RINGEL-HALL ALGEBRAについて

大阪市立大学大学院理学研究科　浅芝 秀人

1. 問題

一般 Cartan 行列 C（簡単のため既約と仮定しておく．第2節参照）は，C に付随する Kac-Moody Lie 代数 $\mathfrak{g}$（第3節参照）の構造を決定し，型が C である（第4節参照），遺伝 Artin 環 A は，C によってその構造をかなり限定される．C と $\mathfrak{g}$ および，C と A とは，次の表に示すように互いに深い関係をもっている．

$\mathfrak{g}$	C	A
対称化可能	対称化可能	体上有限次元多元環（Artin 多元環）
対称	対称	クイバー多元環
単純	Dynkin $(A_n, \dots, G_2)$	有限表現型
affine	affine	tame

従って，C を通じて $\mathfrak{g}$ と A とは関係し合っているが，直接にどのような関係をもっているのかが問題になる．まず最初に，Gabriel によって，C が Dynkin 型である場合に，$\mathfrak{g}$ の正ルートの全体 Φ^+ と A 上の直既約加群の次元ベクトルの全体とが1対1に対応する，ということが発見された（第5節参照）．その後 Ringel は，Hall が可換 p 群の同型類全体を用いて構成した環の定義を（Macdonald [19] 参照），可換 p 群の代わりに有限体上の有限次元多元環の上の有限次元加群を用いたものへ自然に拡張して，今日 Ringel-Hall algebra とよばれるものを定義し，(第6節参照），これ用いることによって，$\mathfrak{g}$ と A との間のより緊密な結びつきを見いだした．すなわち，$\mathfrak{g}$ の正部分 $\mathfrak{n}_+$ を（あるいはもっと強く $\mathfrak{n}_+$ の量子展開環を）A 上の直既約加群の同型類全体を用いて再現して見せたのであった（第7節参照）．Ringel-Hall algebra を用いた $\mathfrak{g}$ と A との結びつきの研究は，近年 Peng-Xiao, Green, Xiao およびその他の人々によってさらに発展させられ，C に対応する量子群（$\mathfrak{g}$ の量子展開環）を多元環の表現論を用いて研究する道を開いた（第8節参照）．Ringel-Hall algebra の研究は，Bauman-Kassel [3], Schiffmann [27], Lin-Peng [18], Deng-Xiao [5, 6], Frenkel-Malkin-Vybornov [9] などの最近の仕事によってますますその重要性を増してきているが，日本ではこれについての解説はこれまでほとんど行われてきていないように思われる．本稿では，この Ringel-Hall algebra を用いる上述の研究の流れを，$U_q(\mathfrak{n}_+)$ の実現を中心にして概説する．

2. 準備

本稿を通して，k は体とし，k 上有限次元の結合代数を単に多元環とよぶ．多元環 A にたいして，$\operatorname{mod} A$ で k 上有限次元の（右）A-加群全体のなす圏を表し，直既約加群のなす $\operatorname{mod} A$ の充満部分圏を $\operatorname{ind} A$ で表す．各 $X \in \operatorname{mod} A$ に対して，X の同型類を $[X]$ で表し，$[\operatorname{mod} A] := \{[X] | X \in \operatorname{mod} A\} = \operatorname{mod} A/\cong$, $[\operatorname{ind} A] := \{[X] | X \in \operatorname{ind} A\} = \operatorname{ind} A/\cong$ とおく．以下，n を正整数とし，$I := \{1, 2, \dots, n\}$ とおき，C を I

上の**一般 Cartan 行列**とする．すなわち，$C = (a_{ij})_{i,j\in I}$ は $\mathbb{Z}$ 上の正方行列で，3 つの条件 (i) $\forall i \in I, a_{ii} = 2$; (ii) $\forall i(\neq)j \in I, a_{ij} \leq 0$; (iii) $\forall i,j \in I, a_{ij} = 0 \iff a_{ji} = 0$ を満たすものとする．また，Γ を C に対応する valued graph とする．すなわち，頂点集合を I とし，$i(\neq)j \in I$ が辺で結ばれている条件を $a_{ij} \neq 0$ で与え，i, j を結ぶ辺の上に value $(-a_{ij}, -a_{ji})$ を与えることによって定義される valued graph であるとする．C は Γ によって完全に定まる．C が**既約**であるとは，この Γ が graph として連結であることである．以後，簡単のために C は，既約であると仮定する．さらに，C が**対称化可能**であるとは $\exists(d_i)_{i\in I} \in \mathbb{Z}^I, \forall i,j \in I, d_i a_{ij} = d_j a_{ji}$ が成り立つことである．以下，C は対称化可能であると仮定する．

3. Kac-Moody Lie 代数

この節では，$\mathfrak{g}$ の定義を復習する（詳しくは Kac [16] 等の教科書参照）．話全体の都合上，$\mathbb{C}$ 上ではなく $\mathbb{Q}$ 上で考えることにする．

定義 3.1. $\mathfrak{g}$ は次の生成元と関係式で定義される $\mathbb{Q}$ 上の（あるいは普通は $\mathbb{C}$ 上の）Lie 代数である：

生成元：e_i, h_i, f_i $(i \in I)$.

関係式：$\forall i,j \in I$ に対して，$[h_i, h_j] = 0, [h_i, e_j] = a_{ij}e_j, [h_i, f_j] = -a_{ij}f_j, [e_i, f_j] = \delta_{ij}h_i$; および，(**Serre の関係式**：) $i \neq j$ ならば $(\operatorname{ad} e_i)^{1-a_{ij}}e_j = 0, (\operatorname{ad} f_i)^{1-a_{ij}}f_j = 0$.

ただし，δ_{ij} は Kronecker のデルタ，$\forall x, y \in \mathfrak{g}, (\operatorname{ad} x)y := [x, y]$ である．

注意 3.2. Kac の本で定義されている Kac-Moody Lie 代数を $\mathfrak{g}'$ とおくと，$\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}', \mathfrak{g}']$ となっている．これら 2 つは同じ表現論を持つので，ここでは簡単のため上の定義を採用する．

ここで，$\mathbb{Z}^I = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}\alpha_i$, $\forall i,j \in I, \alpha_i : I \to \mathbb{Z}, \alpha_i(j) := \delta_{ij}$ とおいて，$\forall i \in I, \deg(e_i) := \alpha_i, \deg(h_i) := 0, \deg(f_i) := -\alpha_i$ によって，$\mathfrak{g}$ の生成元の次数を定めると，$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha\in\mathbb{Z}^I} \mathfrak{g}_\alpha$ は $\mathbb{Z}^I$-graded となる．

定義 3.3. $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$ となる $\alpha \in \mathbb{Z}^I \setminus \{0\}$ を $\mathfrak{g}$ の**ルート**，その全体 Φ を $\mathfrak{g}$ の**ルート系**とよぶ．$\mathfrak{g}$ のルートのうち，その成分がすべて非負であるものを**正ルート**とよび，その全体を Φ^+ とおくと，Φ は，Φ^+ と $\Phi^- := -\Phi^+$ との disjoint union となっている．$\mathfrak{n}_+ := \bigoplus_{\alpha\in\Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha$ を $\mathfrak{g}$ の**正部分**とよぶ．これは $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数であり，生成元 e_i $(i \in I)$ と Serre の関係式で定義される．

$\mathfrak{g}, \mathfrak{n}^+$ の展開環をそれぞれ $U(\mathfrak{g}), U(\mathfrak{n}^+)$ とおく．また，それらの量子展開環をそれぞれ $U_q(\mathfrak{g}), U_q(\mathfrak{n}^+)$ とおく．後者の 2 つはここでは，$v^2 = q$ となる変数 v の 1 変数有理式体 $\mathbb{Q}(v)$ 上の結合代数と考える（詳しくは第 8 節参照）．

4. 遺伝多元環

この節では，C と A の関係を復習する（詳しくは，Gabriel [11], Dlab-Ringel [7, 8] 等参照）．

定義 4.1. A を**遺伝的**多元環すなわち，大域次元が 1 以下の多元環，J をその Jacobson 根基をとし，$A \ni 1 = e_1 + \cdots + e_m$ を A の単位元の直交原始冪等元の和への分解とする．このとき斜体 $F_i := e_iAe_i/e_iJe_i$ と (F_j, F_i)-両側加群 ${}_jM_i := e_jJe_i/e_jJ^2e_i$ $(i, j =$

$1, 2, \dots, m)$ の組 $\mathcal{S}(A) := (F_i, {}_jM_i)_{i,j\in I}$ を，A の **species** とよぶ．これは，個々の成分の順序と同型を除いて，上でとった A の単位元の分解の仕方によらすに決まる．次に，

$$c_{ij} := \begin{cases} 2 & (i = j); \\ -(\dim_{F_j} {}_jM_i + \dim {}_iM_{j_{F_j}}) & (i \neq j) \end{cases}$$

によって行列 $C(A) = (c_{ij})$ を定義する．これを A の**型**という．また，$C(A)$ に対応する valued graph を $\Gamma(A)$ とし，$\Gamma(A)$ の各辺 $i—j$ を矢 $i \to j$ に取り替える条件を ${}_jM_i \neq 0$ とすることによって，$\Gamma(A)$ の**向きづけ** $\Omega(A)$ を定義する．このようにして決まる，(valued) クイバー $Q(A) := (\Gamma(A), \Omega(A))$ を species $\mathcal{S}(A)$ の**型**あるいは A の**クイバー**という．以上により，A から型 $Q(A)$ を持つ species$\mathcal{S}(A)$ が定まった．

注意 4.2. (1) 上において，A が有限次元遺伝的であることから，${}_jM_i \neq 0$ と ${}_iM_j \neq 0$ は同時には起こらないことに注意しておく．したがって，c_{ij} の定義式の 2 行目の和において，実際には少なくとも一方の項は 0 である．このことから直ちに，$C(A)$ が一般 Cartan 行列になっていることが分かる．

(2) 各 i について，$d_i := \dim_k F_i$ とおけば，$i \neq j$ に対して，

$$d_i c_{ij} = -(\dim_k {}_jM_i + \dim_k {}_iM_j) = d_j c_{ji}$$

が成り立つので，$C(A)$ は，対称化可能である．

定義 4.3. (1) Q を**対称化可能**な (valued) クイバーとする．すなわち，Q の underlying graph は，ある対称化可能な一般 Cartan 行列に対応する valued graph であるとする．このとき，一般に Q を型に持つ **species** とは，Q の各点 i に対して与えられた k 上有限次元の斜体 F_i と，Q の各矢 $i \to j$ $(i \neq j)$ に対して，それに与えられた value が $(\dim_{F_j} {}_jM_i, \dim {}_jM_{i_{F_i}})$ となるような (F_j, F_i) 両側加群 ${}_jM_i$ との組 $\mathcal{S} := (F_i, {}_jM_i)$ のことである．

(2) 上の species $\mathcal{S}$ に対して，$F := \prod_i F_i$, $M := \bigoplus_{i,j} {}_jM_i$ とおき，M に自然な (F, F) 両側加群の構造を与える．このとき多元環 $T(\mathcal{S})$ を次で定義する：

$$T(\mathcal{S}) := T({}_FM_F) := F \oplus M \oplus (M \otimes_F M) \oplus \cdots .$$

すると，これは遺伝多元環になる．

命題 4.4. 遺伝多元環 A と *species* $\mathcal{S}$ に対して次が成り立つ．

$$T(\mathcal{S}(A)) \cong A, \mathcal{S}(T(\mathcal{S})) \cong \mathcal{S}.$$

さて，Γ の任意の向きづけ Ω に対して，$Q = (\Gamma, \Omega)$ を型に持つ species $\mathcal{S}$ を構成することができるので，$A = T(\mathcal{S})$ ととれば，$C(A) = C$ が満たされる．そこで以下 A を $C(A) = C$ であるような遺伝多元環とし，$K_0(A)$ をその Grothendieck 群とする．$S_i := e_iA/e_iJ$ $(i \in I)$ は，単純 A 加群の同型類の完全代表系をなしているので，対応 $[S_i] \mapsto \alpha_i$ は，同型 $K_0(A) \to \mathbb{Z}^I$ を定義する．これと標準写像 $\operatorname{mod} A \to K_0(A)$ との合成を $\underline{\dim}\colon \operatorname{mod} A \to \mathbb{Z}^I$ とおくと，

$$\forall X \in \operatorname{mod} A, \quad \underline{\dim}\, X = (\dim e_iX)_{i\in I}.$$

5. 最初の結びつき

定理 5.1 (Gabriel [10], Dlab-Ringel [7, 8]). C が *Dynkin* 型（$A_n, B_n, \ldots, G_2$）であることと，A が有限表現型であることとは同値である．このとき，$\underline{\dim}(\mathrm{ind}\, A) = \Phi^+$ が成り立ち，$\underline{\dim}$ の導く写像 $[\mathrm{ind}\, A] \to \Phi^+$ は，全単射となっている．

一般に，ルートの全体は，実ルートと虚ルートに分かれる．正ルートのうち実【虚】ルートであるものの全体を Φ^+_{re} 【Φ^+_{im}】とかくと，$\Phi^+ = \Phi^+_{\mathrm{re}} \sqcup \Phi^+_{\mathrm{im}}$．また，$C$ が Dynkin であるとき（また，そのときに限って）$\Phi^+_{\mathrm{im}} = \emptyset$ であることが知られている．

定理 5.2 (Kac [14, 15]). C が対称行列であるときにも，$\underline{\dim}(\mathrm{ind}\, A) = \Phi^+$ が成り立ち，$\underline{\dim}$ の導く写像，$\underline{\dim}^{-1}(\Phi^+_{\mathrm{re}}) \to \Phi^+_{\mathrm{re}}$ は全単射であるが，$\underline{\dim}^{-1}(\Phi^+_{\mathrm{im}}) \to \Phi^+_{\mathrm{im}}$ は単射にならない．

以上 2 つの定理の与える $[\mathrm{ind}\, A]$ と Φ^+ との関係は，A と $\mathfrak{g}$ との間にもっと深い関係があることを示唆している．

6. Ringel-Hall algebras

以下，k を有限体とし，その元の個数を q とおく．また集合 S に対して，その濃度を $|S|$ で表す．このとき，A も有限集合になるので，$\forall X \in \mathrm{mod}\, A$, $|X| < \infty$ が成り立つ．

定義 6.1. R を標数 0 の可換環とする．R 上の A の Ringel-Hall 代数 $\mathcal{H}_R(A)$ とは，自由 R 加群

$$\mathcal{H}_R(A) := R^{([\mathrm{mod}\, A])} = \bigoplus_{[X]\in[\mathrm{mod}\, A]} Ru_{[X]}$$

（ただし，$u_{[X]}([Y]) := \delta_{[X],[Y]}$）に次で定義される乗法を入れたものである：

$$u_{[X]} \cdot u_{[Y]} := \sum_{[Z]\in[\mathrm{mod}\, A]} g^Z_{XY} u_{[Z]}, \quad \forall X, Y \in \mathrm{mod}\, A.$$

ただし，$g^Z_{XY} := |\{M \le Z | X \cong Z/M, Y \cong M\}|$ であり，これは **Hall 数**とよばれている．

注意 6.2. 上の設定のもとで，$W^Z_{XY} := \{(f, g) \in \mathrm{Hom}_A(Y, Z) \times \mathrm{Hom}_A(Z, X) \mid 0 \to Y \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{g} X \to 0$ が完全列$\}$ とおくと，容易に分かるように，

$$g^Z_{XY} = \frac{|W^Z_{XY}|}{|\mathrm{Aut}_A(X)| \cdot |\mathrm{Aut}_A(Y)|}$$

が成り立つ．ここの完全列を三角圏における三角列に置き換えることで，三角圏における Hall 数を考えることができる．

Ringel [22] によって次のことが示されている．

定理 6.3. $\mathcal{H}_R(A)$ は，$1 = u_{[0]}$ を単位元にもつ，R 上の結合代数である．

注意 6.4. $\mathcal{H}_R(A)$ の同型類は，一般に，向き付け Ω が変わると変わるが，次に定義する，$\mathcal{R}_R(A)$ の同型類は，Ω によらないことが知られている．

定義 6.5. R を標数 0 の可換環で，$v^2=q$ となる元 v およびその逆元 v^{-1} を含んでいるものとする．このとき R 上の A の twisted Ringel-Hall 代数 $\mathcal{R}_R(A)$ とは，R 加群としては $\mathcal{H}_R(A)$ と同じものであり，次で定義される乗法 $*$ を持つものである：

$$u_{[X]} * u_{[Y]} := v^{\langle X,Y\rangle} u_{[X]} \cdot u_{[Y]}, \quad \forall X, Y \in \operatorname{mod} A.$$

ただし，

$$\langle X, Y\rangle := \dim_k \operatorname{Hom}_A(X,Y) - \dim_k \operatorname{Ext}^1_A(X,Y)$$

とする．このとき次の式が成り立つことに注意しておく：

$$v^{\langle X,Y\rangle} = \sqrt{\prod_{i\geq 0} |\operatorname{Ext}^i_A(X,Y)|^{(-1)^i}}.$$

定理 6.6 (Ringel [25])**.** $\mathcal{R}_R(A)$ は，$1=u_{[0]}$ を単位元にもつ，R 上の結合代数である．

例 6.7. valued クイバー Q において，2 頂点 i, j が，value (1, 1) をもつ矢で，次のように結ばれているとする：

$$i \xrightarrow{(1,1)} j.$$

このとき，$\operatorname{soc} M \cong S_j, \operatorname{top} M (:= M/\operatorname{rad} M) \cong S_i$ となる $M \in \operatorname{ind} A$ が同型を除いてただ 1 つ存在する．これをもちいて，$\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} := u_{[M]}$ とおく．また，$u_s := u_{[S_s]}, [s\ t] := u_{[S_s \oplus S_t]}, \forall s, t \in I$ とおく．このとき上の定義に従って計算すると，$\mathcal{H}_R(A)$ において，

$$u_i \cdot u_j = [i\ j] + \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}, \quad u_j \cdot u_i = [i\ j], \quad u_i^2 = (q+1)[i\ i]$$

となる．さらに，

$$\langle S_i, S_i\rangle = 1 = \langle S_j, S_j\rangle, \quad \langle S_i, S_j\rangle = -1, \quad \langle S_j, S_i\rangle = 0$$

より

$$u_i * u_j = v^{-1} u_i \cdot u_j, \quad u_j * u_i = u_j \cdot u_i, \quad u_i^{*2} = v u_i^2$$

が成り立つ．

7. $\mathfrak{n}_+$, $U(\mathfrak{n}_+)$, $U_q(\mathfrak{n}_+)$ の実現

第 5 節の最後に述べたように，定理 5.1 と 5.2 は，A と $\mathfrak{g}$ との間にもっと深い関係があることを示唆していたが，実際，その例として，まず A が有限表現型のとき，Ringel によって $[\operatorname{ind} A]$ から $\mathfrak{n}_+$ および $U(\mathfrak{n}_+)$ が実現され，またさらに $U_q(\mathfrak{n}_+)$ も実現された．そののち同様の主張は，Ringel, Peng-Xiao らによって，有限表現型とは限らない一般の場合，すなわち C が任意の対称化可能な一般 Cartan 行列の場合についても証明された．この節では，これについて概説する．ところで，$U_q(\mathfrak{n}_+)$ を実現すれば，$q=1$ とおいて $U(\mathfrak{n}_+)$ が実現され，さらにそこから $\mathfrak{n}_+$ も実現されるので，ここでは $U_q(\mathfrak{n}_+)$ の実現を中心にして話をまとめ直すことにする．

量子群 $U_q(\mathfrak{n}_+)$ の定義関係式である，量子 Serre 関係式は次の定理 7.1 に述べる形になるが，これはもとの $\mathfrak{n}_+$ のもっていた Serre 関係式を $U(\mathfrak{n}_+)$ のなかで，リーブラケットを交換子と見て，書き直したものを量子化したものになっている．この実現問題には，3 つのキーがあるが，次の定理はその最初のキーとなる．

定理 7.1 (Ringel [23, 25])**.** $\mathcal{R}_R(A)$ において，$u_i := u_{[S_i]}$ $(i \in I)$ は，量子 *Serre* 関係式

$$\sum_{t=0}^{n(i,j)} (-1)^t \begin{bmatrix} n(i,j) \\ t \end{bmatrix}_{d_i} u_i^{n(i,j)-t} u_j u_i^t = 0$$

を満たす．ただし，$n(i,j) := 1 - a_{ij}$ $(\forall i, j \in I)$ とおいた（量子 2 項係数の記号については次の定義を参照）．

定義 7.2. 整数 $0 \le t \le m$ に対して，

$$[m] := \frac{v^m - v^{-m}}{v - v^{-1}},\ [m]! := [m][m-1]\cdots[1],\ \begin{bmatrix} m \\ t \end{bmatrix} := \frac{[m]!}{[t]![m-t]!} \quad (\in \mathbb{Z}[v, v^{-1}])$$

とおき，各 $\phi(v) \in \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ と $d \in \mathbb{N}$ に対して，$\phi_d(v) := \phi(v^d)$ と定義する．

例 7.3. （この例は，C が Dynkin 型の対称行列の場合，上の定理の証明にもなっている.）例 6.7 のように，valued クイバー Q において，2 頂点 i, j が，value $(1, 1)$ をもつ矢で結ばれているとし，$d_i = d_j = 1$ とする．また，$\begin{bmatrix} i & i & j \end{bmatrix} := u_{[S_i \oplus S_i \oplus S_j]}$, $\begin{bmatrix} i & i \\ & j \end{bmatrix} := u_{[S_i \oplus M]}$ とおく．このとき，$n(i,j) = 1 - (-1) = 2$ であることに注意する．定義にしたがって計算すると次が得られる.

$$\begin{aligned} u_i^2 u_j &= (q+1) \begin{bmatrix} i & i & j \end{bmatrix} + (q+1) \begin{bmatrix} i & i \\ & j \end{bmatrix}, \\ u_i u_j u_i &= (q+1) \begin{bmatrix} i & i & j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i & i \\ & j \end{bmatrix}, \\ u_j u_i^2 &= (q+1) \begin{bmatrix} i & i & j \end{bmatrix} \end{aligned}$$

これより，

$$u_i^2 u_j - (q+1) u_i u_j u_i + q u_j u_i^2 = 0$$

が得られ，両辺に v^{-1} を掛けて例 6.7 の計算結果を使うと，この場合の量子 Serre 関係式

$$u_i^{*2} * u_j - [2] u_i * u_j * u_i + u_j * u_i^{*2} = 0$$

が得られる．

ここでは，量子群 $U_{\tilde{q}}(\mathfrak{n}_+)$ の定義として次のものを用いる．

定義 7.4. $\tilde{v}$ を不定元とし，$\mathbb{Z}[\tilde{v}, \tilde{v}^{-1}]$ のなかで $\tilde{q} = \tilde{v}^2$ とおく．また，量子 2 項係数を v の代わりに $\tilde{v}$ をもちいて定義する．このとき，$U_{\tilde{q}}(\mathfrak{n}_+)$ とは，e_i $(i \in I)$ を生成系とし，これらに関する量子 Serre 関係式を基本関係式とする $\mathbb{Q}(\tilde{v})$ 代数である．よって特に $\tilde{v} = 1$ を代入すると，$U_1(\mathfrak{n}_+) = U(\mathfrak{n}_+)$ となる．

2 つめのキーは，基礎体 k の元の個数 q を変数にする方法である．それには，2 通りの方法がある．一つは，Hall 多項式を用いる方法，もう一つは，代数の無限直積の部分代数を用いる方法である．前者は，取り扱いが比較的簡単であるが，Hall 多項式の存在が保証されている場合[1] にしか用いることはできないので，少々面倒でもここでは，どのような場合にも用いることができる後者について解説する．

[1]Hall 多項式の存在は，A が有限表現型遺伝多元環や，それに近い有限表現型多元環 (representation-directed algebras) および $A_n^{(1)}$ 型の tame 遺伝多元環の場合に証明されている．

さて，d を d_i $(i \in I)$ の最小公倍数とし，k の代数閉包 $\overline{k}$ を一つ固定しておく．このとき次のような k の有限次拡大体からなる無限集合 $\mathcal{K}$ を考える．

$$\mathcal{K} := \{K \subset \overline{k} \mid [K : k] \equiv 1 \pmod d\}$$

すると，各 $K \in \mathcal{K}$ に対して，$A^K := A \otimes_k K$ は K 上の遺伝多元環であり，C を型に持つ．また，$\{S_i^K := S_i \otimes_k K | i \in I\}$ は単純 A^K 加群の同型類の完全代表系をなす．各 $K \in \mathcal{K}$ に対して，$q_K := |K|$ とおき，$v_K := \sqrt{q_K} \in \mathbb{R}$ とする．ここで，$\Pi := \prod_{K \in \mathcal{K}} \mathcal{R}_{\mathbb{Q}(v_K)}(A^K)$ を考え，$\tilde{u}_i := (u_{[S_i^K]})_{K \in \mathcal{K}} \in \Pi$ とおく．$\tilde{u}_i$ $(i \in I)$ で生成される Π の部分代数 $\mathcal{C}(A)$ を A の**組成代数**とよぶ．このとき，$\tilde{q} := (q_K)_{K \in \mathcal{K}}$ および $\tilde{v} := (v_K)_{K \in \mathcal{K}}$ が，q および v の「変数化」としての役割を果たす．作り方から，$\tilde{v}^2 = \tilde{q}$ であることに注意する．

定理 7.5 (Ringel)**.** $\mathbb{Q}(\tilde{v})$ 代数の同型

$$U_{\tilde{q}}(\mathfrak{n}_+) \to \mathcal{C}(A),\ e_i \mapsto \tilde{u}_i$$

が存在する．これより特に，$U(\mathfrak{n}_+) \cong \mathcal{C}(A)/(\tilde{q} - 1)$ が成り立つ．

3 つめのキーは，次の補題である．

補題 7.6 (Ringel [22, 24])**.** $X, Y, Z \in \operatorname{mod} A$ とする．Z が直既約でなければ，

$$g_{XY}^Z - g_{YX}^Z \equiv 0 \pmod{q - 1}.$$

この補題により，$\mathcal{L}(A) := \oplus_{[X] \in [\operatorname{ind} A]} \mathbb{Z} u_X$ とおくと，

$$\mathcal{L}(A)/(q-1) := \mathcal{L}(A)/(q-1)\mathcal{L}(A)$$

は，ブラケット $[u_{[X]}, u_{[Y]}] := \sum_{[Z] \in \operatorname{ind} A} (g_{XY}^{[Z]} - g_{YX}^{[Z]}) u_{[Z]}$ によって $\mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$ 上の Lie 代数になる．ここで第 2 のキーと同様にして，$\prod_{K \in \mathcal{K}} \mathcal{L}(A^K)/(q_K - 1)$ の部分 Lie 代数で，$\tilde{u}_i$ $(i \in I)$ で生成されるものとして Lie 代数 $\mathcal{L}(A)_1$ を構成し，これを A の**退化組成 Lie 代数**とよぶ．また，$\mathcal{L}(A)_1^{\mathbb{Q}} := \mathcal{L}(A)_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ とおく．

定理 7.7 (Ringel)**.** *Lie* 代数の同型

$$\mathfrak{n}_+ \to \mathcal{L}(A)_1^{\mathbb{Q}},\ e_i \mapsto \tilde{u}_i$$

が存在する．

8. $\mathfrak{g}$, $U(\mathfrak{g})$, $U_q(\mathfrak{g})$ の実現

次に問題になるのは，正部分 $\mathfrak{n}_+$ だけでなく $\mathfrak{g}$ の全体を実現することであるが，Peng-Xiao [20, 21] は，A の「ルート圏」をもちいて，この問題を解くことに成功した．

$\mathcal{D}^{\mathrm{b}}(A)$ で有限生成 A 加群の有界複体のなす導来圏をあらわし，その shift を T とおく．$\mathcal{D}^{\mathrm{b}}(A)$ の自己同値関手 T^2 による軌道圏 $\mathcal{R} := \mathcal{D}^{\mathrm{b}}(A)/\langle T^2 \rangle$ を A の**ルート圏**とよぶ（軌道圏の定義については，Keller [17] を参照）．ここで重要なことは，(i) $\mathcal{R}$ は三角圏であること，(ii) そこにおいては，$T^2 = \mathbb{1}$ が成り立っていること，および (iii) $\mathcal{R}$ の直既約対象全体のなす充満部分圏 $\operatorname{ind} \mathcal{R}$ に，自然な埋め込み $\operatorname{ind} A \to \operatorname{ind} \mathcal{R}$ があって，対象の集合として $\operatorname{ind} \mathcal{R} = \operatorname{ind} A \sqcup T(\operatorname{ind} A)$ が成り立っていることである．そこで，

$$\mathcal{L}(\mathcal{R}) := \left(\bigoplus_{[X] \in [\operatorname{ind} A]} \mathbb{Z} u_{[X]} \right) \oplus \mathbb{Z}^n \oplus \left(\bigoplus_{[X] \in [\operatorname{ind} A]} \mathbb{Z} u_{[TX]} \right)$$

とおく．また，上の右辺の左の括弧内を，$\mathcal{L}(\mathcal{R})_+$，右の括弧内を $\mathcal{L}(\mathcal{R})_-$ とおく．このとき，補題 7.6 と同様のことが成り立つため，三角圏の Hall 数をもちいて $\mathbb{Z}^{([\mathcal{R}])} = \bigoplus_{[X]\in[\mathcal{R}]} \mathbb{Z}u_{[X]}$ 上に定義した演算の交換子を $\mathcal{L}(\mathcal{R})_+/(q-1)\mathcal{L}(\mathcal{R})_+$ 上および $\mathcal{L}(\mathcal{R})_-/(q-1)\mathcal{L}(\mathcal{R})_-$ 上に定義できる．この演算に適当な演算を張り合わせると $\mathcal{L}(\mathcal{R})/(q-1) := \mathcal{L}(\mathcal{R})/(q-1)\mathcal{L}(\mathcal{R})$ が Lie 代数になることが確かめられる（このブラケット積の正確な定義と，Peng-Xiao [21] の間違いの訂正については，Hubery [13] を参照）．$\mathcal{L}(A)_1$ の構成法と同様にして $\mathcal{R}$ の退化組成 Lie 代数 $\mathcal{L}(\mathcal{R})_1$ を構成し，$\mathcal{L}(\mathcal{R})_1^{\mathbb{Q}} := \mathcal{L}(\mathcal{R})_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ とおく．また，前節と同様に，$\tilde{u}_i := (u_{[S_i^K]}), \tilde{v}_i := (u_{[TS_i^K]})$ とおく．

定理 8.1 (Peng-Xiao [21]). *Lie* 代数の同型

$$\mathfrak{g} \to \mathcal{L}(\mathcal{R})_1^{\mathbb{Q}},\ e_i \mapsto \tilde{u}_i, f_i \mapsto -\tilde{v}_i$$

が存在する．

注意 8.2. 残念ながら，三角圏の Hall 数をもちいて $\mathbb{Z}^{([\mathcal{R}])}$ 上に定義した演算は，結合法則を満たさない．そのため，上の方法では，$U(\mathfrak{g})$ は実現できない．

注意 8.3. C が Dynkin 型のときは，他の方法でも Hall 代数から $\mathfrak{g}$ が実現されている．それは，C を affine 化した一般 Cartan 行列 $C^{(1)}$ に対応する遺伝多元環 $\tilde{A}$ から構成される Lie 代数 $\mathcal{L}(\tilde{A})_1^{\mathbb{Q}}$ の商代数として実現する方法である．この場合，$\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}(\tilde{A})$ は結合代数であるため，$U(\mathfrak{g})$ を実現することもできる．（詳しくは，[1, 2] を参照．）

注意 8.4. 最近 Toën [29] は，dg 圏から Hall 代数を構成している．これを用いると，$\mathcal{D}^{\mathrm{b}}(A)$ から結合代数 $\mathcal{DH}(A)$ を作ることができる．しかし，これがこの実現問題に有用であるかどうかは，現在のところよく分からない．

現在では，さらに量子群 $U_{\tilde{q}}(\mathfrak{g})$ も Hopf 代数として，組成代数 $\mathcal{C}(A)$ を拡張した代数（$\mathcal{R}_R(A)$ の代わりに，$\{K_\alpha u_{[X]} \mid \alpha \in \mathbb{Z}^I, [X] \in [\mathrm{mod}\, A]\}$ を R 上の基底にとったものを用いる．ただし，K_α は，α ごとに異なる symbol である．）の Drinfeld double という形で実現されている（Green [12], Ringel [26], Xiao [30], Sevenhant-Van den Bergh [28], Deng-Xiao [4] 等を参照）．

参考文献

[1] Asashiba, H.: *Realization of general and special linear algebras via Hall algebras*, Fields Institute Communications, **45** (2005), 9–16.

[2] Asashiba, H.: *Realization of simple Lie algebras via Hall algebras of tame hereditary algebras*, J. Math. Soc. Japan **56** (2004), no. 3, 889–905.

[3] Baumann, P. and Kassel, Ch.: *The Hall algebra of the category of coherent sheaves on the projective line* J. Reine Angew. Math. **533** (2001), 207–233.

[4] Deng, B. and Xiao, J.: *On double Ringel-Hall algebras.* J. Algebra **251** (2002), no. 1, 110–149.

[5] Deng, B. and Xiao, J: *Ringel-Hall algebras and Lusztig's symmetries*, J. Algebra **255** (2002), no. 2, 357–372.

[6] Deng, B. and Xiao, J.: *A new approach to Kac's theorem on representations of valued quivers*, Math. Z. **245** (2003), no. 1, 183–199.

[7] Dlab, V. and Ringel, C. M.: *On algebras of finite representation type*, J. Algebra **33** (1975), 306–394.

[8] Dlab, V. and Ringel, C. M.: *Indecomposable representations of graphs and algebras*, Mem. Amer. Math. Soc. **6** (1976), no. 173.

[9] Frenkel, I., Malkin, A. and Vybornov, M.: *Affine Lie algebras and tame quivers*, Selecta Math. (N.S.) **7** (2001), no. 1, 1–56.
[10] Gabriel, P.: *Unzerlegbare Darstellungen. I.* (German), Manuscripta Math. **6** (1972), 71–103; correction, ibid. **6** (1972), 309.
[11] Gabriel, P.: *Indecomposable representations. II*, Symposia Mathematica, Vol. **XI** (Convegno di Algebra Commutativa, INDAM, Rome, 1971), 81–104. Academic Press, London, 1973.
[12] Green, J. A.: *Hall algebras, hereditary algebras and quantum groups*, Invent. Math. **120** (1995), 361–377.
[13] Hubery, A.: *From triangulated categories to Lie algebras: A theorem of Peng and Xiao*, preprint, arXiv:math.RT/0502403. v1 Feb., 2005.
[14] Kac, V.: *Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory*, Invent. Math. **56**, (1980), 57–92.
[15] Kac, V.: *Root systems, representations of quivers and invariant theory*, Lecture Notes in Math. Vol. **996**, Springer-Verlag, (1982), 74–108.
[16] Kac, V.: *Infinite dimensional Lie algebras*, Third edition, Cambridge University Press, 1990.
[17] Keller, B: *On triangulated orbit categories*, preprint, arXiv:math.RT/0503240, v1, Mar., 2005.
[18] Lin, Y. and Peng, L.: *Elliptic Lie algebras and tubular algebras*, Advances in Math. **196** (2005), 487–530.
[19] Macdonald, I.G.: *Symmetric functions and Hall polynomials, second edition*, Oxford Math. Mon., (1995).
[20] Peng, L. and Xiao, J.: *Root categories and simple Lie algebras*, J. Algebra **198** (1997), no. 1, 19–56.
[21] Peng, L. and Xiao, J.: *Triangulated categories and Kac-Moody algebras*, Invent. Math. **140** (2000), no. 3, 563–603.
[22] Ringel, C. M.: *Hall algebras.* Topics in algebra, Part 1 (Warsaw, 1988), 433–447, Banach Center Publ., **26**, Part 1, PWN, Warsaw, 1990.
[23] Ringel, C. M.: *Hall algebras and quantum groups*, Invent. Math. **101** (1990), 583–592.
[24] Ringel, C. M.: *Lie algebras arising in representation theory*, Representations of algebras and related topics (Tsukuba, 1990), 284–291, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **168**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.
[25] Ringel, C. M.:*Hall algebras revisited*, Quantum deformations of algebras and their representations (Ramat-Gan, 1991/1992; Rehovot, 1991/1992), 171–176, Israel Math. Conf. Proc., 7, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1993.
[26] Ringel C. M.: *Green's theorem on Hall algebras*, Representations of Algebras and Related Topics CMS Conference Proceedings **19**, Amer. Math. Soc., Providence (1996) 185–245.
[27] Schiffmann, O.: *Noncommutative projective curves and quantum loop algebras*, Duke Math. J. **121** (2004), no. 1, 113–168.
[28] Sevenhant B. and Van den Bergh M.: *On the double of the Hall algebra of a quiver*, J. Algebra **221** (1999), 135–160.
[29] Toën, B.: *Derived Hall algebras*, preprint, arXiv:math.QA/0501343 v3 June, 2005.
[30] Xiao, J.: *Drinfeld double and Ringel-Green theory of Hall algebras.* J. Algebra **190** (1997), 100–144.

電子メール・アドレス： asashiba @ sci.osaka-cu.ac.jp