Dade 予想, Navarro 予想とその周辺

大阪教育大学・教育学部・教養学科　宇野勝博

１０年前、愛媛大学で行われた「第３９回代数学シンポジウム」で「Dade 予想とその周辺」というタイトルで講演させて頂いた. ここでは, この１０年でこの分野のいくつかの予想を取り巻く状況がどう変わっていったのかを概観する.

以下の記号を固定する. （一般的には [NT] 参照.）

G : 有限群,　p : 素数,　P : G の Sylow p-部分群,　ζ : 1 の原始 $|G|$-乗根,

$\mathcal{P}$: $\mathbb{Z}[\zeta]$ の $\mathcal{P} \cap \mathbb{Z} = p\mathbf{Z}$ を満たす素イデアル,　R : $\mathbb{Z}[\zeta]$ の $\mathcal{P}$ による完備化,

k : 剰余体 $R/\mathcal{P}R$ （標数 p）

$\mathrm{Irr}(G)$: G の複素既約指標の全体のなす集合.

このとき, $\mathbb{Q}(\zeta)$ と k は, G のすべての部分群に対して分解体となる. また,

$$\frac{|G|}{\chi(1)} \in \mathbb{Z} \quad \text{for} \quad \text{all } \chi \in \mathrm{Irr}(G)$$

となることはよく知られている. 既約表現の次数である $\chi(1)$ も重要であるが, $\frac{|G|}{\chi(1)}$ も χ に対応する群環 $\mathbb{C}G$ の中心的べき等元 $\frac{\chi(1)}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g^{-1})g$ の導手に相当する重要な量である. $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ に対し, $d(\chi)$ と $r(\chi)$ を次で定義する.

$$\frac{|G|}{\chi(1)} = p^{d(\chi)}r(\chi), \quad \text{ただし} \quad (p, r(\chi)) = 1.$$

1. ３つの予想

有限群の表現論において懸案とされる ３つの予想を述べる. まず, その予想の歴史的な流れを見ると次のようになる.

MAIN	Broué	Dade
MaKay (1972)		
Alperin (1975)		
	Broué(1988)	
	Broué(1989)	Dade (1990)
	Broué, Rickard (1996)	
Isaacs, Navarro (2002)		Dade, U (2002)
Navarro (2003)		Dade, U (2003)

次セクション以降で各予想について詳しく説明する.

2. MAIN Conjecture

Conjecture 2.1. (McKay [M72], Alperin [Al75])

$$\sharp\{\chi \in \mathrm{Irr}(G) \mid (p, \chi(1)) = 1\} = \sharp\{\varphi \in \mathrm{Irr}(N_G(P)) \mid (p, \varphi(1)) = 1\}?$$

Remark 2.2. P は $N_G(P)$ の *Sylow* p-部分群でもある．従って，$|P| = p^a$ とすると，$(p, \chi(1)) = 1$, $(p, \varphi(1)) = 1$ は，それぞれ，$d(\chi) = a$, $d(\varphi) = a$ と置き換えることができる．

上の予想から 30 年後に発表された Isaacs, Navarro 予想は, 次数の p と素な部分に着目したという点で画期的であり, 逆に, このことに 30 年間も気付かなかったことも驚きと言える.

Conjecture 2.3. (Isaacs, Navarro [IN02]) $1 \leq r \leq p/2$ である任意の $r \in \mathbb{Z}$ に対して，

$$\sharp\{\chi \in \mathrm{Irr}(G) \mid d(\chi) = a,\ r(\chi) \equiv \pm r \mod p\} = \sharp\{\varphi \in \mathrm{Irr}(N_G(P)) \mid d(\varphi) = a,\ r(\varphi) \equiv \pm r \mod p\}?$$

さらに Navarro は, 次数だけでなく指標の値にも注目し, ガロア群の作用を詳細に調べた結果, ガロア群 $Gal(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$ の元 σ で下の条件 $(*)$ を満たすものついては, その既約指標の集合における軌道が部分群のそれと関係しそうであることに思い至った.

(*) $\sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$ を満たし、かつ 1 の p'-乗根 ξ に対し $\sigma(\xi) = \xi^p$ となるもの

Conjecture 2.4. (Navarro [N] (2003)) $1 \leq r \leq p/2$ である任意の $r \in \mathbb{Z}$ に対して，$\{\chi \in \mathrm{Irr}(G) \mid d(\chi) = a,\ r(\chi) \equiv \pm r \mod p\}$ と $\{\varphi \in \mathrm{Irr}(N_G(P)) \mid d(\varphi) = a,\ r(\varphi) \equiv \pm r \mod p\}$ は，$\langle\sigma\rangle$-集合として同型か？

これらの予想はより精密な形で p-block ごとに述べられるので, 次に, p-blocks の概念を説明しておく.

$\chi_1, \chi_2 \in \mathrm{Irr}(G)$ に対して, $\chi_1 \sim \chi_2$ を次で定義する.

$$\chi_1 \sim \chi_2 \iff \frac{|G|\chi_1(g)}{|C_G(g)|\chi_1(1)} \equiv \frac{|G|\chi_2(g)}{|C_G(g)|\chi_2(1)} \mod \mathcal{P},\ \forall g \in G$$

(Note: 上の値は $\mathbb{Z}[\zeta]$ に含まれることが知られている.)

この $\sim$ は, $\mathrm{Irr}(G)$ に（ p には依存するが）$\mathcal{P}$ に依存しない同値関係を与える．この同値関係による同値類を p-block という．p-block については, 以下のことが知られている.

B を G の p-block とする.

$$e_B = \sum_{\chi \in B} \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^{-1})g.$$

とおくと, e_B は, group algebra RG の中心 $Z(RG)$ に含まれる idempotent （B の block idempotent という）となり，B について和 $\sum_B e_B$ とると RG の単位元に一致する．従って，$e_B RG$ は，RG の R-subalgebra であり（ただし, 単位元は e_B）R-algebra として $RG = \prod_B e_B RG$ となる.

$\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ が p-block B に含まれるための必要十分条件は，（χ を R-線形に拡張して RG 上定義されたものとして）$\chi(e_B) \neq 0$ である．また, 直既約（右） RG-加群 M が $Me_B \neq \{0\}$ を満たすとき, M は B に含まれると言い, 直既約（右） kG-加群 N が $N\overline{e_B} \neq \{0\}$ を満たすとき, N は B に含まれると言う．ただし, $\overline{e_B}$ は, e_B の自然な準同型 $RG \to kG$ による像である.

B を G の p-block とする. $\chi \in B$ をとり，

$$\frac{|G|\chi(g)}{|C_G(g)|\chi(1)} \notin \mathcal{P}$$

となる $g \in G$ をすべて考え, その中心化群 $C_G(g)$ の Sylow p-部分群をとる. このとき, このようにして得られた p-部分群達の包含関係による極小元は互いに G の元による共役で移りあう. この極小元を B の defect 群と言う. p-block の定義により, この極小元は $\chi \in B$ の取り方に依存しない. また, defect 群は, G の元による共役を度外視して一意的に定まる. B の defect 群 D の位数が p^d のとき, B の defect は d であると言い, この d を $d(B)$ で表す. 即ち, $|D| = p^{d(B)}$. このとき, 次のことが知られている.

$$d(B) = \max\{d(\chi) |\ \chi \in B\}.$$

特に, $(p, \chi(1)) = 1$ となる χ が p-block B に存在するとき, B の defect 群 は Sylow p-部分群でなければならない.

次に, 部分群の p-block の G への誘導について述べる.

C を G の共役類とし, $\hat{C} = \sum_{g \in C} g$ とおく. このとき, $\{\ \hat{C}\ \}_C$ は, $Z(RG)$, $Z(kG)$ の基底となる. ここで, $\omega : Z(kG) \to k$ を

$$\omega(\hat{C}) = \overline{\frac{|G|\chi(g)}{|C_G(g)|\chi(1)}}$$

ただし, $g \in C$, と定義すると ω は, χ を含む p-block B にのみ依存する写像で k-algebra としての準同型を与える. この ω を ω_B と書く.

Definition 2.5. *B を G の p-block とし, $H \le G$ とする. このとき, H の p-block b が G の任意の共役類 C に対して,*

$$\omega_B(\hat{C}) = \omega_b(C \hat{\cap} H)$$

を満たしているとき, b は B を誘導すると言い, $b^G = B$ と書く.

部分群の block との関係として, 次は重要である. この定理により, G の表現は $N_G(P)$ の表現, 一般に p-部分群の正規化群の表現と密接に関係していることがうかがえる.

Theorem 2.6. (Brauer の第一主定理) *D を G の p-部分群とする. このとき, $N_G(D)$ の defect 群が D の p-block b は, G の p-block B を誘導し, b に $b^G = B$ を対させる写像は, 全単射*

$$\{N_G(D) \text{ の } p-block \text{ で } defect \text{ 群が } D \text{ のもの }\} \longleftrightarrow \{\ G \text{ の } p-block \text{ で } defect \text{ 群が } D \text{ のもの }\}$$

を導く.

Brauer の第一主定理によって b と B が対応しているとき, $B \leftrightarrow b$ と書く. ただし, $B \leftrightarrow b$ であっても, B, b それぞれに含まれる既約指標間にどれだけの関係があるのかについてはあまり分かっていない.

Conjecture 2.4 は, 以下のように p-block ごとに述べることができる.

Conjecture 2.7. (MAIN) *条件 (*) を満たす $\sigma \in Gal(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$ を固定する. B を σ-不変な G の p-block, D を B の defect 群とし, $|D| = p^d$ とおく. また, b を B と $B \leftrightarrow b$ の関係にある $N_G(D)$ の p-block とする. このとき, $1 \le r \le p/2$ である任意の $r \in \mathbb{Z}$ に対して, $\{\chi \in B \mid d(\chi) = d,\ r(\chi) \equiv \pm r \mod p\}$ と $\{\varphi \in b \mid d(\varphi) = d,\ r(\varphi) \equiv \pm r \mod p\}$ は, $\langle\sigma\rangle$-集合として同型か ?*

もとの予想は, defect 群が Sylow p-部分群である p-block に含まれる指標のみについての予想であるが, 上の MAIN Conjecture は, すべての p-block, 従って, すべての指標についての予想となる.

3. Broué Conjecture

Broué Conjecture は, 指標値, 加群の圏についての内容を含む. ただし, defect 群が可換という条件下での話である. 詳しくは, Rickard のホームページ参照.

http://www.maths.bris.ac.uk/ majcr/adgc/adgc.html

Conjecture 3.1. (Broué [B90], [B93], 1980's) $B \leftrightarrow b$ *であると仮定する. B と b が可換な不足群 D をもつとき次が成立する ?*

(i) (Perfect Isometry Conjecture) 全単射 $f : B \to b$ と写像 $\varepsilon : B \to \{\pm 1\}$ が存在し,

$$\mu(g,h) = \sum_{\chi \in B} \varepsilon(\chi)\chi(g)f(\chi)(h), \quad (g \in G, h \in N_G(D))$$

とおくとき次を満たす;

(a) $\mu(g,h) \neq 0 \Longrightarrow$

g と h はともに p と素な位数をもつか, あるいは, ともに p の倍数である位数をもつ.

(b) $\mu(g,h)/|C_G(g)|$ と $\mu(g,h)/|C_{N_G(D)}(h)|$ は R の元.

(ii) (Derived Equivalence Conjecture) $e_B RG$ と $e_b RN_G(D)$ の加群圏の導来圏は三角圏として同値 ?

$$D^b(\mathrm{mod}(e_B RG)) \cong D^b(\mathrm{mod}(e_b RN_G(D)) \ ?$$

(iii) (Splendid Equivalence Conjecture, Rickard [Ri96], Broué) 各項 C_i が *p-permutation* かつ $\Delta(D)$-射影的な RG-$RN_G(D)$ 両側加群で左 RG-射影的かつ右 $RN_G(D)$-射影的なものからなる有限鎖複体（ただし, $\Delta(D) = \{(g, g^{-1}) \mid g \in D\}$）

$$\mathbf{C} : \cdots \to C_{i+1} \to C_i \to \cdots$$

で $\mathbf{C} \otimes_{RN_G(D)} \mathbf{C}^* \cong e_B RG$ および $\mathbf{C}^* \otimes_{RG} \mathbf{C} \cong e_b RN_G(D)$ (*homotopy equivalence*) を満たすものが存在する ? 特に, この $\mathbf{C}$ は, $D^b(\mathrm{mod}(e_B RG))$ と $D^b(\mathrm{mod}(e_b RN_G(D))$ 間の同値を与える.

Remark 3.2. (i) *p-permutation* かつ $\Delta(D)$-射影的な加群とは, $\Delta(D)$-加群からの誘導で得られる $G \times N_G(D)$-加群の直和因子となっている加群のことである.

(ii) Conjecture (iii) の性質をもつ RG-$RN_G(D)$-加群の有限鎖複体が存在することと同様の性質をもつ kG-$kN_G(D)$-加群の有限鎖複体が存在することは同値である.

Broué Conjecture も元の形 Conjecture 3.1 (i) から Rickard による森田同値の理論の導来圏への拡張を受け, より強い形 (iii) へ変化した. 即ち, 以下の命題が成立する.

Theorem 3.3. (Broué) *Derived Equivalence Conjecture が正しければ Perfect Isometry Conjecture も正しい.*

さらに, Isaacs-Navarro Conjecture を見た Broué は, ただちに, $r(\chi)$ と Broué Conjecture の関係について注意した.

Theorem 3.4. (Broué) $B \leftrightarrow b$ *は Derived Equivalence Conjecture を満たすとする. このとき, 全単射 $f : B \to b$ が存在し, $d(\chi) = d(f(\chi))$ と $r(\chi) \equiv \pm r(f(\chi)) \mod p$ がすべての $\chi \in B$ について成立する.*

また, ガロア群の作用との関係は次のようになる.

Remark 3.5. *Splendid Equivalence Conjecture における B と $\mathbf{C}$ が σ-不変であれば, 全単射 $f : B \to b$ は σ と compatible である:*

$$f(\sigma(\chi)) = \sigma(f(\chi)) \ \textit{for all} \ \chi \in B.$$

従って, $B \leftrightarrow b$ に対し, *Splendid Equivalence Conjecture* が σ-不変な $\mathbf{C}$ によって成立すれば, *MAIN Conjecture* も B に対して成立する.

Question. B が σ-不変であるとき, Splendid Equivalence Conjecture の $\mathbf{C}$ として σ-不変なものが取れるか？

4. Dade Conjecture

まず, 定義をいくつか与える.

G の p-部分群 P が radical $\Longleftrightarrow O_p(N_G(P)) = P$ (ただし, $O_p(H)$ は, H の最大正規 p-部分群)

G の p-部分群の鎖

$$\underline{C} : O_p(G) < P_1 < P_2 < \cdots < P_n$$

が次を満たすとき, radical p-鎖という.

$$O_p(\cap_{i=1}^{j} N_G(P_i)) = P_j \quad \text{for all } j \text{ with } 1 \leq j \leq n.$$

$\mathcal{R}$: G の radical p-鎖の集合, $\mathcal{R}/G$: $\mathcal{R}$ の G-共役類の代表系, $N_G(\underline{C}) := \cap_{i=1}^{n} N_G(P_i)$, $|\underline{C}| := n$

Dade Conjecture の最初の形（ordinary form）は以下で与えられる.

Conjecture 4.1. (Dade [Da92]) *B を defect 群が D である G の p-block とし, $D \neq \{1\}$, かつ $O_p(G) = \{1\}$ であるとする. このとき, すべての d について以下が成立する?*

$$\sum_{\underline{C} \in \mathcal{R}/G} (-1)^{|\underline{C}|} \sharp\{\varphi \in \mathrm{Irr}(N_G(\underline{C})) |\ \varphi \in b, b^G = B, d(\varphi) = d\} = 0$$

これに, $r(\chi)$ と σ を関与させると次のようになる.

Conjecture 4.2. *B を defect 群が D である G の p-block とし, $D \neq \{1\}$, かつ $O_p(G) = \{1\}$ であるとする. このとき, すべての d と r ($1 \leq r \leq p/2$) について以下が成立する?*

$$\sum_{\underline{C} \in \mathcal{R}/G} (-1)^{|\underline{C}|} \sharp\{\varphi \in \mathrm{Irr}(N_G(\underline{C})) |\ \varphi \in b, b^G = B, d(\varphi) = d, r(\varphi) \equiv \pm r \mod p\} = 0$$

Conjecture 4.3. *条件 (*) を満たす $\sigma \in Gal(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$ を固定する. B を defect 群が D である G の p-block とし, $D \neq \{1\}$, かつ $O_p(G) = \{1\}$ であるとする. このとき, すべての d, i と r ($1 \leq r \leq p/2$) について以下が成立する?*

$$\sum_{\underline{C} \in \mathcal{R}/G} (-1)^{|\underline{C}|} \sharp\{\varphi \in \mathrm{Irr}(N_G(\underline{C})) |\ \varphi \in b, b^G = B, d(\varphi) = d, r(\varphi) \equiv \pm r \ \mathrm{mod} p, \sigma^i(\varphi) = \varphi\} = 0$$

Remark 4.4. (i) *すべての covering group を含めて Dade Conjecture（Conjecture 4.1）(resp. Conjecture 4.2) が正しければ, MaKay-Alperin (resp. Isaacs-Navarro) Conjecture も正しい.* ([Da92], [Da94])

(ii) *D が可換であるとする. このとき, Broué の Perfect Isometry Conjecture は Dade Conjecture（Conjecture 4.1）を導く.* （[Us97] 参照）

5. Evidences, Results

これらの予想共通に知られている一般的結果は余りなく, defect 群が巡回群であるときの結果があるのみである.（Theorem 5.1） 証明は次のようになされる. まず, Rouquier [Rq01] では, G の p-block B の defect 群が巡回群であるときの Broué の Splendid Equivalent Conjecture が証明されている. さらに, その証明を見ると導来圏の同値を与える有限鎖複体は, B を不変にするガロア群の元 σ によって不変であることがわかる. 従って, MAIN Conjecture も正しい. （Theorem 3.4, Remark 3.5）また, Remark 4.4 (ii) から Dade Conjecture も正しい.

Theorem 5.1. *p-block B の defect 群が巡回群であるとする. このとき, 前節のすべての conjecture は B について正しい.*

各予想についての結果は概ね以下の通りである.

A. MAIN Conjecture は次の場合に正しい.

散在型単純群, 対称群, 可解群, $+\alpha$

B. Broué Conjecture (Splendid Equivalence Conjecture) は次の場合に正しい.
（詳しくは http://www.maths.bris.ac.uk/ majcr/adgc/adgc.html を参照のこと.）

対称群, defect 群が $C_2 \times C_2$ or $C_3 \times C_3$ の p-block, $+\alpha$

C. Dade Conjecture (Mainly without σ) は次の場合に正しい.
（詳しくはこの報告の最後のセクションを参照のこと.）

対称群, いくつかの単純群の系列, Fi'_{24}, BM, M 以外の散在型単純群 , $+\alpha$

6. Examples

ここでは, defect 群が非可換な p-block の例を与え, MAIN Conjecture と Dade Conjecture について考える.

例 1. G を Conway の 3 番目の散在型単純群 Co_3, $p = 5$ とする. （$|G| = 2^{10} \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$.）

Sylow 5-部分群 P は, 位数 5^3 の extra special 5-群 : $P = \langle a, b | a^5 = b^5 = 1, [a,b]^5 = 1, [[a,b],a] = [[a,b],b] = 1\rangle$.

G は, principal 5-block B_0 （自明な加群を含む block）と defect 群が位数 5 の巡回群である 5-block 1 個, defect 群が自明な 5-block 11 個をもつ. このうち, Conjecture の対象となるのは, defect 群が自明でないものである. さらに, defect 群が巡回群である 5-block については, Theorem 5.1 によりすべての予想が正しいことがわかる. 従って, 以下, B_0 についてのみ考える.

b_0 を $N_G(P)$ の principal 5-block （この場合, $N_G(P)$ の unique な 5-block）とすると, $b_0^G = B_0$（即ち, $B_0 \leftrightarrow b_0$）であり, $|N_G(P)| = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^3$ となっている.

まず MAIN Conjecture について考える. B_0, b_0 ともに 26 個の既約指標を含み, d, r の値によって分類すると個数 $\sharp\{\chi \in B \mid d(\chi) = d \text{ and } r(\chi) \equiv \pm r \mod 5\}$ は次のようになる.

(d, r)	$(3, 1)$	$(3, 2)$	$(2, 1)$	$(2, 2)$
B_0	10	10	2	4
b_0	10	10	2	4

次に, これらの 26 個ずつの既約指標値のうち, 有理数でない所を指標表から抜き出すと次を得る.（Atlas [At] および [O] 参照）

	1	$11A$	$11B$	$20A$	$20B$	$22A$	$22B$	d	r
	896	b_{11}	b_{11}^*	$-$	$-$	b_{11}	b_{11}^*	3	2
	896	b_{11}^*	b_{11}	$-$	$-$	b_{11}^*	b_{11}	3	2
B_0 :	3520	$-$	$-$	$5i$	$-5i$	$-$	$-$	2	2
	3520	$-$	$-$	$-5i$	$5i$	$-$	$-$	2	2
	20608	b_{11}	b_{11}^*	$-$	$-$	b_{11}	b_{11}^*	3	1
	20608	b_{11}^*	b_{11}	$-$	$-$	b_{11}^*	b_{11}	3	1

	1	$4A$	$4C$	$8A$	$8B$	$8C$	$8D$	$12A$	$12B$	$20A$	$20B$	$24A$	$24B$	$24C$	$24D$	d	r
	1	$-$	$-$	$-i$	i	i	$-i$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-i$	i	$-i$	i	3	2
	1	$-$	$-$	$-i$	i	$-i$	i	$-$	$-$	$-$	$-$	i	$-i$	i	$-i$	3	2
	1	$-$	$-$	i	$-i$	$-i$	i	$-$	$-$	$-$	$-$	i	$-i$	i	$-i$	3	2
	1	$-$	$-$	i	$-i$	i	$-i$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-i$	i	$-i$	i	3	2
	2	$-$	$-$	$-$	$-$	$-2i$	$2i$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-i$	i	$-i$	i	3	1
	2	$-$	$-$	$-$	$-$	$2i$	$-2i$	$-$	$-$	$-$	$-$	i	$-i$	i	$-i$	3	1
b_0 :	2	$-2i$	$2i$	$-$	$-$	$-$	$-$	$2i$	$-2i$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	3	1
	2	$-2i$	$2i$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-i$	i	$-$	$-$	η	$-\overline{\eta}$	$-\eta$	$\overline{\eta}$	3	1
	2	$-2i$	$2i$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-i$	i	$-$	$-$	$-\eta$	$\overline{\eta}$	η	$-\overline{\eta}$	3	1
	2	$2i$	$-2i$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-2i$	$2i$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	3	1
	2	$2i$	$-2i$	$-$	$-$	$-$	$-$	i	$-i$	$-$	$-$	$-\overline{\eta}$	η	$\overline{\eta}$	$-\eta$	3	1
	2	$2i$	$-2i$	$-$	$-$	$-$	$-$	i	$-i$	$-$	$-$	$\overline{\eta}$	$-\eta$	$-\overline{\eta}$	η	3	1
	20	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$5i$	$-5i$	$-$	$-$	$-$	$-$	2	2
	20	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-5i$	$5i$	$-$	$-$	$-$	$-$	2	2

$$(b_{11} = (-1+11i)/2, \quad b_{11}^* = (-1-11i)/2, \quad \eta = -e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{12}} - e^{\frac{5\pi\sqrt{-1}}{12}})$$

ここで, 条件 (*) を満たす $\sigma \in Gal(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$ をとると

$$\sigma(11i) = 11i, \quad \sigma(i) = i, \quad \sigma(\eta) = \eta, \quad \sigma(5i) = -5i$$

となる. σ-不変でないものは, どちらも $(d,r) = (2,2)$ の 2 個だけなので MAIN Conjecture は成立する.

次に, Dade Conjecture について考える. まず, radical 5-鎖の共役類の代表系を決定する.

P_1 を $5B$-element （$5B$ と名付けられた位数 5 の元の共役類に入る元）で生成された部分群とし, S を $N_G(P_1)$ の Sylow 5-部分群（ 位数 5^2 の基本可換群）とする. G の位数 5 の部分群は $5A$-element で生成されたものと $5B$-element で生成されたもの, 2 個の共役類があるが, $5A$-element で生成された方は, radical ではなく, $5B$-element で生成されたものは radical である. また, 位数 5^2 の部分群は, すべて radical ではないことも容易にわかる. 従って, G の radical 部分群の共役類の代表系は $\{1\}$, P_1, P である.

以上のこととから radical 5-鎖の共役類の代表系は

$$\underline{C}_1 : 1, \quad \underline{C}_2 : 1 < P_1, \quad \underline{C}_3 : 1 < P_1 < S, \quad \underline{C}_4 : 1 < P$$

であり, $N_G(\underline{C}_2) = N_G(P_1) \cong (5:4) \times A_5$, $N_G(\underline{C}_3) = N_G(P_1) \cap N_G(S) \cong (5:4) \times D_{10}$ となる. （$(5:4)$ は位数 5 の正規部分群に位数 4 の群が忠実に作用するときの半直積, A_5 は 5 次交代群, D_{10} は位数 10 の 2 面体群.）

$N_G(P_1)$ は, principal 5-block B_1 と defect 群が P_1 の 5-block B' をもち, B_1 のみが B_0 を誘導する. ($B_1^G = B_0$.)（ちなみに, B' は, G の defect 群が P_1 の 5-block と Brauer の第 1 主定理で対応するものである. ） （Recall : $N_G(P_1)$ の Sylow 5-部分群 S は, 位数 5^2 の基本可換部分群.）

$N_G(P_1) \cap N_G(S)$ は, principal 5-block B_2 のみをもち, $B_2^G = B_0$ となっている.

B_1 と B_2 の既約指標を d, r によって分類すると個数は次のようになる.

(d,r)	$(3,1)$	$(3,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(-1)^{\|\underline{C}_i\|}$	ℓ
B_0	10	10	2	4	$+$	18
b_0	10	10	2	4	$-$	18
B_1	0	0	10	10	$-$	8
B_2	0	0	10	10	$+$	8

（ℓ は, 標数 5 の閉体上の既約指標の同値類の個数）

Remark 6.1. B_1 と B_2 は, ともに S を *defect* 群にもち, *Brauer* の第 *1* 主定理によって対応している. 即ち, $B_1 \leftrightarrow B_2$. さらに, 条件 (*) を満たす $\sigma \in Gal(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$ をとると, 次の *Rouquier* の定理により B_1 と B_2 に対し *Splendid Equivalence Conjecture* が σ-不変な $\mathbf{C}$ によって成立する. 特に, *MAIN Conjecture* が B_1 に対して成立する. 即ち, 任意の $d, r \in \mathbb{Z}$, $1 \le r \le 2$ に対し,

$$\{\chi \in B_1 \mid d(\chi) = d \text{ and } r(\chi) \equiv \pm r \mod 5\}, \quad \{\varphi \in B_2 \mid d(\varphi) = d \text{ and } r(\varphi) \equiv \pm r \mod 5\}$$

は, $\langle \sigma \rangle$ -集合として同形である.

Theorem 6.2. (Rouquier [Rq01]) G の *Sylow* p-部分群が, 正規可換 p-部分群 P_1 と巡回 p-部分群 P_2 の直積であるとする. このとき, 条件 (*) を満たす $\sigma \in Gal(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$ をとると G の *principal* p*-block* に対し *Splendid Equivalence Conjecture* が σ-不変な $\mathbf{C}$ によって成立する.

以上から, Dade Conjecture が正しいことがわかる.

例 2. $G = GL_3(2)$, $p = 2$ について考える. （$|G| = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$.）

Sylow 2-部分群 P は, 位数 2^3 の 2 面体群である.

G は, principal 2-block B_0 と defect 群が自明な 2-block をもつので, B_0 について考えればよい.

線形群とその定義体の標数 p については, 放物型部分群のべき零根基が radical p-部分群を与えるので（Borel-Tits の定理） P_1, P_2 を G の極大放物型部分群のべき零根基の共役類の代表系とすると radical 2-鎖の共役類の代表系は

$$\underline{C}_1 : 1, \quad \underline{C}_2 : 1 < P_1, \quad \underline{C}_3 : 1 < P_2, \quad \underline{C}_4 : 1 < P_1 < P, \quad \underline{C}_5 : 1 < P_2 < P, \quad \underline{C}_6 : 1 < P$$

となる. さらに, $N_G(\underline{C}_2) = N_G(P_1) \cong N_G(\underline{C}_3) = N_G(P_2) \cong S_4$（4 次対称群）, $N_G(\underline{C}_4) = N_G(P_1) \cap N_G(P) \cong N_G(\underline{C}_5) = N_G(P_2) \cap N_G(P) \cong N_G(\underline{C}_6) = N_G(P) \cong P$ なので, $\underline{C}_1$, $\underline{C}_2$, $\underline{C}_3$, $\underline{C}_4$, 即ち, G, $N_G(P_1)$, $N_G(P_2)$, P のみ考えればよい.

S_4 と P は principal 2-block のみをもち, すべての既約指標は有理数値をもつ. また, 条件 (*) を満たす $\sigma \in Gal(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$ をとると B_0 に含まれる指標はすべて σ-不変である. 既約指標を d, r によって分類すると個数は次のようになるので, MAIN Conjecture と Dade Conjecture が成立する.

(d,r)	$(3,1)$	$(2,1)$	$(-1)^{\|\underline{C}_i\|}$	ℓ
B_0	4	1	$+$	3
$N_G(P_1)$	4	1	$-$	2
$N_G(P_2)$	4	1	$-$	2
$N_G(P_1) \cap N_G(P)$	4	1	$+$	1

（ℓ は, 標数 2 の閉体上の既約指標の同値類の個数）

ここで, Co_3 の状況と $GL_3(2)$ の状況はよく似ているように感じられるかも知れないが, 標数 p の閉体上の既約指標の同値類の個数を見るとそうではないことが分かる. 即ち, Co_3 では, 関連する 4 つの block のうち 2 個ずつが同じ不変量をもっているのに対し, $GL_3(2)$ では, 同じ不変量をもっているのは, もともと同型な $N_G(P_1)$ と $N_G(P_2)$ のみであり, これらの鎖の長さの parity も同じである. つまり, Co_3 の状況では, 交代和を取っているといっても実際はほぼ同等の 2 個の block からなる pair の集まりを考えているのであるが, $GL_3(2)$ では, そのような pair は存在しない.

Problem. $GL_3(p)$ をモデルにして, Dade 予想のように p-鎖の正規化群を考える場合も Broué 予想のような圏論的な背景があるのか考察せよ.

例えば, 加群圏の間の「誘導」が導く導来圏の間の次のような関手 f_1, f_2, h_1, h_2 を考えると

$$\begin{array}{ccccc} & & D^b(\mathrm{mod}(e_{B_0}kG)) & & \\ & f_1 \nearrow & & \nwarrow f_2 & \\ D^b(\mathrm{mod}(kN_G(P_1))) & & & & D^b(\mathrm{mod}(kN_G(P_2))) \\ & h_1 \nwarrow & & \nearrow h_2 & \\ & & D^b(\mathrm{mod}(kP)) & & \end{array}$$

$\mathrm{Im}f_1$, $\mathrm{Im}f_2$ は, 加法圏としては $D^b(\mathrm{mod}(e_{B_0}kG))$ を生成しないが, 三角圏の部分圏としての生成を考えると $D^b(\mathrm{mod}(e_{B_0}kG))$ を生成している. 上の図形は各圏の Grothendieck 群間の準同型

$$\begin{array}{ccccc} & & G_0(D^b(\mathrm{mod}(e_{B_0}kG))) & & \\ & f_1' \nearrow & & \nwarrow f_2' & \\ G_0(D^b(\mathrm{mod}(kN_G(P_1)))) & & & & G_0(D^b(\mathrm{mod}(kN_G(P_2)))) \\ & h_1' \nwarrow & & \nearrow h_2' & \\ & & G_0(D^b(\mathrm{mod}(kP))) & & \end{array}$$

を引き起こし, これから標数 2 の閉体上の既約指標の同値類の個数 $\ell(*)$ について

$$\ell(e_{B_0}kG)) - \ell(kN_G(P_1)) - \ell(kN_G(P_2)) + \ell(kP) = 0$$

を得る. このような考察は R 上でどうなるのか？　また, そのとき $\mathbb{Q}(\zeta)$ へ係数拡大した図式から通常指標について何が得られるのかを調べることが必要であると思われる.

7. Dade's conjectures および関連する事項についての結果

Dade 予想についての現在までに知られている結果は以下の通りである.

1. GENERAL RESULTS

cyclic defect group case	final	Dade [Da96] +
tame block case	invar.	Uno [Un94]
abel. defect unipotent blocks	ord.	Broué, Malle, Michel [BMM93]
abel. defect principal blocks	ord., $p=2$	Fong, Harris [FH93]
abel. defect, some cases	ord.	Puig, Usami [PUn] [Usn]
p-solvable	proj.	Robinson [Rb00]
$O_p(G)$ cyclic, $G/O_p(G)$ T.I.p-Sylow	proj.	Eaton [Ea01]

2. FINITE CHEVALLEY GROUPS

$GL_n(q)$	ord., $p \mid q$	Olsson, Uno [OU96]
$GU_n(q)$	ord., $p \mid q$	Ku [Ku99]
$GL_n(q)$, $GU_n(q)$	invar., $p \nmid q$	An [An01]
$Sp_{2n}(q)$, $SO^{\pm}_m(q)$	ord., $p \nmid q$, p, q odd	An [An11]
$L_2(q)$	final	Dade [Da99a]
$L_3(q)$	final, $p \mid q$	Dade
$L_n(q)$	ord., $p \mid q$	Sukizaki [Su99a]
$Sz(2^{2n+1})$	final	Dade [Da99a]
${}^3D_4(q)$		An [An02]
${}^2F_4(2^{2n+1})$	ord., $p \neq 2$	An [An98a]
${}^2F_4(2)'$ (+ outerauto.)	final	An [An96b]
$G_2(q)$	final, $p \nmid q$ $q \neq 3, 4$	An [An96a]+
${}^2G_2(3^{2n+1})$	final	$p \neq 3$ An [An94], $p = 3$ Eaton [Ea00]

3. SYMMETRIC AND ALTERNATING GROUPS

A_n, abelian defect	ord.	Fong, Harris [FH97]
S_n	ord.	$p \neq 2$ Olsson, Uno [OU95], $p = 2$ An [An98b]

4. SPORADIC SIMPLE GROUPS

M_{11}, J_1	final	Dade [Da92]
M_{12} (+coverings, outerauto.)	final	Dade
M_{22} (+coverings, outerauto.)	final	Huang [Hu97]
M_{23}, M_{24}	final	Schwartz, An, Conder [AC95]
J_2 (+coverings, outerauto.)	final	Dade
J_3 (+coverings, outerauto.)	final	Kotlica [Ko97]
McL (+coverings)	final	Murray [Mu98], Entz, Pahlings [EP99]
Ru	final	Dade, An, O'Brien [AO02]
He	final	An [An97]
HS	final	Hassan, Horváth [HH99]
Co_1	final	An, O'Brien [AO04]
Co_2	final	An, O'Brien [AO98]
Co_3	final	An [An99]
Suz	final	Himstedt [Hi99]
$O'N$	final	An, O'Brien [AO02], Uno, Yoshiara [UY02]
Th	final	Uno [Un04]
Ly	final	Sawabe, Uno [SU03]
HN	final	An, O'Brien [AO03]
Fi_{23}	final	An, O'Brien [AO99]
Fi_{22}	invar.	An, O'Brien [AO4]
J_4		An, O'Brien, Wilson [AOW03]
sporadic, abelian defect principal block	ord.	Rouquier [Rq94]

参考文献には, ここに直接関係するものの他, Dade Conjecture に関係するもののほとんどをあげた.

References

[Al75] J. L. Alperin : The main problem of block theory, Proceedings of the Conference on Finite Groups (Univ. Utah, Park City, Utah, 1975), 341–356, Academic Press, New York, 1976.

[An94] J. An : Dade's conjecture for the simple Ree groups ${}^2G_2(q^2)$ in non-defining characteristics, Indian J. Math. **36** (1994) 7-27.

[An96a] J. An : Dade's conjecture for Chevalley groups $G_2(q)$ in non-defining characteristics, Canad. J. Math. **48** (1996) 673–691.

[An96b] J. An : Dade's conjecture for the Tits Group, NZ J. Math. **25** (1996) 107–131.

[An97] J. An : The Alperin and Dade conjectures for the simple Held group, J. Algebra **189** (1997) 34–57.

[An97s] J. An : The Alperin and Dade conjectures for some finite groups, Group theory and combinatorial mathematics, (Kyoto, 1996), Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku No. 991 , (1997) 28–35. (survey article)

[An98a] J. An : The Alperin and Dade conjecture for the simple Ree groups ${}^2F_4(q^2)$ in non-defining characteristics, J. Algebra **203** (1998) no. 1, 30–49.

[An98b] J. An : Dade's conjecture for 2-blocks of symmetric groups, Osaka J. Math. **35** (1998) no. 2, 417–437.

[An99] J. An : The Alperin and Dade conjectures for the simple Conway's third group, Israel J. Math. **112** (1999) 109–134.

[An7] J. An : Dade's invariant conjecture for Chevalley group $G_2(q)$ in non-defining characteristics, submitted.

[An01] J. An : Dade's invariant conjecture for general linear and unitary groups in non-defining characteristics, Trans. Amer. Math. Soc., **353** (2001), no. 1, 365–390.

[An02] J. An : Dade's conjecture for Steinberg triality groups ${}^3D_4(q)$ in non-defining characteristics, Math. Z., **241** (2002), 445–469.

[An11] J. An : Dade's ordinary conjecture for classical groups in non-defining characteristics, submitted.

[An03] J. An : Dade's invariant conjecture for the Chevalley groups $G_2(q)$ in the defining characteristic, $q = 2^a, 3^a$, Algebra Colloq. **10** (2003), no. 4, 519–533.

[AC95] J. An, M. Conder : The Alperin and Dade conjectures for the simple Mathieu groups, Comm. Alg. **23** (1995) 2797–2823.

[AE00] J. An, C.W. Eaton : The p-local rank of a block. J. Group Theory **3** (2000), no. 4, 369–380.

[AO98] J. An, A. O'Brien : A local strategy to decide the Alperin and Dade conjectures, J. Algebra **206** (1998) no. 1, 183–207.

[AO99] J. An, A. O'Brien : The Alperin and Dade conjectures for the simple Fischer group Fi_{23}, Internat. J. Algebra Comput. **9** (1999) no. 6, 621–670.

[AO02] J. An, A. O'Brien : The Alperin and Dade conjectures for the O'Nan and Rudvalis simple groups, Comm. Alg. **30** (2002), no. 3, 1305–1348.

[AO4] J. An, A. O'Brien : The Alperin and Dade conjectures for the simple Fischer group Fi_{22}, preprint.

[AO03] J. An, A. O'Brien : The Alperin and Dade conjectures for the Harada-Norton simple group HN, Israel J. Math. **137** (2003), 157–181.

[AO04] J. An, A. O'Brien : The Alperin and Dade conjectures for the Conway simple group Co_1, Algebra and Representation Theory **7** (2004) 139–158.

[AOW03] J. An, A. O'Brien, R.A. Wilson : The Alperin weight conjecture and Dade's conjecture for the simple group J_4, London Math. Soc. J. Comput. Math. **6** (2003), 119–140.

[At] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R.A. Wilson : "Atlas of finite groups", Claredon Press, 1985.

[Bo01] R. Boltje : Alperin's weight conjecture in terms of linear source modules and trivial source modules. Modular representation theory of finite groups (Charlottesville, VA, 1998), 147–155, de Gruyter, Berlin, 2001.

[Bo03] R. Boltje : Alperin's weight conjecture and chain complexes, J. London Math. Soc. (2) **68** (2003), no. 1, 83–101.

[B90] M. Broué : Isométries parfaites, Types de blocs, Catégories dérivées, Représentations Linéaires des Groupes Finis, Luminy, 1988, Astérisque, **181-182** (1990) 61–92.

[B93] M. Broué : Equivalences of blocks of group algebras, Finite dimensional algebras and related topics, Proceedings of the NATO Advanced Research Workshop on Representations of Algebras and Related Topics, Ottawa, 1992 (V.Dlab. L.L.Scott, Ed.), 1–26, Kluwer Academic Publishers, 1993.

[BMM93] M. Broué, G. Malle, J. Michel : Generic blocks of finite reductive groups, Asterisque, **212** (1993) 1–92.

[Da92] E. C. Dade : Counting characters in blocks, I, Invent. math. **109** (1992) 187–210.

[Da94] E. C. Dade : Counting characters in blocks, II, J. reine angew. Math. **448** (1994) 97–190.

[Da95] E. C. Dade : Counting characters in blocks, II.9, Representation theory of finite groups (Columbus, OH, 1995), 45–59, Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ., 6, de Gruyter, Berlin, 1997.

[Da96] E. C. Dade : Counting characters in blocks with cyclic defect groups, I, J. Algebra **186** (1996) 934–969.
[Da99a] E. C. Dade : Counting characters of (ZT)-groups, J. Group Theory **2** (1999) no. 2, 113–146.
[Da99b] E. C. Dade : Another way to count characters, J. reine angew. Math. **510** (1999) 1–55.
[Ea00] C. W. Eaton : Dade's inductive conjecture for the Ree groups of type G_2 in the defining characteristic, J. Algebra **226** (2000) no. 1, 614–620.
[Ea01] C. W. Eaton : On finite groups of p-local rank one and conjectures of Dade and Robinson, J. Algebra **238** (2001), no. 2, 623–642.
[Ea04] C. W. Eaton : The equivalence of some conjectures of Dade and Robinson, J. Algebra **271** (2004), no. 2, 638–651.
[EH02] C. W. Eaton, B. Höfling : Dade's conjecture and wreath products, J. Group Theory **5** (2002), no. 4, 409–428.
[ER02] C. W. Eaton, G. R. Robinson : On a minimal counterexample to Dade's projective conjecture, J. Algebra **249** (2002), no. 2, 453–462.
[EP99] G. Entz, H. Pahlings : The Dade conjecture for the McLaughlin group, Groups St. Andrews 1997 in Bath, I, 253–266, London Math. Soc. Lect. Notes Ser. 260, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.
[F03] P. Fong : The Isaacs-Navarro conjecture for symmetric groups, Special issue celebrating the 80th birthday of Robert Steinberg, J. Algebra **260** (2003), no. 1, 154–161.
[FH93] P. Fong, M. Harris : On perfect isometries and isotypies in finite groups, Invent. math. **114** (1993) 139–191.
[FH97] P. Fong, M. Harris : On perfect isometries and isotypies in alternating groups. Trans. Amer. Math. Soc. **349** (1997) no. 9, 3469–3516.
[HH98] N.M. Hassan, E. Horváth : Some remarks on Dade's conjecture, Math. Pannon. **9** (1998) no. 2, 181–194.
[HH99] N.M. Hassan, E. Horváth : Dade's conjecture for the simple Higman-Sims group, Groups St. Andrews 1997 in Bath, I, 329–345, London Math. Soc. Lect. Notes Ser. 260, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.
[Hi99] F. Himstedt : Die Dade-Vermutungen für die sporadische Suzuki-Gruppe, Diploma thesis, Technischen Hochschule Aachen, October 1999.
[Hu97] J. Huang : Counting characters in blocks of M_{22}, J. Algebra **191** (1997) 1–75.
[IN02] I. M. Isaacs, G. Navarro : New refinements of the McKay conjecture for arbitrary finite groups, Ann. of Math. (2) **156** (2002), 333–344.
[KY02] M. Kitazume, S. Yoshiara : The radical subgroups of the Fischer simple groups, J. Algebra **255** (2002), no. 1, 22–58.
[KR89] R. Knörr, G. Robinson : Some remarks on a conjecture of Alperin, J. London Math. Soc. **39** (1989) 48–60.
[Ko97] S. Kotlica : Verification of Dade's conjecture for Janko group J_3, J. Algebra **187** (1997) 579–619.
[Ku99] C. Ku : Dade's conjecture for the finite unitary groups in the defining characteristic, Thesis, California Institute of Technology, June, 1999.
[KlR96] B. Külshammer, G. Robinson : Alperin-McKay implies Brauer's problem 21. J. Algebra **180** (1996), no. 1, 208–210.
[Le78] G.I. Lehrer : On a conjecture of Alperin and McKay, Math. Scand. **43** (1978/79), no. 1, 5–10.
[Ma96] A. Marcus : On equivalences between blocks of group algebras: reduction to the simple components, J. Algebra **184** (1996), 372–396.
[Ma99] A. Marcus : Derived equivalences and Dade's invariant conjecture, J. Algebra **221** (1999) no. 2, 513–527.
[Ma00] A. Marcus : Blocks of normal subgroups and Morita equivalences, International Algebra Conference (Iaşi, 1998). Ital. J. Pure Appl. Math. **7** (2000), 77–84.
[Ma01] A. Marcus : Twisted group algebras, normal subgroups and derived equivalences, Algebra and Representation Theory **4** (2001), no. 1, 25–54.
[M72] J. McKay : Irreducible representations of odd degree, J. of Algebra **20** (1972), 416–418.
[MO90] G.O. Michler, J.B. Olsson : The Alperin-McKay conjecture holds in the covering groups of symmetric and alternating groups, $p \neq 2$, J. Reine Angew. Math. **405** (1990), 78–111.
[Mur04] M. Murai : A remark on the Alperin-Mckay conjecture. J. Math. Kyoto Univ. **44** (2004), no. 2, 245–254.
[Mu98] J. Murray : Dade's conjecture for the McLaughlin simple groups, Thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign, January 1998.
[NT] H. Nagao, Y. Tsushima : "Representations of Finite Groups", Academic Press, New York, 1987.
[N] G. Navarro : The McKay conjecture and Galois automorphisms, preprint.
[Ol76] J. B. Olsson : McKay numbers and heights of characters, Math. Scand. **38** (1976), no. 1, 25–42.
[OU95] J. B. Olsson, K. Uno : Dade's conjecture for symmetric groups, J. Algebra **176** (1995) 534–560.
[OU96] J. B. Olsson, K. Uno : Dade's conjecture for general linear groups in the defining characteristic, Proc. London Math. Soc. **72** (1996) 359–384.
[O] Th. Ostermann : Charaktertafeln von Sylownormalisatoren sporadischer einfacher Gruppen, Vorlesungen aus dem Fachbereich Mathematik der Universität GH Essen, Fachbereich Mathematik, Essen, 1986.
[PU93] L. Puig, Y. Usami : Perfect isometries for blocks with abelian defect groups and Klein four inertial quotients, J. Algebra **160** (1993) 192–225.

[PU95] L. Puig, Y. Usami : Perfect isometries for blocks with abelian defect groups and cyclic inertial quotients of order 4, J. Algebra **172** (1995) 205–213.

[Ri96] J. Rickard : Splendid equivalences: derived categories and permutation modules, Proc. London Math. Soc. (3) **72** (1996), 331–358.

[Rq94] R. Rouquier : Isométries parfaites dans les blocs á défaut abélien des groupes symétriques et sporadiques, J. Algebra **168** (1994), 648–694.

[Rq95] R. Rouquier : From stable equivalences to Rickard equivalences for blocks with cyclic defect, Groups '93 Galway/St. Andrews, Vol. 2, 512–523, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **212** Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[Rq01] R. Rouquier : Block theory via stable and Rickard equivalences. Modular representation theory of finite groups (Charlottesville, VA, 1998), 101–146, de Gruyter, Berlin, 2001.

[Rb98] G. R. Robinson : On a projective generalization of Alperin's conjecture, Algebra and Represent. Theory **1** (1998), no. 2, 129–134.

[Rb00] G. R. Robinson : Dade's Projective Conjecture for p-Solvable Groups, J. Algebra **229** (2000) no. 1, 234–248.

[Rb02a] G. R. Robinson : Cancellation theorems related to conjectures of Alperin and Dade, J. Algebra **249** (2002), no.1, 196–219.

[Rb02b] G. R. Robinson : More cancellation theorems for conjectures of Alperin and Dade, J. Algebra **249** (2002), no. 2, 463–471.

[Sa] M. Sawabe : On the radical chains of finite groups, preprint.

[Sa99] M. Sawabe : 2-radical subgroups of the Conway simple group Co_1, J. Algebra **211** (1999), no. 1, 115–133.

[Sa00] M. Sawabe : The 3-radicals of Co_1 and 2-radicals of Rud, Arch. Math. (Basel) **74** (2000), no. 6, 414–422.

[Sa02] M. Sawabe : The centric p-radical complex and related p-local geometries, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **133** (2002), no. 3, 383–398.

[SU03] M. Sawabe, K. Uno : Conjectures on character degrees for the simple Lyons group, Quarterly Journal of Mathematics **54** (2003) no.1, 103–121.

[SW03] M. Sawabe, A. Watanabe : On the principal blocks of finite groups with abelian Sylow p-subgroups, J. Algebra **237** (2001), no. 2, 719–734.

[Sc1] G. K. Schwartz : Blocks of twisted group algebras, preprint.

[Su99a] H. Sukizaki : Dade's conjecture for special linear groups in the defining characteristic, J. Algebra **220** (1999) no. 1, 261–283.

[Su99b] H. Sukizaki : The McKay numbers of a subgroup of $\mathrm{GL}(n;q)$ containing $\mathrm{SL}(n;q)$, Osaka J. Math. **36** (1999), no. 1, 177–193.

[Un94] K. Uno : Dade's conjecture for tame blocks, Osaka J. Math. **31** (1994) 747–772.

[Un97s] K. Uno : Cases of Dade's conjecture. Group theory and combinatorial mathematics (Japanese) (Kyoto, 1996), Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku No. 991 , (1997) 16–27. (survey article)

[Un00s] K. Uno : On Dade's conjecture. Proceedings of "Representation theory of finite and algebraic groups" (Osaka, 2000), Edited by N.Kawanaka, G.Michler, K.Uno, (2000) 27–37. (survey article)

[Un04] K. Uno : Conjectures on character degrees for the simple Thompson group, Osaka J. Math. **41** (2004) 11–36.

[UY02] K. Uno, S. Yoshiara : Dade's conjecture for the simple O'Nan group, J. Algebra **249** (2002) 147–185.

[Us88] Y. Usami : On p-blocks with abelian defect groups and inertial index 2 or 3. I, J. Algebra **119** (1988) 123–146.

[Us89] Y. Usami : On p-blocks with abelian defect groups and inertial index 2 or 3. II, J. Algebra **122** (1989) 98–105.

[Us95] Y. Usami : Perfect isometries for blocks with abelian defect groups and dihedral inertial quotients of order 6, J. Algebra **172** (1995) 113–125.

[Us96a] Y. Usami : Perfect isometries and isotypies for blocks with abelian defect groups and the inertial quotients isomorphic to $\mathbf{Z_4} \times \mathbf{Z_2}$, J. Algebra **181** (1996) 727–759.

[Us96b] Y. Usami : Perfect isometries and isotypies for blocks with abelian defect groups and the inertial quotients isomorphic to $\mathbf{Z_3} \times \mathbf{Z_3}$, J. Algebra **182** (1996) 140–164.

[Us97] Y. Usami : Perfect isometries for principal blocks with abelian defect groups and elementary abelian 2-inertial quotients, J. Algebra **196** (1997) no. 2, 646–681.

[W98] R. A. Wilson : The McKay conjecture is true for the sporadic simple groups, J. Algebra **207** (1998), 294–305.

[Yo00] S. Yoshiara : The radical 2-subgroups of the sporadic simple groups J_4, Co_2, and Th. J. Algebra **233** (2000), no. 1, 309–341.

[Yo02] S. Yoshiara : The radical 2-subgroups of some sporadic simple groups, J. Algebra **248** (2002), no. 1, 237–264.