群の表現のガンマ関数と三角関数*

若山 正人（九州大学大学院数理学研究）

1 序

ガンマ関数や三角関数は、言うまでもなく、数学のあらゆるところに現れる基本的な関数である。ここでの話の出発点をガンマ関数の Lerch の公式 [Le] (1894) におく：

$$\prod_{n=0}^{\infty}(n+x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(x)}.$$

これは Riemann (1859) による $\infty! := \prod_{n=1}^{\infty} n = \sqrt{2\pi} = -\log\zeta'(0)$ の Hurwitz 型ゼータ版である。ただし、$\prod$ は正規化積といわれる無限大発散の繰り込みを表し、以下のように定義される：数列 $\mathbf{a} = \{a_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ に対しそのゼータ関数を $\zeta_{\mathbf{a}}(s) := \sum_{n=0} a_n^{-s}$ と定義し、それが原点 $s=0$ を含む領域に解析接続され、そこで正則なとき

$$\prod_{n=0}^{\infty} a_n = \exp\left(-\zeta'_{\mathbf{a}}(0)\right)$$

とおく。これは [De] での記号であり、有限数列ならば通常の積に等しい。大切な点は、その表示から期待される関数等式$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ の明示性である[1]。もちろんこれは、Hurwitz ゼータ関数$\zeta(s,x) := \sum_{n=0}^{\infty}(n+x)^{-s}$ が満たす差分方程式（梯子構造）$\zeta(s,x+1) = -x^{-s}+\zeta(s,x)$ から従う事実である。この点に注目した Barnes は、その多重版を研究した [Ba1, Ba2] (1900, 1904)。多重 Hurwitz ゼータ関数、Barnes の多重ガンマ関数といわれるものである。後者はたとえば、負曲率局所対称空間の Selberg ゼータ関数のガンマ因子の表示にも現れる [K1, K2]。ガンマ関数と正弦関数は、いわゆる反射公式 $\sin(\pi x) = \pi\Gamma(x)^{-1}\Gamma(1-x)^{-1}$ で結びついて

---

* ２００４年度代数学シンポジウムでは、$\zeta(s)$ の q-類似との関連にもふれたが、本稿では割愛する。

[1] 倍数公式、より一般には Gauss-Legendre の n-倍公式も容易に導かれる [KKSW]。

いる。その類似を考えることにより、多重三角関数が定義される。その重要性を最初に見抜いたのは新谷卓郎であろう [Sh2]。彼は２重三角関数とは命名しなかったが、実２次体の Kronecker の青春の夢の実現に向けてそれを定義した。しかしながら，スターク予想の影に隠れる形で新谷の結果の真の意義はとくに強調されることもなく過ぎていった（[K3, Sa] を参照)。だが今では、その重要性を明確に意識した黒川信重氏によって２重三角関数と命名され、さらに多重三角関数の研究が始められ、ようやく広く重要性が認識されつつある。

そのほかにも多重三角関数と呼ばれるものとして、Hölder [Höl] などのものもある。以上いずれもが、リーマンゼータ関数やそのほかの代数体のゼータ、L- 関数の特殊値の研究に欠かせない。じっさい、新谷は総実代数体の L-関数の特殊値の研究のために行列版の多重 Hurwitz ゼータ関数（新谷ゼータとよぶ）[Sh1] を導入した。それは結果のみならず、アイデアや方法も多くの数論の問題の研究に役立っている。

また、量子群などの表現論や特殊関数、そして差分方程式系の研究 （[Rui] など）からも、多重ガンマや多重三角の q-類似が研究されている。じっさい、ごく最近の [FR] では、新谷ゼータ関数の差分方程式系の立場からの研究がなされている（[FR] とわれわれの立場は部分的に重なっている）[2]。

ここでの研究の目的は次のようなものである。

• 知られている多重ガンマ関数や三角関数を統一的に扱う枠組みを提供すること。統一的な扱いによって、広いクラスのガンマ関数や三角関数たちの相互間関係について知ることが期待され、それらが満たす関数等式（値の代数性などの研究に役立てたい）などが調べられるかもしれないからである[3]。

• 非可換な変数に対するゼータ・ガンマ・三角関数（捩れ梯子構造）の研究を目指す。たとえば、非可換差分方程式の過剰決定系の解の研究に向かうための準備でもある。

以下では、対数の分枝は $\log z = \log|z| + i\arg z \quad (-\pi \le \arg z < \pi)$ としておく。

---

[2]正規化積はゼータ関数の行列式表示などに期待が寄せられるものであるが、本稿ではこの観点からの研究については述べない。なお、本稿に関連が深い正規化積の研究については [KW2] を見られたい。

[3]ただし加法定理や分点（倍角）公式はなかなか難しい。非可換な場合には、後者でさえ、とりわけ難しいように見える。G がリー群ならば、対応するリー環のパラメータを利用して “漸近的” な関数等式を積極的に考えるべきであるかもしれない。

2　定義と例

群とその線型表現に対してガンマ関数を導入するのであるが、そのためにまず、表現に付随したゼータ関数を定義する。

G を群とし、(ρ, V) を G の N 次元表現とする。本稿では有限次元表現のみを扱うことにする[4]。$\underline{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r)$ を G の元の r 個の組とし、$g \in \mathrm{End}(V)$ とする。煩雑さを避けるため、γ_j の位数は無限大と仮定する。これらのデータと N 次の行列の不変式 L に対して階数 r のゼータ関数 $\zeta^{(r)}_{G,\rho,L}(s, g; \underline{\gamma})$ をディリシュレ級数

$$\zeta^{(r)}_{G,\rho,L}(s, g; \underline{\gamma}) := \sum_{\mathbf{n} \geq \mathbf{0}} L(\rho(\underline{\gamma}^{\mathbf{n}})g)^{-s} = \sum_{n_1, \ldots, n_r = 0}^{\infty} L(\rho(\gamma_1^{n_1} \gamma_2^{n_2} \cdots \gamma_r^{n_r})g))^{-s}. \tag{1}$$

で定義する[5]。梯子構造だけを望むのであれば、L は不変式である必要はないが、三角関数にあたるものも考えたく、それにはある程度の関数等式（加法定理）などが期待できるような枠組みにしたい。また、同値な表現に対しては同じガンマ関数が定義されるべきでもあろうから、このような不変式を考えることはむしろ自然である。L としては、$N \times N$ 複素行列 A の特性多項式 $\Psi(t, A) := \det(tI - A)$ の t^k の係数や冪の跡 $\mathrm{tr}(A^j)$ などを考えている。いま、この級数は十分大きな ℓ に対して、右半平面 $\mathrm{Re}\, s > \ell$ で絶対収束すると仮定する。

さて、ここで言う梯子構造とは以下を指す：

$$\begin{aligned}
\zeta^{(r)}_{G,\rho,L}(s, \rho(\gamma_k)g; \gamma_1, \ldots, \gamma_r) =& -\zeta^{(r-1)}_{G,\rho,L}(s, g; \gamma_1, \ldots, \gamma_{k-1}, (\gamma_k^{-1}\gamma_{k+1}\gamma_k), \ldots, (\gamma_k^{-1}\gamma_r\gamma_k)) \\
&+ \zeta^{(r)}_{G,\rho,L}(s, g; \gamma_1, \ldots, \gamma_{k-1}, \gamma_k, (\gamma_k^{-1}\gamma_{k+1}\gamma_k), \ldots, (\gamma_k^{-1}\gamma_r\gamma_k)), \\
\zeta^{(r)}_{G,\rho,L}(s, g\rho(\gamma_k); \gamma_1, \ldots, \gamma_r) =& -\zeta^{(r-1)}_{G,\rho,L}(s, g; (\gamma_k^{-1}\gamma_1\gamma_k), \ldots, (\gamma_k^{-1}\gamma_{k-1}\gamma_k), \gamma_{k+1}, \ldots, \gamma_r) \\
&+ \zeta^{(r)}_{G,\rho,L}(s, g; (\gamma_k^{-1}\gamma_1\gamma_k), \ldots, (\gamma_k^{-1}\gamma_{k-1}\gamma_k), \gamma_k, \gamma_{k+1}, \ldots, \gamma_r).
\end{aligned}$$

とくに、$\gamma_i\gamma_j\gamma_i^{-1}\gamma_j^{-1} \in \ker\rho \ (1 \leq i, j \leq r)$ であれば、明らかに

$$\begin{aligned}
&\zeta^{(r)}_{G,\rho,L}(s, \rho(\gamma_k)g; \gamma_1, \ldots, \gamma_r) = \zeta^{(r)}_{G,\rho,L}(s, g\rho(\gamma_k); \gamma_1, \ldots, \gamma_r) \\
&= -\zeta^{(r-1)}_{G,\rho,L}(s, g; \gamma_1, \ldots, \gamma_{k-1}, \gamma_{k+1}, \ldots, \gamma_r) + \zeta^{(r)}_{G,\rho,j}(s, g; \gamma_1, \ldots, \gamma_{k-1}, \gamma_k, \gamma_{k+1}, \ldots, \gamma_r).
\end{aligned}$$

Problem 1: ゼータ関数 $\zeta^{(r)}_{G,\rho,L}(s, g; \underline{\gamma})$ が $s = 0$ を含む領域まで有理型に解析接続されるための一般的な条件を記述することはできるであろうか。さらにそのとき、以下で定義されるガンマ関数は非自明であろうか。 □

[4] 無限次元表現での研究も面白そうである。

[5] さらには指標つきでも考えられる。

ゼータ関数 $\zeta^{(r)}_{G,\rho,L}(s,g;\underline{\gamma})$ は $s=0$ で有理型であるとする。このとき、データ $(G,\rho,\underline{\gamma},L)$ に付随するガンマ関数を

$$\Gamma^{(r)}_{G,\rho,L}(g;\underline{\gamma})^{-1} := \coprod_{\mathbf{n}\geq\mathbf{0}} L(\rho(\underline{\gamma}^{\mathbf{n}})g) = \exp\left(-\operatorname{Res}_{s=0}\frac{\zeta_{G,\rho,L}(s,g;\underline{\gamma})}{s^2}\right). \tag{2}$$

で定義する。ここで正規化積記号を $\prod$ から $\coprod$ に変更したのは、Lerch の公式の場合の正則条件を、有理型まで許すように広げたからである [KW1]（[Ill] も参照）。もちろん一般に、$\zeta_{\mathbf{a}}(s)$ が $s=0$ で正則なときは $\coprod a_n = \prod a_n$ である[6]。

本稿では、不変式として、もっぱら非自明でもっとも基本的な $L(A)=\mathrm{tr}(A)$ を考えるので、記号 L を省略する。多重 Hurwitz ゼータ関数はもちろんこの枠組みで捉えられるが、それは次節の新谷ゼータ関数の特別なものと考えられるから、ここでは別の例をあげる。

Example 1 : (ρ,V) を $G=SL_2(\mathbb{C})$ の有限次元表現とし、$\gamma\in G$ の固有値を α,β $(|\alpha|<|\beta|)$ とすると $\zeta^{(1)}_{G,\rho}(s,g,\gamma)$ は $s=0$ で有理型である。したがって、付随するガンマ関数が存在し

$$\Gamma^{(1)}_{G,\rho}(g,\gamma)^{-1} = \beta^{-\frac{1}{12}}\left(\frac{\mathrm{tr}(\rho(\gamma)g)-\alpha\,\mathrm{tr}(g)}{\beta-\alpha}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\log_\beta\left(\frac{\mathrm{tr}(\rho(\gamma)g)-\alpha\,\mathrm{tr}(g)}{\beta-\alpha}\right)} G\left(\frac{\alpha}{\beta},\frac{\mathrm{tr}(\rho(\gamma)g)-\beta\,\mathrm{tr}(g)}{\mathrm{tr}(\rho(\gamma)g)-\alpha\,\mathrm{tr}(g)}\right)$$

となる [KW4]。ただし、$|q|<1$ に対し $G(q,z) := \prod_{n=0}^{\infty}(1-q^n z)$ である[7]。 $\square$

3 新谷ゼータ・ガンマ・三角関数

$N\times n$ 型行列 $A=(a_{ij})$ $(a_{ij}>0)$ と $\underline{\mathbf{x}}=(x_1,\ldots,x_N)\in\mathbb{R}^N_{>0}$ に対し

$$\zeta_S(s,A,\underline{\mathbf{x}}) := \sum_{m_1,\ldots,m_N=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{n}\left\{\Big(\sum_{i=1}^{N}(m_i+x_i)a_{ij}\Big)\right\}^{-s}, \qquad \operatorname{Re}s > N/n. \tag{3}$$

とおく [Sh1]。$\zeta_S(s,A,\underline{\mathbf{x}})$ が $\operatorname{Re}s>N/n$ で絶対収束し、s の関数として全平面に有理型関数として解析接続されることは、Hurwitz ゼータ関数の場合と同様な方法で示される（たとえば [Ha]）。これを新谷ゼータ関数と呼ぶことにする。どうしてこのような定義を得たのかは不明であるが、ともかく、このゼータ関数の非正整数点での値を一般化された Bernoulli 数

[6] $\coprod$ を丼積という。記号がそれを彷彿させるからであるが、無限大を差っ引くといういう意味で “どんぶり勘定”なので。

[7] $G(q,z)$ は楕円ガンマ関数と呼ばれることもある。比 $G(q,q)/G(q,q^s)$ は本質的に Jackson の q-ガンマ関数 $\Gamma_q(s)$ (たとえば [AAR] などを参照) を与える。

を用いて表した。さらに、総実代数体の合同ゼータ関数を $\zeta_S(s, A, \underline{\mathbf{x}})$ の形をしたゼータの有限和で表し、その結果当該合同ゼータ関数（したがって L-関数）の非正整数点での値を一般化された Bernoulli 数で表す明示公式を得たのである [8]。さて、新谷ゼータが群のゼータとして捉えられることを見てみよう。

Proposition 3.1. $G = \left\{ n(z) := \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ ; \ z \in \mathbb{C} \right\} \cong \mathbb{C}$ とおく。実部が正であるような複素数を成分とする $N \times n$ 型行列 $A = (\underline{\mathbf{a}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{a}}_n) = \{a_{ij}\}_{1 \le i \le N, 1 \le j \le n}$ をとり、w_j $(1 \le j \le n)$ を実部が正の複素数とする。$\gamma_{ij} = n(a_{ij})$, $g_j = n(w_j)$, $\underline{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ とおく。G の n 個の直積群の $V = \left(\mathbb{C}^2\right)^{\otimes n}$ への自然な作用を ρ とする。$\gamma_i := (\gamma_{i1}, \cdots, \gamma_{in}) \in G^n$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ に対し $\rho(\gamma_i) := \gamma_{i1} \otimes \cdots \otimes \gamma_{in} \in \mathrm{End}(V)$ である。$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を用いて V の線型変換 g を $g = g_1 S \otimes \cdots \otimes g_n S \in \mathrm{End}(V)$ で定める。群のゼータ関数 $\zeta^{(N)}_{G^n, \rho, 1}(s, g; \underline{\gamma})$ は $\zeta_S(s, A, \underline{\mathbf{x}})$ を与える。ただし、$w_j = \sum_{i=1}^N x_i a_{ij}$ である。

証明：丁寧に計算するだけである。じっさい

$$
\begin{aligned}
&\zeta^{(N)}_{G^n, \rho, 1}(s, g; \underline{\gamma}) = \sum_{m_1, \ldots, m_N = 0}^{\infty} \left\{ \mathrm{tr}(\rho(\gamma_1^{m_1} \gamma_2^{m_2} \cdots \gamma_N^{m_N}) g) \right\}^{-s} \\
&= \sum_{m_1, \ldots, m_N = 0}^{\infty} \left\{ \mathrm{tr}\left(\left(\prod_{i=1}^N \gamma_{i1}^{m_i} \otimes \cdots \otimes \prod_{i=1}^N \gamma_{in}^{m_i} \right) (g_1 S \otimes \cdots \otimes g_n S) \right) \right\}^{-s} \\
&= \sum_{m_1, \ldots, m_N = 0}^{\infty} \left\{ \mathrm{tr}\left(n(w_1 + \sum_{i=1}^N m_i a_{i1}) S \otimes \cdots \otimes n(w_n + \sum_{i=1}^N m_i a_{in}) S \right) \right\}^{-s} \\
&= \sum_{m_1, \ldots, m_N = 0}^{\infty} \left\{ \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} w_1 + \sum_{i=1}^N m_i a_{i1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \cdots \otimes \begin{pmatrix} w_n + \sum_{i=1}^N m_i a_{in} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \right\}^{-s} \\
&= \sum_{m_1, \ldots, m_N = 0}^{\infty} \prod_{j=1}^n \left\{ \left(w_j + \sum_{i=1}^N m_i a_{ij} \right) \right\}^{-s} =: \zeta(s, A, \underline{\omega}).
\end{aligned}
$$

ここで、正方行列 A_j に対して, そのテンソル積の跡が $\mathrm{tr}(A_1 \otimes \cdots \otimes A_r) = \prod_{j=1}^r \mathrm{tr}(A_j)$ であることを用いた。ここで、w_j を $w_j = \sum_{i=1}^N x_i a_{ij}$ とおけば、明らかに、ディリクレ級数 $\zeta(s, A, \underline{\omega})$ は $\zeta_S(s, A, \underline{\mathbf{x}})$ に一致する。 $\square$

[8] これは、その特殊値が有理数であるという Siegel (1969) による結果の再証明でもあるが、これは [Sh1] が書かれる一つの動機でもあったようだ。

新谷ゼータ関数をこのように群のゼータ関数として捉えることの最大の利点は、梯子構造が明らかになるからである[9]。また、$N < n$ のときは、行列の階数の関係から、少しだが一般的になっていることも小さいが利点であろうか。梯子構造から得られる利点とは、言い換えれば、このゼータ関数 $\zeta(s, A, \underline{\omega})$ に付随するガンマ関数がまさしくそれらしい関数等式を満たしていることである。この事実は、同時にそれが Barnes の多重ガンマ関数の積で書けることを意味する。したがって Barnes の多重ガンマ関数やさらにはそれから定義される三角関数に対して成り立つ性質の多くが新谷ゼータから定義されるそれらに対しても成立することがわかる。じっさい

Example 2 : $\zeta(s, A, \underline{\omega})$ は $s = 0$ で正則であるので、付随するガンマ関数が存在する : $\Gamma_S(\underline{\omega}, A) = \Gamma_S^{(N,n)}(\underline{\omega}, A) := \exp\left(\frac{\partial}{\partial s}\zeta(0, A, \underline{\omega})\right)$ [10]。さらに、$\Gamma_S(\underline{\omega}, A)$ は Barnes 多重ガンマ関数の積である :

$$\Gamma_S^{(N,n)}(\underline{\omega}, A) := \Big\{ \prod_{\underline{\mathbf{m}} \geq \underline{0}} \prod_{j=1}^{n} \big(w_j + \sum_{i=1}^{N} m_i a_{ij}\big)\Big\}^{-1} = \prod_{j=1}^{n} \Gamma_N(\omega_j, \underline{\mathbf{a}}_j).$$

関数等式は次のとおり :

$$\Gamma_S^{(N,n)}(\underline{\omega} + \underline{\mathbf{a}}^{i_0}, A) = \Gamma_S^{(N-1,n)}(\underline{\omega}, \check{A}_{i_0})^{-1} \Gamma_S^{(N,n)}(\underline{\omega}, A).$$

ただし、$\underline{\mathbf{a}}^{i_0}$ は行列 A の第 i_0 行を表し、$\check{A}_{i_0}$ は A から i_0 行を取り去ってできる $(N-1)\times n$ 型行列である。いま、新谷正弦関数を $S_S^{(N,n)}(\underline{\omega}, A) := \Gamma_S^{(N,n)}(\underline{\omega}, A)^{-1} \Gamma_S^{(N,n)}(-\underline{\omega} + \sum_{i=1}^{N} \underline{\mathbf{a}}^i, A)^{(-1)^N}$ で定義すれば、上記のガンマ関数の関数等式から次の周期性が従う :

$$S_S^{(N,n)}(\underline{\omega} + \underline{\mathbf{a}}^{i_0}, A) = S_S^{(N-1,n)}(\underline{\omega}, \check{A}_{i_0})^{-1} S_S^{(N,n)}(\underline{\omega}, A).$$

$n = 1$ のとき、これは、[KK1] で得られた多重正弦関数の周期性である。 □

- 多重三角関数のときに倣って、行列 A の成分を「重み」と言うことにすると、この重みが本質的に有理数であるときには、$S_S^{(N,n)}(\underline{\omega}, A)$ が代数的微分方程式系を満たすことが [KW3] の結果からわかる。
- 新谷ゼータ関数は、可換群に付随したゼータである。同じ手続きで、たとえばより次数の高い上三角行列がなす群 (Heisenberg 群など) に対しても、係数を与える行列たちの成分

[9] 正規化積の言葉で言えば、梯子構造とは $\boxdot_{n \in I \coprod J} a_n = \boxdot_{n \in I} a_n \boxdot_{n \in J} a_n$ ([KiW] などを参照) が成立していることに他ならない。

[10] ゼータの原点での微分という意味で Kronecker の極限公式の一種と考えられる。

の間に、ある種の正値性条件を課せば、その原点 $s=0$ への有理型関数としての解析接続が示される。したがって、ガンマや三角関数を定義することができるが、（両側からの作用に関し起こる）それらの関数等式などを見るためには、変数として $\mathrm{End}(V)$ 全体[11]をとることが必要となる（詳しくは [W]）。

● q-類似もまったく同様にできる。手短にそのあらましを述べたい。

絶対値が 1 でなく零でもない q を固定する。$A=\{a_{ij}\}_{1\le i\le N,1\le j\le n}$ を実部が正の成分をもつ $N\times n$ 型複素行列 とし、$w_j\,(1\le j\le n)$ を複素数とする。$G(\cong\mathbb{C}^\times)$ を $SL_2(\mathbb{C})$ の対角行列からなる可換群とし、$\gamma_{ij}=\begin{pmatrix} q^{a_{ij}/2} & 0 \\ 0 & q^{-a_{ij}/2}\end{pmatrix}\in G$, $g=\frac{1}{q^{1/2}-q^{-1/2}}\begin{pmatrix} q^{w_1/2} & 0 \\ 0 & -q^{-w_1/2}\end{pmatrix}\otimes\cdots\otimes\frac{1}{q^{1/2}-q^{-1/2}}\begin{pmatrix} q^{w_n/2} & 0 \\ 0 & -q^{-w_n/2}\end{pmatrix}\in\mathrm{End}(V)$ とおく。ただし、$V=\left(\mathbb{C}^2\right)^{\otimes n}$ であり、G^n の V への自然な作用を ρ とする。このとき群のゼータ関数 $\zeta^N_{G^n,\rho}(s,g,\underline{\gamma})$ を $\zeta_q(s,A,\underline{\omega})$ と書くと、これは $\zeta(s,A,\underline{\omega})$ の q-類似を与えることがわかる：$[a]_q=\frac{q^{a/2}-q^{-a/2}}{q^{1/2}-q^{-1/2}}$ とおくと

$$\zeta_q(s,A,\underline{\omega})=\sum_{m_1,\dots,m_N=0}^{\infty}\Big\{\prod_{j=1}^{n}[\omega_j+\sum_{i=1}^{N}m_ia_{ij}]_q\Big\}^{-s}. \tag{4}$$

さらに、$\zeta_q(s,A,\underline{\omega})$ は全平面に解析接続され、とくに原点で有理型である。じっさい

$$\zeta_q(s,A,\underline{\omega})=\sum_{k_1,\dots,k_n=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{n}\binom{s+k_j-1}{k_j}q^{-\sum_{j=1}^{n}(s/2+k_j)\omega_j}$$
$$\times\frac{1}{\left(1-q^{-\sum_{j=1}^{n}(s/2+k_j)a_{1j}}\right)\cdots\left(1-q^{-\sum_{j=1}^{n}(s/2+k_j)a_{Nj}}\right)}$$

と表示できる。したがって、Appell の $\mathcal{O}$-関数 [App]（あるいは多重楕円ガンマ関数）

$$\mathcal{O}_q(\omega,\underline{\mathbf{a}}):=\prod_{\underline{\mathbf{n}}\ge\underline{0}}(1-q^{-(\underline{\mathbf{n}}\cdot\underline{\mathbf{a}}+\omega)})$$

（ただし $|q|<1$）を用いると、対応するガンマ関数は以下のように表される：

$$\begin{aligned}\Gamma_q(\underline{\omega},A)^{-1}&:=\coprod_{\underline{\mathbf{m}}\ge\underline{0}}\prod_{j=1}^{n}[\omega_j+\underline{\mathbf{m}}\cdot\underline{\mathbf{a}}_j]_q\\&=q^{-\frac{B_{N+1}\left(\frac12\sum_{j=1}^{n}\omega_j-n\frac{\log(q^{1/2}-q^{-1/2})}{\log q};\frac12\sum_{j=1}^{n}\underline{\mathbf{a}}_j,\right)}{(N+1)!}}\prod_{j=1}^{n}\mathcal{O}_q(\omega_j,\underline{\mathbf{a}}_j).\end{aligned}$$

[11]正確には、作用で不変な部分。

ここで、$B_m(\omega;\underline{\mathbf{a}})$ は Barnes による多重 Bernoulli 多項式であり、$\underline{\mathbf{a}}=(a_1,\ldots,a_r)$ と書くとき、次の母関数の係数として定まる：

$$\frac{e^{-\omega t}}{(1-e^{a_1t})\cdots(1-e^{a_rt})}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{B_m(\omega;\underline{\mathbf{a}})}{m!}t^{m-r}.$$

$\Gamma_q(\underline{\omega},A)$ の関数等式や、正弦関数 $S_q^{(N,n)}(\underline{\omega},A):=\Gamma_q^{(N,n)}(\underline{\omega},A)^{-1}\Gamma_q^{(N,n)}(-\underline{\omega}+\sum_{i=1}^N\underline{\mathbf{a}}^i,A)^{(-1)^N}$ の周期性も示される。

4　関数等式など

非可換な $\underline{\gamma}=(\gamma_1,\ldots,\gamma_r)$ の組に対してはガンマ関数の関数等式は複雑になり、また正弦関数の定義もいくつかの異なる可能性があることは、対応するゼータの満たす梯子構造から明らかであろう。ここではその詳細に触れないが、関数等式の一例を述べ、さらに、先にふれた、[Sh2] にある Barnes の多重ガンマ関数と保形関数の関係式をこの観点から見る。

Example 3: 古典的と量子的の両方の関数等式を備えた 2 重ガンマ関数（*hybrid* double gamma）を紹介する。$G=GL_2(\mathbb{R})$ の元 $\gamma_1=\begin{pmatrix}q&0\\0&1\end{pmatrix}$ $(q>1)$, $\gamma_2=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ をとり、ρ を自然表現とする。$g=\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ とすると $\mathrm{tr}(\gamma_1^m\gamma_2^ng)=q^mx+w+nzq^m$　であるから $\zeta_G(s,g;\gamma_1,\gamma_2):=\sum_{m,n=0}^{\infty}(q^mx+w+nzq^m)^{-s}$。簡単のため、$|w|<\min(x,1),\ x>z\geq1$ と仮定する。二項展開を使えば、$\mathrm{Re}\,s>1$ のとき

$$\zeta_G(s,g;\gamma_1,\gamma_2)=\sum_{\ell=0}^{\infty}\binom{-s}{\ell}\frac{\zeta(s+\ell,\frac{x}{z})w^\ell z^{-s-\ell}}{1-q^{-(s+\ell)}}$$

が得られる。$\zeta(s,\frac{x}{z}),\ s\zeta(s+1,\frac{x}{z}),\ \zeta(s+\ell,\frac{x}{z})\ (\ell\geq2)$ はすべて $s=0$ で正則だから、十分大きい ℓ に対して $|\zeta(\ell,\frac{x}{z})|<1$ であることに注意すれば、$\zeta_G(s,g;\gamma_1,\gamma_2)$ が有理型であることがわかる。したがって、付随するガンマ関数が存在する：

$$\Gamma_{GL_2}^{(2)}(g;\gamma_1,\gamma_2):=\Gamma_{G,\rho}^{(2)}(g;\gamma_1,\gamma_2)=\Big\{\prod_{n,m=0}^{\infty}{}^{\!\!\bullet}\,(q^mx+w+nzq^m)\Big\}^{-1}.$$

関数等式は、Lerch の公式から得られる $\prod_{n=0}^{\infty}y(t+n)=y^{\zeta(0,t)}\prod_{n=0}^{\infty}(t+n)=\sqrt{2\pi}y^{\frac12-t}/\Gamma(t)$

を用いると次のよう書ける [KW4] :

$$\Gamma^{(2)}_{GL_2}\Big(\begin{pmatrix} qx & y \\ qz & w \end{pmatrix}; \gamma_1,\gamma_2\Big) = \sqrt{2\pi} z^{\frac{1}{2}-\frac{x+w}{z}} \Gamma\Big(\frac{x+w}{z}\Big)^{-1} \Gamma^{(2)}_{GL_2}\Big(\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}; \gamma_1,\gamma_2\Big),$$

$$\Gamma^{(2)}_{GL_2}\Big(\begin{pmatrix} x+z & y+w \\ z & w \end{pmatrix}; \gamma_1,\gamma_2\Big) = q^{-\frac{1}{12}} x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\log_q x} G\Big(q^{-1}, -\frac{w}{x}\Big) \Gamma^{(2)}_{GL_2}\Big(\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}; \gamma_1,\gamma_2\Big). \quad \square$$

• 以下、$\zeta^{(r)}_{G,\rho}(s,g;(\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_r))$ は $s=0$ で有理型だとする。

Proposition 4.1. G をリー群とし、$\mathfrak{g}$ をそのリー環とする。$\gamma_0 = e^{\omega_0 X} \in G$ $(X \in \mathfrak{g}, \omega_0 \in \mathbb{C})$ とする。$h \in \mathrm{End}(V)$ に対して次が成り立つ。

$$\frac{\Gamma^{(r+1)}_{G,\rho}\left(h\rho(e^{(t+\omega_0)X});(e^{\omega_0 X},\gamma_1,\ldots,\gamma_r)\right)\Gamma^{(r+1)}_{G,\rho}\left(h\rho(e^{-tX});(e^{\omega_0 X},\gamma_1^{-1},\ldots,\gamma_r^{-1})\right)}{\Gamma^{(r+1)}_{G,\rho}\left(h\rho(e^{tX});(e^{\omega_0 X},\gamma_1,\ldots,\gamma_r)\right)\Gamma^{(r+1)}_{G,\rho}\left(h\rho(e^{-(t-\omega_0)X});(e^{\omega_0 X},\gamma_1^{-1},\ldots,\gamma_r^{-1})\right)} \tag{5}$$
$$= \frac{\Gamma^{(r)}_{G,\rho}\left(h\rho(e^{-tX});(\gamma_1^{-1},\ldots,\gamma_r^{-1})\right)}{\Gamma^{(r)}_{G,\rho}\left(h\rho(e^{tX});(\gamma_1,\ldots,\gamma_r)\right)} \quad \square.$$

いま、次の条件を満たす $h \in \mathrm{End}(V)$ を考えよう :

$$\mathrm{tr}(\rho(g)^{-1}h) = -\,\mathrm{tr}(\rho(g)h) \quad (\forall g \in G). \tag{6}$$

さらに、γ_i たちは本質的に可換とする。つまり、$\gamma_i\gamma_j\gamma_i^{-1}\gamma_j \in \ker\rho$ $(i,j=0,1,\ldots,r)$ という特別な状況を考える。このとき、

$$\begin{aligned}\zeta^{(r)}_{G,\rho}\left(s,h\rho(e^{-tX});(\gamma_1^{-1},\ldots,\gamma_r^{-1})\right) &= \sum_{n_1,\ldots,n_r\geq 0}\left\{\mathrm{tr}\left(h\rho(e^{-tX})\rho(\gamma_1^{-n_1}\cdots\gamma_r^{-n_r})\right)\right\}^{-s} \\ &= \sum_{n_1,\ldots,n_r\geq 0}\left\{-\,\mathrm{tr}\left(h\rho(e^{tX})\rho(\gamma_1^{n_1}\cdots\gamma_r^{n_r})\right)\right\}^{-s}\end{aligned}$$

だから、もしも複素数 $\rho(e^{tX}\gamma_1^{n_1}\cdots\gamma_r^{n_r})$ の偏角が一斉に正（あるいは負）であるとすると、分枝の定め方から、その正負に応じて

$$\zeta^{(r)}_{G,\rho}\left(s,h\rho(e^{-tX});(\gamma_1^{-1},\ldots,\gamma_r^{-1})\right) = e^{\pm\pi i s}\zeta^{(r)}_{G,\rho}\left(s,h\rho(e^{tX});(\gamma_1,\ldots,\gamma_r)\right),$$

となる。したがって

$$\begin{aligned}&\log\Gamma^{(r)}_{G,\rho}\left(h\rho(e^{-tX});(\gamma_1^{-1},\ldots,\gamma_r^{-1})\right) \\ =&-\frac{1}{2}\pi^2\,\mathrm{Res}_{s=0}\,\zeta^{(r)}_{G,\rho}\left(s,h\rho(e^{tX});(\gamma_1,\ldots,\gamma_r)\right) \\ &\quad \pm\pi i\,\mathrm{Res}_{s=0}\frac{\zeta^{(r)}_{G,\rho}\left(s,h\rho(e^{tX});(\gamma_1,\ldots,\gamma_r)\right)}{s} + \log\Gamma^{(r)}_{G,\rho}\left(h\rho(e^{tX});(\gamma_1,\ldots,\gamma_r)\right).\end{aligned}$$

このことから (5) の右辺は次に等しい：

$$\exp\Big\{-\frac{1}{2}\pi^2\operatorname{Res}_{s=0}\zeta^{(r)}_{G,\rho}\left(s,h\rho(e^{tX});(\gamma_1,\ldots,\gamma_r)\right)\pm\pi i\operatorname{Res}_{s=0}\frac{\zeta^{(r)}_{G,\rho}\left(s,h\rho(e^{tX});(\gamma_1,\ldots,\gamma_r)\right)}{s}\Big\}.$$

Example 4: $\gamma_i=e^{\omega_i X}, X=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\in\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ とし、すべての i に対して $\operatorname{Im}\omega_i>0$ とする。$h=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ とすると $G=SL_2(\mathbb{C})$ の自然表現 ρ に対して、h は条件 (6) を満たすことは明らかである。また、今の場合、群のゼータ関数 $\zeta^{(r)}_{G,\rho}\left(s,h\rho(e^{tX});(\gamma_1,\ldots,\gamma_r)\right)$ は多重 Hurwitz ゼータ関数 $\zeta_r(s,t,\underline{\omega})=\sum_{n_1,\ldots,n_r=0}^{\infty}(t+n_1\omega_1+\cdots+n_r\omega_r)^{-s}$ だから、原点で正則であり、対応するガンマ関数は Barnes の多重ガンマ関数 $\Gamma_r(t,\underline{\omega})=\prod_{n_1,\ldots,n_r=0}(t+n_1\omega_1+\cdots+n_r\omega_r)^{-1}$ である。したがって上での議論から次がわかる：

$$\frac{\Gamma_{r+1}\left(t+\omega_0,(\omega_0,\underline{\omega})\right)\Gamma_{r+1}\left(-t,(\omega_0,-\underline{\omega})\right)}{\Gamma_{r+1}\left(t,(\omega_0,\underline{\omega})\right)\Gamma_{r+1}\left(-t+\omega_0,(\omega_0,-\underline{\omega})\right)}=e^{\pi i\zeta_r(o,t,\underline{\omega})}.\quad\square \tag{7}$$

ゼータ正規化積の一般論から ([Vo], [KiW] などを参照) 、正規化積表示での見た目の極が、多重ガンマ関数のすべての極を尽くしていることがわかるので

$$\Gamma_{r+1}\left(t,(\omega_0,\underline{\omega})\right)\Gamma_{r+1}\left(-t+\omega_0,(\omega_0,-\underline{\omega})\right)=e^{-\pi i f_{r+1}(t,(\omega_0,\underline{\omega}))}\prod_{\underline{\mathbf{n}}\geq\underline{0}}(1-e^{2\pi i(t+\underline{\mathbf{n}}\cdot\underline{\omega})})^{-1} \tag{8}$$

を満たすような整関数 $f_{r+1}(t,(\omega_0,\underline{\omega}))$ が存在する。したがって、(7) より,

$$f_{r+1}(t+\omega_0,(\omega_0,\underline{\omega}))-f_{r+1}(t,(\omega_0,\underline{\omega}))=\zeta_r(0,t,\underline{\omega}).$$

である。よって f_{r+1} が ζ_{r+1} に等しいと期待されるが、事実これは正しい。実際、次節で述べる周期積分の特別な形である Raabe 型の公式を用いることにより、Friedman-Ruijsenaars [FR] は $f_{r+1}(t,(\omega_0,\underline{\omega}))=\zeta_{r+1}(0,t,(\omega_0,\underline{\omega}))$ を示している。公式 (8) は、$r=1$ のときに Kronecker の第二極限公式に現れる [Sh2]。

5 周期積分

Raabe の積分公式 (1843) とは、

$$\int_0^1\log\Gamma(t)dt=\frac{1}{2}\log 2\pi$$

というものである。最近になり、関係する論文が 3 篇も出た [Br, EM, FR]。この公式は、Euler [Eu] の有名な定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x)dx = -\frac{\pi}{2}\log 2$ と同値である。ここでは、周期積分の観点から、少し一般的な公式を紹介する。以下、$G = SL_2(\mathbb{C})$ で ρ を自然表現とする。

Example 5: $\gamma_j = \begin{pmatrix} 1 & \omega_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp X_j \in G,\ X_j := \omega_j \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とすると $g = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ に対し $\zeta^{(r)}_{G,\rho}(s, g; \underline{\gamma}) = \zeta_r(s, \operatorname{tr} g, z\underline{\omega})$ $(\underline{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_r) \in \mathbb{C}^r)$ である。多重 Hurwitz ゼータの梯子構造を r 回繰り返し用いると、$x_j > 0$ に対し、$\operatorname{Re} s > r$ のとき次が示される：

$$\begin{aligned}&\int_{x_1}^{x_1+1} \cdots \int_{x_r}^{x_r+1} \zeta^{(r)}_{G,\rho}(s, ge^{t_1X_1}\cdots e^{t_rX_r}; \underline{\gamma})dt_1\cdots dt_r \\ =&\frac{1}{z^r\prod_{k=1}^r(s-k)\prod_{k=1}^r\omega_k}\big(\operatorname{tr} g + z\{x_1\omega_1 + \cdots + x_r\omega_r\}\big)^{-s+r}.\end{aligned} \tag{9}$$

両辺ともに $s \in \mathbb{C}$ への有理型関数としての解析接続を許すので、$\operatorname{Re} s < r$ として Cauchy の積分定理を用いれば

$$\begin{aligned}&\int_{x_1}^{x_1+1} \cdots \int_{x_r}^{x_r+1} \operatorname{Res}_{s=0} \frac{\zeta^{(r)}_{G,\rho}(s, ge^{t_1X_1}\cdots e^{t_rX_r}; \underline{\gamma})}{s^2}dt_1\cdots dt_r \\ =&\frac{1}{z^r\prod_{k=1}^r\omega_k}\cdot \operatorname{Res}_{s=0}\frac{1}{\prod_{k=1}^r(s-k)}\cdot\frac{1}{s^2}(\operatorname{tr} g + z\{x_1\omega_1 + \cdots + x_r\omega_r\})^{-s+r}\end{aligned}$$

がわかる。よって、$H_r = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{r}$ とおくと、定義から計算し次を得る：

$$\begin{aligned}&\int_{x_1}^{x_1+1} \cdots \int_{x_r}^{x_r+1} \log\Gamma^{(r)}_{G,\rho}(ge^{t_1X_1}\cdots e^{t_rX_r}; \underline{\gamma})dt_1\cdots dt_r \\ =&\int_{x_1}^{x_1+1} \cdots \int_{x_r}^{x_r+1} \log\Gamma_r(\operatorname{tr} g + z\{t_1\omega_1 + \cdots + t_r\omega_r\})dt_1\cdots dt_r \\ =&\frac{(-1)^{r-1}}{z^r r!\prod_{k=1}^r\omega_k}(\operatorname{tr} g + z\{x_1\omega_1 + \cdots + x_r\omega_r\})^r\Big\{\log(\operatorname{tr} g + z\{x_1\omega_1 + \cdots + x_r\omega_r\}) - H_r\Big\}.\end{aligned}$$

よって、$\operatorname{tr} g = x_1 = \cdots = x_r = 0,\ z = 1$ とおくと

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 \log\Gamma_r(t_1\omega_1 + \cdots + t_r\omega_r)dt_1\cdots dt_r = 0$$

である。ここで $r = 1$ として Lerch の公式を用いると、冒頭の Raabe の公式が得られる。また、Example 2 で述べたことから、新谷ゼータに付随するガンマについても同様な結果が得られる。なお、解析接続された (9) において $\operatorname{tr} g = x_1 = \cdots = x_r = 0$ とおくと、$\operatorname{Re} s < r$ のとき $\int_0^1\cdots\int_0^1 \zeta_r(s, t_1\omega_1 + \cdots + t_r\omega_r, \underline{\omega})dt_1\cdots dt_r = 0$ が得られるが、[FR] では、これを用いて前節の最後に述べた $f_{r+1}(t, (\omega_0, \underline{\omega}))$ を決定している。 □

最後に、非可換ガンマ関数に関する周期積分の一例を述べる。

Example 5: $\gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$, $g = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in \mathrm{End}\,\mathbb{C}^2$ とする。たとえば、$\frac{x+w}{z} \geq \frac{y}{w} > 0$, $w \neq 0$ のとき、群のガンマ関数 $\Gamma_{G,\rho}(g, (\gamma_1, \gamma_2))$ に対し

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_0^1 \log \Gamma_{G,\rho}\Big(\begin{pmatrix} x+pz+ty+ptw & y+pw \\ z+tw & w \end{pmatrix}; (\gamma_1,\gamma_2)\Big) dtdp \\
=&\frac{1}{w}\left[(\mathrm{tr}\, g)\{2-\log(\mathrm{tr}\, g)\} + \left(\frac{\det g + w^2}{w}\right) \left\{ \left(1 - \log(\mathrm{tr}\, g) - \frac{1}{2}(\log(\mathrm{tr}\, g))^2\right) \right.\right. \\
&\left.\left. +(\log(\mathrm{tr}\, g) - 1)\,\mathrm{Li}_1\left(\frac{\det g + w^2}{w\,\mathrm{tr}\, g}\right) + \mathrm{Li}_2\left(\frac{\det g + w^2}{w\,\mathrm{tr}\, g}\right) \right\} \right].
\end{aligned}$$

が成立する。ただし $\mathrm{Li}_k(z) := \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{z^\ell}{\ell^k} \quad (k=1,2,\dots)$ である。詳しくは [KW4] を参照されたい。 □

Remark: 次のフーリエ展開は Kummer (1847) による：

$$\log\Gamma(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\log n)\sin(2\pi nx)}{n} + \frac{\log(2\pi)+\gamma}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi nx)}{n} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2\pi nx)}{n} + \frac{1}{2}\log(2\pi).$$

Raabe の公式は定数項（$\mathbb{Z}$ の自明表現）を取り出したものである。じっさい、より一般に

$$\int_0^1 \log\Gamma(t)\,\sin(2\pi nt)dt = \frac{\log 2\pi n + \gamma}{2\pi n} \quad (n=1,2,\dots)$$

が成り立つ。[EM] にはこのような公式が満載である。重み $\underline{\omega}$ が有理数のときには、多重ガンマに対しても Kummer 型の公式が得られている [KK2]。したがって、表現論的には、$\gamma_1,\dots,\gamma_r$ の生成する部分群 $\Gamma \subset G$ に関する $\log\Gamma_{G,\rho}(x, \underline{\gamma})$ の既約分解成分を求めることも興味深い。 □

Problem 2: 正規化積については、積の法則 $\mathop{\prod\!\!\!\!\!\!\cdot}\, a_n b_n = \mathop{\prod\!\!\!\!\!\!\cdot}\, a_n \mathop{\prod\!\!\!\!\!\!\cdot}\, b_n$ や絶対値の交換 $\mathop{\prod\!\!\!\!\!\!\cdot}\, |a_n| = |\mathop{\prod\!\!\!\!\!\!\cdot}\, a_n|$ は、一般には不成立である（少し詳しい議論と例は [KiW] にある）。しかし、違いは高々非零因子程度であり、それをアノマリーと呼ぶ（[KV] などを参照）。そこで、上で述べたような周期積分を用いてアノマリーの決定ができないだろうか。 □

Problem 3: 本稿では不変式として tr のみを扱ったが、たとえば、行列 A の特性多項式の係数から定義されるゼータ・ガンマ・三角関数と、冪の跡 $\mathrm{tr}(A^k)$ から定義されるそれらとの関係を求めよ（正規化積版 Newton の関係式）。その際、さまざまな不変式に対応する

ゼータやガンマ、三角関数の関係式の研究における係数の決定に周期積分が使えるはずである。 □

参考文献

[AAR] Andrews, G. E., Askey, R. and Roy, R.: "Special Functions." Encyclopedia of Mathematics and its Applications **71**, Cambridge University Press, 1999.

[App] P. Appell: Sur une class de fonctions analogues aux fonctions Eulériennes, *Math. Ann.* **19** (1882), 84–102.

[Ba1] Barnes, E. W.: Genesis of the double Gamma function, *Proc. London. Math. Soc.* **31** (1900), 358–381.

[Ba2] ______: On the theory of the multiple gamma functions. *Trans. Cambridge Philos. Soc.* **19** (1904), 374–425.

[Br] Broughan, K.: Vanishing of the integral of the Hurwitz zeta function, *Bull. Austral. Math. Soc.* **65** (2002), 121–127.

[De] Deninger, C.: On the Γ-factors attached to motives. *Invent. math.* **104** (1991), 245–261.

[EM] Espinosa, O. and Moll, V.: On some integrals involving the Hurwitz zeta function: Part 1, *The Ramanujan J.* **6** (2002), 159–188.

[Eu] Euler, L.: De summis serierum numeros Bernoullianos involventium. Novi comm. acad. scient. Petropolitanae **14** (1769) 129–167 (Opera Omnia I-15, pp.91–130).

[FR] Friedman, E. and Ruijsenaars, S.: Shintani-Barnes zeta and gamma functions. *Advances in Math.* **187** (2004), 362-395.

[Ha] Hardy, G.H.: "Divergent Series." 1949. Second Edition. AMS Chelsea Publ. 1991.

[Höl] Hölder, O.: Ueber eine transcendente Function. Göttingen Nachrichten 1886 Nr.16, 514–522.

[Ill] Illies, G.: Regularized products and determinants. *Commun. Math. Phys.* **220** (2001), 69–94.

[KKSW] Kimoto, K., Kurokawa, N., Sonoki, C., and Wakayama, M.: Some examples of generalized zeta regularized products. *Kodai Math. J.* **27** (2004), 321—335.

[KiW] Kimoto, K. and Wakayama, M.: Remarks on zeta regularized products. *Internat. Math. Res. Notices* **2004:17** (2004), 855-875.

[KV] Kontsevich, M. and Vishik, S.: Geometry of determinants of elliptic operators. "Functional Analysis on the Eve of the 21st Century," Vol.1 (New Brunswick, New Jersey, 1993), Progr. Math., **131** (1995), 173–197 Birkhäuser.

[K1] Kurokawa, N.: Multiple sine functions and Selberg zeta functions. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **67** (1991), 51–64.

[K2] ———: Gamma factors and Plancherel measures. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **68** (1992), 256–260.

[K3] ———: 新谷卓郎の二重三角関数– 実２次体のクロネッカー青春の夢の実現へ –. 数学のたのしみ２００４年冬号特集「新谷卓郎の数学」. To appear.

[KK1] Kurokawa, N. and Koyama, S.: Multiple sine functions. *Forum Math.* **15** (2003), 839–876.

[KK2] ———: Kummer's formula for multiple gamma functions. *J. Ramanujan Math. Soc.* **18** (2003), 87–107.

[KW1] Kurokawa, N. and Wakayama, M.: Generalized zeta regularizations, quantum class number formulas, and Appell's O-functions. *The Ramanujan J.*. To appear.

[KW2] ——— : Zeta regularizations. “Representations of Lie groups, harmonic analysis on homogeneous spaces and quantization” (Edited by G. Van Dijk and V.F. Molchanov) *Acta Appli. Math.* **81** (2004), 147-166.

[KW3] ——— : Differential algebraicity of multiple sine functions. *Lett. Math. Phys.* To appear.

[KW4] ——— : Gamma and sine functions for Lie groups and period integrals. Preprint 2004.

[Le] Lerch, M.: Dalši studie v oboru Malmsténovských řad. *Rozpravy České Akad.* **3** (1894), No. 28, 1–61.

[Rui] Ruijsenaars, S.: Special functions defined by analytic difference equations. “Special Functions 2000,” J. Bustoz et al. (eds.) NATO Sci. Ser. **30** (2001), 281–331.

[Sa] Saito, S.: 新谷卓郎の業績, 総実代数体の L-関数の特殊値. 数学のたのしみ２００４年冬号特集「新谷卓郎の数学」. To appear.

[Sh1] Shintani, T.: On evaluation of zeta functions of totally real algebraic number fields at non-positive integers. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA* **23** (1976), 393–417.

[Sh2] ——— : On a Kronecker limit formula for real quadratic fields. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* **24** (1977), 167–199.

[Vo] Voros, A.: Spectral functions, special functions and the Selberg zeta functions. *Commun. Math. Phys.* **110**, 439–465 (1987).

[W] Wakayama, M.: Remarks on Shintani’s zeta function. Preprint 2004.