 497–529.

[FZ2] S. Fomin, A. Zelevinsky: Cluster algebras. II. Finite type classification. Invent. Math. 154 (2003), no. 1, 63–121.

[GLS] C. Geiss, B. Leclerc, J. Shröer: Rigid modules over preprojective algebras, preprint.

[GN] S. Goto, K. Nishida: Minimal injective resolutions of Cohen-Macaulay isolated singularities. Arch. Math. (Basel) 73 (1999), no. 4, 249–255.

[GR] A. L. Gorodentsev, A. N. Rudakov: Exceptional vector bundles on projective spaces. Duke Math. J. 54 (1987), no. 1, 115–130.

[H] D. Happel: Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras. London Mathematical Society Lecture Note Series, 119. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[I1] O. Iyama: Higher dimensional Auslander-Reiten theory on maximal orthogonal subcategories, preprint.

[I2] O. Iyama: Higher dimensional Auslander correspondence, preprint.

[I3] O. Iyama: Maximal orthogonal subcategories of triangulated categories satisfying Serre duality, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach Report, no. 6 (2005), 353–355.

[IR] O. Iyama, I. Reiten: Fomin-Zelevinsky mutation and tilting modules over Calabi-Yau algebras, in preparation.

[IY] O. Iyama, Y. Yoshino, in preparation.

[IN] Y. Ito, I. Nakamura: Hilbert schemes and simple singularities. New trends in algebraic geometry (Warwick, 1996), 151–233, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 264, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.

[INj] Y. Ito, H. Nakajima: McKay correspondence and Hilbert schemes in dimension three. Topology 39 (2000), no. 6, 1155–1191.

[IU] A. Ishii, H. Uehara: Autoequivalences of derived categories on the minimal resolutions of A_n-singularities on surfaces.

[KV] M. Kapranov, E. Vasserot: Kleinian singularities, derived categories and Hall algebras. Math. Ann. 316 (2000), no. 3, 565–576.

[LM] H. Lenzing, H. Meltzer: The automorphism group of the derived category for a weighted projective line. Comm. Algebra 28 (2000), no. 4, 1685–1700.

[M] Y. Miyashita: Tilting modules of finite projective dimension. Math. Z. 193 (1986), no. 1, 113–146.

[MY] J. Miyachi, A. Yekutieli: Derived Picard groups of finite-dimensional hereditary algebras. Compositio Math. 129 (2001), no. 3, 341–368.

[R] J. Rickard: Morita theory for derived categories. J. London Math. Soc. (2) 39 (1989), no. 3, 436–456.

[RV] I. Reiten, M. Van den Bergh: Noetherian hereditary abelian categories satisfying Serre duality. J. Amer. Math. Soc. 15 (2002), no. 2, 295–366.

[RZ] R. Rouquier, A. Zimmermann: Picard groups for derived module categories. Proc. London Math. Soc. (3) 87 (2003), no. 1, 197–225.

[ST] P. Seidel, R. Thomas: Braid group actions on derived categories of coherent sheaves. Duke Math. J. 108 (2001), no. 1, 37–108.

[V1] M. Van den Bergh: Three-dimensional flops and noncommutative rings. Duke Math. J. 122 (2004), no. 3, 423–455.

[V2] M. Van den Bergh: Non-commutative crepant resolutions. The legacy of Niels Henrik Abel, 749–770, Springer, Berlin, 2004.

[Y1] Y. Yoshino: Cohen-Macaulay modules over Cohen-Macaulay rings. London Mathematical Society Lecture Note Series, 146. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[Y2] Y. Yoshino: Rigid Cohen-Macaulay modules over a three dimensional Gorenstein ring, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach Report, no. 6 (2005), 345–347.

[Ye] A. Yekutieli: Dualizing complexes, Morita equivalence and the derived Picard group of a ring. J. London Math. Soc. (2) 60 (1999), no. 3, 723–746.

Graduate school of Mathematics, Nagoya University,
Chikusa-ku, Nagoya, 464-8602, Japan
iyama@math.nagoya-u.ac.jp