モチビックコホモロジーと ζ ー関数の特殊値

THOMAS GEISSER*

1. ζ-関数

q を素数 p のべきとして, X を有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の代数多様体とすると、X の $\mathbb{F}_q$ 有理点の数 $|X(\mathbb{F}_q^r)|$ が重要である。同時に $\mathbb{F}_{q^r}$-係数を数えて,

$$n_r = |X(\mathbb{F}_{q^r})|$$

とおく。

例えば、X が環 $\mathbb{F}_q[T_1, \cdots, T_n]/(f_1, \cdots, f_m)$ に対応する多様体であれば、X の $\mathbb{F}_{q^r}$ 有理点は、多項式 $f_1, \cdots, f_m$ を満たす値 $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{F}_{q^r}$ である。従って、

$$X(\mathbb{F}_{q^r}) = Hom_{\text{環}}(A, \mathbb{F}_{q^r}).$$

$\mathbb{F}_{q^r}$ は $\mathbb{F}_q$ 上 r 個の自己同型を持つので、同じ解を r 回繰り返して数えないように $\frac{n_r}{r}$ の情報をまとめて、

$$Z(X, T) = \exp(\sum_r \frac{n_r}{r} T^r)$$

と定義する。さらに変数の変換をして、

$$\zeta(X, s) = Z(X, q^{-s})$$

とおく。こうした ζ-関数は任意の n_r についての情報を持っている。X の閉点 x は A の極大イデアル M_x に対応して、ひとつの $\mathbb{F}_{q^r}$ 有理点は $A \to A/\mathcal{M}_x \to \mathbb{F}_{q^r}$ に対応する。x に対応する剰余体を $k(x) = A/M_x = \mathbb{F}_{q^a}$ とおけば、その数は a（$a|r$ のとき）か 0（$a \not| r$ のとき) である。つまり、x が ζ 関数に貢献する部分は

$$\begin{aligned} &\frac{a}{a} q^{-as} + \frac{a}{2a} q^{-2as} + \frac{a}{3a} q^{-3as} + \dots \\ &\qquad\qquad = -\log(1 - q^{-as}) = -\log(1 - |k(x)|^{-s}) \end{aligned}$$

を得る。収束の問題を除けば、x が X の閉点を走ると、

$$\zeta(X, s) = \exp(\sum_{x \in X_{(0)}} -\log(1 - |k(x)|^{-s})) = \prod_{x \in X_{(0)}} \frac{1}{1 - |k(x)|^{-s}}$$

という ζ-関数の euler 積を得る。但し $X_{(0)}$ は X の閉点で, $k(x)$ は閉点 x における剰余体である。それは X の各点ごとに定まっているので、ζ-関数は局所的な不変量と考えられる。

---

* Supported by NSF Grant No. 0070850.

上の公式は任意の $\mathbb{Z}$-係数の多様体に一般化される。たとえば、X が代数体 K の整数環 $\mathcal{O}_K$ のとき、$\mathcal{O}_K$ の素イデアル p の全体は $\mathcal{O}_K$ の閉点で, $\mathcal{O}_K$ の ζ 関数は Dirichlet-ζ 関数になる

$$\zeta_K(s) = \prod_p \frac{1}{1-|k(p)|^{-s}}。$$

例: 1) $X = \operatorname{Spec}\mathbb{F}_{q^a}$ のとき、$\mathbb{F}_{q^a}$ の $\mathbb{F}_{q^r}$ 有理点は $\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}_{q^a}, \mathbb{F}_{q^r})$ だから、

$$n_r = \begin{cases} a & a|r \\ 0 & a \not| r \end{cases}$$

で、

$$\zeta(\mathbb{F}_{q^a}, s) = \frac{1}{1-q^{-as}}$$

である。

2) X は直線 $\mathbb{A}^1$ のとき, $n_r = q^r$ で、

$$\zeta(\mathbb{A}^1, s) = \frac{1}{1-q^{1-s}}$$

である。

3) X は射影直線 $\mathbb{P}^1$ のとき、$n_r = q^r + 1$ で、

$$\zeta(\mathbb{P}^1, s) = \frac{1}{(1-q^{-s})(1-qq^{-s})}$$

である。

X が滑らかで次元は d で, 且つ X が射影的ならば, weil-予想・deligne-定理によると

$$Z(X,T) = \frac{P_1(T)\cdots P_{2d-1}(T)}{P_0(T)\cdots P_{2d}(T)}。$$

但し $P_i(T) \in \mathbb{Q}[T]$ は多項式で, $P_i(T)$ の根は代数的整数で、絶対値は $q^{-\frac{i}{2}}$ である。(Riemann-仮説の類似) これを証明するために, Grothendieck は etale-コホモロジーを導入した。実際に

$$P_i(T) = \det(1-FT|H^i(\bar{X}, \mathbb{Q}_l))$$

が成り立つ。ここで, $\bar{X} = X \times_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q$ は X の $\bar{\mathbb{F}}_q$ への係数拡大で, F は frobenius-置換である。etale-コホモロジーはトポロジーの singular ーコホモロジーの類似である。しかし etale-コホモロジーは torsion-係数をとらないと有限生成ではない。だから, l-進と呼ばれるコホモロジー群をつぎのように定義して、

$$H^i(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}_l) = \lim H^i(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/l^r),$$

$$H^i(X_{\text{ét}}, \mathbb{Q}_l) = \lim H^i(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}_l) \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l$$

で定義する。これは有限生成な $\mathbb{Q}_l$-線形空間である。

例：E が楕円曲線のとき、α, β が存在して、

$$\zeta(E,s) = \frac{(1-\alpha q^{-s})(1-\beta q^{-s})}{(1-q^{-s})(1-qq^{-s})}$$

で、上の公式の係数を比べて、

$$E(\mathbb{F}_{q^r}) = q^r + 1 - \alpha^r - \beta^r$$

を得る。楕円曲線の場合、$|\alpha| = |\beta| = \sqrt(q)$ のため、$||E(\mathbb{F}_{q^r})| - q^r - 1| \leq 2\sqrt{q^r}$ を得る。それは上の定理の具体的な応用である。

2. ζ-関数の特殊値:滑らかで射影的の場合

Dirichlet-ζ-関数の 1 における特殊値は類数公式で表される。K の類数を h、K の regulator を R、K 内の 1 のべき根の個数を w、K の実素点の個数を r_1、複素点の個数を r_2 とおく。s が 1 に近づけば、

$$\zeta_K(s) \sim (1-s)^{-1} \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2} hR}{w\sqrt{|d|}}$$

s が 0 に近づけば、

$$\zeta_K(s) \sim s^{1-r_1-r_2} \frac{-hR}{w}.$$

$\zeta(X,n)$ も X の解析に役に立つ。$\zeta(X,n)$ をコホモロジー群で表すことは local-to-global と考えられる。それは ζ-関数が局所的に定義されて、コホモロジー群が大域的に定義されているからである。$\zeta(X,n)$ というのは：

- $ord_{s=n}\zeta(X,s)$
- leading taylor 係数。

X が滑らかで射影的ならば [7, Thm. 0.4],

$$\zeta(X,0) \text{ が } H^*(X_{\text{ét}},\mathbb{Z}) \text{ で表される。}$$
$$\zeta(X,1) \text{ が } H^*(X_{\text{ét}},\mathbb{G}_m) \text{ で表される。}$$

但し, $\mathbb{G}_m$ は $U \mapsto \Gamma(U,\mathcal{O})^\times$ (大域切断の乗法群) からなっている層である。$n > 1$ の時, このような公式はなかなか見つからなかった。lichtenbaum は層ではなくて、層の複体が必要だと悟った。

予想 2.1. 複体 $\mathbb{Z}(n)$ が存在して、$\zeta(X,s)$ は $H^*(X_{\text{ét}},\mathbb{Z}(n))$ で表される。

$\mathbb{Z}(n)$ の構成は次の二つがある：

- Bloch の高次 chow 群 [1]
- Voevodsky のモチビック-複体 [9]

どちらも上に有界な複体である。

定理 2.2. *(Suslin* [8]*, Voevodsky* [10]*)* X が滑らかならば、*Bloch* と *Voevodsky* の構成は一致する。

実は、Bloch の複体のコホモロジーは borel-moore ホモロジーで、voevodsky の複体のコホモロジーはコホモロジーで、一致することは poincare-双対性の類似と見做せる。

定理 2.3. [9]

$$\mathbb{Z}(0) \cong \mathbb{Z}$$
$$\mathbb{Z}(1) \cong \mathbb{G}_m[-1]。$$

torsion 係数の普通の etale コホモロジーはモチビック複体で表される：

定理 2.4. *(Geisser-Levine* [4], *Suslin-Voevodsky*[9]*)*

$$\mathbb{Z}/m(n) \cong \mu_m^{\otimes n} \quad p \nmid m \text{ のとき}$$
$$\mathbb{Z}/p(n) \cong \nu^n$$

但し、μ_m は 1 の m 乗根になっている層：

$$\mu_m(U) = {}_m\Gamma(U, \mathcal{O})^\times$$

$\nu^n \subseteq \Omega^n$ は $\frac{dx_1}{x_1} \wedge \ldots \wedge \frac{dx_n}{x_n}$ で生成されている部分層である。

予想 2.5. *(Lichtenbaum)* X を滑らかで射影的とする。そのとき、

$$H^i(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}(n)) = \begin{cases} \text{有限} & i \neq 2n, 2n+2; \\ \text{有限生成} & i = 2n; \\ \text{余有限生成} & i = 2n+2 \end{cases}$$

且つ、$\zeta(X, n)$ が $H^i(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}(n))$ で表れる。

余有限生成というのは, $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^r \oplus$ 有限群 で表される群である。余有限生成な群が貢献するから、この公式は少し書きにくいので、ここは飛ばす。後で、etale ーコホモロジーを改善してから公式を与える。

上の予想は非常に深い予想である。例えば、$n = 1$ のとき、$H^3(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}(1))$ は brauer-群と同型で、その有限生成性は余次元 1 の tate-予想と同値である。

3. ζ-関数の特殊値: 任意の X

X が滑らかでないとき、$\mathbb{Z}(n)$ の etale-コホモロジーはいい性質を持っていない。Voevodsky の idea を生かして、etale-位相より細かい etale-h-位相を定義する。etale 被覆に加えて, abstract blow-up という次のような被覆も認める

$$\begin{array}{ccc} Z' & \longrightarrow & X' \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z & \longrightarrow & X\text{。} \end{array}$$

$X' \to X$ は射影的で、$Z \to X$ は閉部分多様体の埋め込みで、$X' - Z' \cong X - Z$ のとき、$X' \coprod Z \to X$ は被覆である。

これから話を簡単にするために特異点の解消の存在を仮定する。（X の次元が 3 以下としてもよい）。X が滑らかならば、etale-h-コホモロジーは etale-コホモロジーと同型である。任意の X に対して、constructible-係数の場合も同型である。

X が射影的でないときは、コンパクト台-コホモロジーが必要である。X のコンパクト化 T を一つ選んで、$i : T - X \to X$ をその閉補集合として、

$$H_c^i(X_{\text{eh}}, \mathbb{Z}(n)) = \mathbb{Z}(n)_T \to i_*\mathbb{Z}(n)_{T-X} \text{ の写像錐の etale-h-コホモロジー}$$

とする。それは T の選び方に矛盾なく定まる。(etale-コホモロジーの場合それは成り立たない。)

4. Weil-コホモロジー

上に述べたコンパクト台-etale-h-コホモロジー群で, $\zeta(X,n)$ が表されるが、有限生成でないことで、その公式は複雑である。

2000 年に lichtenabaum は Galois-群が Weil-群に置き換えると, コホモロジー群は有限生成になると悟った。(galois-群 $Gal(\bar{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ は $\mathbb{Z}$ の副有限完備化

$$Gal(\bar{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q) = \hat{\mathbb{Z}} = \lim \mathbb{Z}/m$$

で, weil-群 G は frobenius-置換で生成される galois-群 $Gal(\bar{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ の部分群; $G \cong \mathbb{Z}$)。

重要な例：$X = \mathbb{F}_q$ として, $n = 0$ とする。そのとき、$\mathbb{Z}$ は離散的で, $\hat{\mathbb{Z}}$ はコンパクトなので

$$\begin{aligned} H^1((\mathbb{F}_q)_{\text{ét}}, \mathbb{Z}) &= H^1(Gal(\bar{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q), \mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}_{\text{連続}}(\hat{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}) = 0 \\ H^2((\mathbb{F}_q)_{\text{ét}}, \mathbb{Z}) &= H^1(Gal(\bar{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}_{\text{連続}}(\hat{\mathbb{Z}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \end{aligned}$$

が,

$$\begin{aligned} H^1(G, \mathbb{Z}) &= \mathrm{Hom}_{\text{連続}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \\ H^2(G, \mathbb{Z}) &= 0 \end{aligned}$$

となる。それを生かして、

$$H^i_c(X_{\text{ar}}, \mathcal{F})$$

を $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(\bar{X}_{\text{eh}}, \mathcal{F})^G$ の導来関手として定義する。$\mathbb{Z}$ のコホモロジー次元は 1 だから, Hochschild-Serre 系列は退化して、次の形をとる：

$$0 \to H^{i-1}_c(\bar{X}_{\text{eh}}, \mathbb{Z}(n))_G \to H^i_c(X_{\text{ar}}, \mathbb{Z}(n)) \to H^i_c(\bar{X}_{\text{eh}}, \mathbb{Z}(n))^G \to 0 \tag{1}$$

但し、$A^G = H^0(G, A)$ は A の Frobenius-置換で不変な部分群で、A_G は $H^1(G, A)$ の Frobenius-置換で余不変な部分群である。Arithmetic-コホモロジーと etale-h-コホモロジーの関係は次の定理で分かる。

定理 4.1. *(Geisser* [2]*)* 次の長完全列が存在する。

$$\to H^i_c(X_{\text{eh}}, \mathbb{Z}(n)) \to H^i_c(X_{\text{ar}}, \mathbb{Z}(n)) \to H^{i-1}_c(X_{\text{eh}}, \mathbb{Q}(n)) \to H^{i+1}_c(X_{\text{eh}}, \mathbb{Z}(n)) \to$$

例：$X = \mathbb{F}_q$, $n = 0$, $i = 1$ のとき

$$\begin{array}{ccccccc} H^1_c((\mathbb{F}_q)_{\text{eh}}, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^1_c((\mathbb{F}_q)_{\text{ar}}, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^0_c((F_q)_{\text{eh}}, \mathbb{Q}) & \longrightarrow & H^2_c((\mathbb{F}_q)_{\text{eh}}, \mathbb{Z}) \\ \| & & \| & & \| & & \| \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \end{array}$$

になる。こういう風に $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}$ になって、有限生成な群が得られる。

5. $\zeta(X,n)$ を表す公式

$e \in H^1_c((\mathbb{F}_q)_{\mathrm{ar}},\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ の生成元をひとつ選ぶ。$e^2 \in H^2_c((\mathbb{F}_q)_{\mathrm{ar}},\mathbb{Z}) = 0$ によって、複体

$$\cdots \to H^{i-1}_c(X_{\mathrm{ar}},\mathbb{Z}(n)) \xrightarrow{\cup e} H^i_c(X_{\mathrm{ar}},\mathbb{Z}(n)) \xrightarrow{\cup e} H^{i+1}_c(X_{\mathrm{ar}},\mathbb{Z}(n)) \to \cdots$$

を得る。この複体の Euler-標数を $\chi_{\mathrm{ar}}(n)$ と定義する。(ある複体 $C^\cdot$ の Euler-標数は $\prod_i |H^i(C^\cdot)|^{(-1)^i}$, $C^\cdot$ のコホモロジーの位数の交代積で定義する。)

例：X を滑らかで射影的とすると、$i \neq 2n, 2n+1$ のとき $H^i_c(X_{\mathrm{eh}},\mathbb{Z}(n))$ はと予想されている。したがって、Euler 標数は $H^i_c(X_{\mathrm{ar}},\mathbb{Z}(n))$ の位数と

$$H^{2n}_c(X_{\mathrm{ar}},\mathbb{Z}(n)) \xrightarrow{\cup e} H^{2n+1}_c(X_{\mathrm{ar}},\mathbb{Z}(n))$$

の余核からなっている。その余核を regulator と見做せる。

予想 5.1. *(Lichtenbaum, Geisser)* 任意の $\mathbb{F}_q$ 上の分離的で有限生成なスキーム X に対して, 次のことが成り立つ。

- $H^i_c(X_{\mathrm{ar}},\mathbb{Z}(n))$ は有限生成。
- $l \neq p$ ならば, *arithmetic* コホモロジーは l-進コホモロジーの整構造である
$$H^i_c(X_{\mathrm{ar}},\mathbb{Z}(n)) \otimes \mathbb{Z}_l \cong H^i_c(X_{\text{ét}},\mathbb{Z}_l(n))。$$
- $$\mathrm{ord}_{s=n}\,\zeta(X,s) = \sum_i (-1)^i i \cdot \mathrm{rank}\, H^i_c(X_{\mathrm{ar}},\mathbb{Z}(n)) = \rho_n$$
- ζ-特殊値：p-巾を除けば, s が n に近づくとき,
$$\zeta(X,s) \sim (1-q^{n-s})^{-\rho_n} \cdot \chi_{\mathrm{ar}}(n).$$

p 巾についても精密な公式が存在するが、簡単にするためにそれを略す。

定理 5.2. *1) Tate* と *Beilinson* の予想を仮定する。つまり、
a) 任意の $\mathbb{F}_q$ 上の射影的で滑らかなスキーム X に対して, *cycle* 射は全単射.

$$CH^n(X) \otimes \mathbb{Q}_l \to H^n(X_{\text{ét}},\mathbb{Q}_l(n)).$$

b) $\mathbb{F}_q$ 上で, $CH^n(X)$ の数値的自明な部分群は *torsion*。
そのとき, 予想 *5.1* が成り立つ。
2) $n=0$ の場合、予想 *5.1* が任意の多様体 X に対して成り立つ。
3) X が曲線ならば, 　予想 *5.1* が任意の n に対して成り立つ。

例：$X = \mathbb{F}_{q^a}$, $n=0$ のとき、(1) によって、

$$H^0(\mathbb{F}_{q^a,\mathrm{ar}},\mathbb{Z}(0)) \cong H^0(\bar{\mathbb{F}}_{q^a},\mathbb{Z})^G = (\mathbb{Z}^a)^G \cong \mathbb{Z}$$
$$H^1(\mathbb{F}_{q^a,\mathrm{ar}},\mathbb{Z}(0)) \cong H^0(\bar{\mathbb{F}}_{q^a},\mathbb{Z})_G = (\mathbb{Z}^a)_G \cong \mathbb{Z}$$

e との cup 積は恒等写像に誘導される写像

$$(\mathbb{Z})^G \to (\mathbb{Z})_G。$$

左辺の生成元は $(1,\dots,1)$ で、右辺の生成元は $(1,0,\dots,0)$ の同値類なので、e との cup 積は a 倍写像と一致する。従って, $\chi_0=\frac{1}{a}$ で, $\rho_0=+0\times 1-1\times 1=-1$ になる。ζ-関数の公式は、s が 0 に近づくとき

$$\zeta(X,s)=\frac{1}{1-q^{-as}}\sim(1-q^{-s})^{-1}\frac{1}{a}$$

の形をとる。

例: E を $\mathbb{F}_q$ 上の楕円曲線とすると、

$$H^i(E_{\mathrm{ar}},\mathbb{Z}(1))=\begin{cases}0 & i=0\\ \mathbb{F}_q^\times=\mathbb{Z}/q-1 & i=1\\ Pic(E)=\mathbb{Z}\oplus E(\mathbb{F}_q) & i=2\\ \mathbb{Z} & i=3.\end{cases}$$

と計算できる。e との cup 積は因子 $\mathbb{Z}$ で同型なので、$\chi_{\mathrm{ar}}(1)=\frac{|E(\mathbb{F}_q)|}{q-1}$ で、$s=1$ における ζ-関数の位数は $\rho_1=-1\times 2+2\times 3=-1$ である。公式によると s が 1 に近づけば、

$$\begin{aligned}\zeta(X,s)&=\frac{(1-\alpha q^{-1})(1-\beta q^{-1})}{(1-q^{-1})(1-q^{1-s})}\\ &=(1-q^{1-s})^{-1}\frac{q+1-(\alpha+\beta)}{q-1}=(1-q^{1-s})^{-1}\chi_{\mathrm{ar}}(n)。\end{aligned}$$

実際に、$\alpha\beta=q$ で、$\alpha+\beta=q+1-|E(\mathbb{F}_q)|$。

References

[1] S.Bloch, Algebraic Cycles and Higher K-theory, Adv. in Math. **61** (1986), 267-304.

[2] T.Geisser, Weil-etale cohomology over finite fields. Math. Ann. 330 (2004), no. 4, 665–692.

[3] T.Geisser, Arithmetic cohomology and special values of ζ-functions. To appear in Duke J. M.

[4] T.Geisser, M.Levine, The p-part of K-theory of fields in characteristic p. Inv. Math. **139** (2000), 459–494.

[5] S. Lichtenbaum, Values of zeta-functions at non-negative integers, in: Number Theory, LN 1068 (1984), 127-138

[6] S.Lichtenbaum, The Weil-etale topology on schemes over finite fields. Compos. Math. 141 (2005), no. 3, 689–702.

[7] J.S.Milne, Values of zeta functions of varieties over finite fields. Amer. J. Math. **108** (1986), no. 2, 297–360.

[8] A.Suslin, Higher Chow groups and etale cohomology. Cycles, transfers, and motivic homology theories, 239–254, Ann. of Math. Stud., 143, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000.

[9] A.Suslin, V.Voevodsky, Bloch-Kato conjecture and motivic cohomology with finite coefficients. The arithmetic and geometry of algebraic cycles (Banff, AB, 1998), 117–189, NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci., 548, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.

[10] V.Voevodsky, Motivic cohomology groups are isomorphic to higher Chow groups in any characteristic. Int. Math. Res. Not. 2002, no. 7, 351–355.

University of Southern California, Department of Mathematics, DRB, 1042 W. 36th Place, Los Angeles, CA 90089