代数曲線の数論的基本群に関する Grothendieck 予想，その後

玉川 安騎男

京都大学数理解析研究所

§1. 第１部の復習

今回の講演は, 第４１回代数学シンポジウム (１９９６年７月, 於山形市遊学館) でさせていただいたサーベイ講演「代数曲線の数論的基本群に関する Grothendieck 予想」の続きで, ほんとうは, タイトルを「代数曲線の数論的基本群に関する Grothendieck 予想，II」とした方がよいところでした．この節では, 前回の講演内容を簡単に復習したいと思います. 詳しくは [T1] をご参照下さい.

1.1. 数論的基本群

Grothendieck が [SGA1] で理論を展開したエタール基本群とは, 次のような関手を与えるものです:

$$\pi_1 : ((\text{基点付き}) \text{ 連結スキーム}) \to (\text{副有限群})$$

連結性を仮定すると, 基点の取り方によらず (内部自己同型のずれを除いて標準的に) 基本群が定まるので, 以下基点のことは忘れることにします.

Example 1. X を連結, 局所ネーター, 正則なスキームとし, K をその関数体とする．この時,

$$\pi_1(X) = \mathrm{Gal}(\tilde{K}/K) \twoheadleftarrow \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K) \overset{\mathrm{def}}{=} G_K$$

$$\tilde{K} \overset{\mathrm{def}}{=} \bigcup_{\substack{K \subset L \subset K^{\mathrm{sep}} \\ [L:K]<\infty \\ \text{s.t. } (*)}} L$$

$(*)$ X の任意の余次元 1 の点 x に対し, K の (離散) 付値 ord_x は L/K で不分岐

Example 1′. K を体, $X = \mathrm{Spec}(K)$ とする時,

$$\pi_1(X) = G_K$$

Example 2. X を複素数体 $\mathbb{C}$ 上有限型な連結スキームとし, X^{an} を対応する複素解析空間とする．この時,

$$\pi_1(X) = \pi_1^{\mathrm{top}}(X^{\mathrm{an}})^{\wedge}$$

ここで, π_1^{top} は通常の位相幾何的な基本群を表し, また, 群 Γ に対し, その副有限完備化 $\Gamma^{\wedge}$ を

$$\Gamma^{\wedge} \overset{\mathrm{def}}{=} \varprojlim_{\substack{N \lhd \Gamma \\ (\Gamma:N)<\infty}} (\Gamma/N)$$

で定める.

k を体とし, X を連結 k スキームとします. この時, 構造射 $X \to \mathrm{Spec}(k)$ から, 副有限群の射

$$\mathrm{pr}_X : \pi_1(X) \to \pi_1(\mathrm{Spec}(k)) = G_k$$

が定まります. 更に, X が幾何的連結すなわち $\overline{X} \stackrel{\mathrm{def}}{=} X \otimes_k \overline{k}$ が連結であると仮定すると, 次の完全列が得られます.

$$1 \to \pi_1(\overline{X}) \to \pi_1(X) \to G_k \to 1$$

ここで, $\pi_1(\overline{X})$ を幾何的基本群, $\pi_1(X)$ (あるいは組 $(\pi_1(X), \mathrm{pr}_X)$) を数論的基本群と呼びます.

1.2. Grothendieck 予想

A. Grothendieck は, [G1] (約１６００ページ), [G2] (約１０ページ), [G3] (約６０ページ) の中で, anabelian geometry (遠アーベル幾何) という考え方を提唱しました. ここで, anabelian というのは Grothendieck の造語で, 'far from being abelian' というような意味です. 「遠アーベル」という名訳は, 中村博昭氏によるものだと思います.

「Grothendieck 予想」とは, 狭義の遠アーベル幾何そのものだと思ってしまってだいたいよいと思います. 「予想」と「幾何」が同じというのも乱暴な話ではありますが. (なお, 広義の遠アーベル幾何については, 3.1 をご参照下さい.) すなわち, Grothendieck は, (主として標数 0 の) 素体上有限生成な体 k の上の (幾何的連結) スキーム X が「遠アーベル」ならば, X/k の幾何は, 数論的基本群 $(\pi_1(X), \mathrm{pr}_X)$ から完全に決定されることを予想しました.

より正確に言うと, 「数論的基本群から完全に決定される」という部分は, 以下のようないくつかの異なる定式化が考えられます:

X, Y を遠アーベル k スキーム (k: 体) とする時,

(wIsom_k) (relative, weak Isom-version)

$$\pi_1(X) \underset{G_k}{\simeq} \pi_1(Y) \implies X \underset{k}{\simeq} Y$$

(Isom_k) (relative Isom-version)

$$\mathrm{Isom}_k(X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Isom}_{G_k}(\pi_1(X), \pi_1(Y)) / \mathrm{Inn}(\pi_1(\overline{Y}))$$

(Hom_k) (relative Hom-version)

$$\mathrm{Hom}_k^{(\mathrm{dom})}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{G_k}^{(\mathrm{open})}(\pi_1(X), \pi_1(Y)) / \mathrm{Inn}(\pi_1(\overline{Y}))$$

ここで, $\mathrm{Hom}_k^{(\mathrm{dom})}$ と書いたのは, 場合によっては Hom_k 全体ではなく dominant な射のみを考えるということで, 同様に, $\mathrm{Hom}_{G_k}^{(\mathrm{open})}$ と書いたのは, 場合によっては Hom_{G_k} 全体ではなく開準同型のみを考える, という意味です.

以上は相対版ですが, 次のような絶対版も考えられます:

X を遠アーベル k スキーム, Y を遠アーベル l スキーム (k,l: 体) とする時,

(wIsom) (absolute, weak Isom-version)

$$\pi_1(X) \simeq \pi_1(Y) \implies X \simeq Y$$

(Isom) (absolute Isom-version)

$$\mathrm{Isom}(X,Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Isom}(\pi_1(X), \pi_1(Y))/\,\mathrm{Inn}(\pi_1(Y))$$

(Hom) (absolute Hom-version)

$$\mathrm{Hom}^{(\mathrm{dom})}(X,Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}^{(\mathrm{open})}(\pi_1(X), \pi_1(Y))/\,\mathrm{Inn}(\pi_1(Y))$$

以上の「予想」の問題点は, どのような X が遠アーベルなのかという定義が与えられていないことです. Grothendieck 自身が定義を与えなかったというだけでなく, その後の研究が進んだ現在でも, 高次元にも通用する普遍的なよい定義が存在するのかどうかすら全く不明です.

ただ, Grothendieck は以下のような指摘をしました. まず, $\dim(X) = 0$ ならば X は遠アーベルであろう. また, $\dim(X) = 1$ ならば, X が遠アーベルとは, X が双曲的, すなわち,

$$2 - 2g - r < 0 \text{ (i.e., } (g,r) \notin \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0)\})$$

(g: X のコンパクト化 X^* の種数, r: $X^* - X$ の (幾何的) 点の個数) ということと同値であろう. (基礎体 k の標数が 0 の場合には, これは, 幾何的基本群 $\pi_1(\overline{X})$ が非アーベルということと同値です. 更に, k が $\mathbb{C}$ の部分体の場合には, $X_{\mathbb{C}}$ に付随するリーマン面 $(X_{\mathbb{C}})^{\mathrm{an}}$ が (普遍被覆が上半平面 $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ と複素解析的に同型という意味で) 双曲的ということとも同値です.) 最後に, $\dim(X) > 1$ の場合は, 一般的な定義はないが, 少なくとも以下のものは遠アーベルであろう: (i) 初等的遠アーベルスキーム, すなわち, 遠アーベル曲線 (= 双曲的曲線) の successive (smooth) fibration として与えられる多様体; (ii) (標点付き) 曲線のモジュライ空間; (iii) (偏極付き) アーベル多様体のモジュライ空間.

なお, 遠アーベル幾何の variant として, いわゆる双有理遠アーベル幾何 (birational anabelian geometry) というものがあります. これは, 上で X と $\pi_1(X)$ をそれぞれ $k(X)$ (より正確には $\mathrm{Spec}(k(X))$) と $G_{k(X)}$ に取り替えたもので, $\dim(X) = 0$ の場合を扱っているとみることもできます. この双有理遠アーベル幾何は, Grothendieck が遠アーベル幾何を提唱したのよりもずっと歴史が古く, Neukirch, 池田, 岩澤, 内田らによる古典的な重要結果や Pop らによる近年の一般化などがありますが, 本稿 (resp. 本講演) では取り上げない (resp. 取り上げなかった) ことをお許し下さい.

1.3. 双曲的曲線に対する「古典的」結果たち

双曲的曲線に対する Grothendieck 予想は, 以下のように, 中村博昭氏, 筆者, 望月新一氏の研究によって, 肯定的解決がほぼ満足に与えられています. 以下, 基礎体 k 上の双曲的曲線 X を考えているものとし, g で X のコンパクト化 X^* の種数, r で $X^* - X$ の (幾何的) 点の個数を表すものとします.

中村 [N1][N2]
($N_{\mathbb{Q}}$) k: $\mathbb{Q}$ 上有限生成, $g=0$, (wIsom_k)

玉川 [T2]
($T_{\mathbb{F}_p}$) k: 有限体, $r>0$, (Isom) (π_1^{t} 版も)
($T_{\mathbb{Q}}$) k: $\mathbb{Q}$ 上有限生成, $r>0$, (Isom_k)

望月 [M3]
($M1_{\mathbb{Q}}$) k: $\mathbb{Q}$ 上有限生成, (Isom_k)
($M1_{\mathbb{Q}_p}$) $[k:\mathbb{Q}_p]<\infty$, Jacobi 多様体が ordinary reduction を持つ, (wIsom_k)

望月 [M4]
($M2_{\mathbb{Q}_p}$) k: sub-p-adic ($k \hookrightarrow \exists L$: $\mathbb{Q}_p$ 上有限生成), (Hom_k)

以上, 詳細は [T1] などをご参照下さい.

§2. 「その後」(最近の発展)

2.1. 「古典的」結果たちの補完と一般化

1.3 で紹介 (復習) した, 双曲的曲線に対する「古典的」結果たちを補完したり一般化したりする結果が以下のように得られています. 1.3 と同様に, 以下, 基礎体 k 上の双曲的曲線 X を考えているものとし, g で X のコンパクト化 X^* の種数, r で X^*-X の (幾何的) 点の個数を表すものとします.

Stix [S1][S2]
k: $\mathbb{F}_p$ 上有限生成, non-isotrivial, (Isom_k) (π_1^{t} 版)

証明は, ($T_{\mathbb{Q}}$), ($M1_{\mathbb{Q}}$) の証明のやり方で ($T_{\mathbb{F}_p}$) に帰着するというものですが, ($T_{\mathbb{Q}}$), ($M1_{\mathbb{Q}}$) の場合と同様に, 有限体上の ($T_{\mathbb{F}_p}$) で示されるのは絶対版 (Isom) であるのに対し有限生成体上で (まず) 示すべきものは相対版 (Isom_k) であるという差を埋める必要があります. この部分で標数 0 の場合に使えたある議論が使えなくなるため, 工夫を要します. それが, この仕事の新しい貢献です.

望月 [M3]
k: generalized sub-p-adic ($k \hookrightarrow \exists L$: $\widehat{\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}}}=\mathrm{Frac}(W(\overline{\mathbb{F}_p}))$ 上有限生成), (Isom_k)

($M2_{\mathbb{Q}_p}$) の精密化です. 局所理論 (幾何的な Galois section の群論的復元) の部分で ($M2_{\mathbb{Q}_p}$) の証明が働かなくなり, その分結果が (Hom_k) から (Isom_k) に弱まっています. (といっても超強力な結果です.)

望月 [M7]
k: 有限体, (Isom)

($T_{\mathbb{F}_p}$) の一般化であり, すなわち, [T2] 以来懸案となっていた有限体上 proper ($\iff r=0$) な曲線に対する Grothendieck 予想の解決です. 証明は, 最終的には [T2] (実は内田の仕事 [U] でよい) に帰着するのですが, その前に, X の開部分スキーム U に対し,

$$\pi_1(U) \twoheadrightarrow \Pi_U \twoheadrightarrow \pi_1(X)$$

となるような, ある (U の遠アーベル幾何をするのに十分なくらい大きい) Π_U を, $\pi_1(X)$ のみから復元する, という重要なステップがあります. 分岐を許さない基本群から分岐を直接的に思い出すというのは, 今までの遠アーベル幾何の研究ではありえなかった斬新な手法であり, 今後の発展が期待されます.

玉川 (未執筆)

k: sub-p-adic, (Isom_k)

($\mathrm{M2}_{\mathbb{Q}_p}$) の弱い version (($\mathrm{Hom}_k$) ではなく ($\mathrm{Isom}_k$)) の別証明です. ($\mathrm{M2}_{\mathbb{Q}_p}$) の原証明は, (Faltings 流の) p 進 Hodge 理論など高級な p 進理論を駆使したものでしたが, この証明は ($\mathrm{M1}_{\mathbb{Q}_p}$) の証明をベースにしたもので, ($\mathrm{T}_{\mathbb{F}_p}$) を用いて特殊ファイバーを復元した後, p 進理論としては Serre-Tate 理論というごく古典的なものだけを使います. 但し, ($\mathrm{M1}_{\mathbb{Q}_p}$) の証明では Jacobi 多様体が ordinary reduction である必要があったところを, Raynaud のテータ因子の理論 ([R1]) や一般 Prym 多様体に対する無限小 Torelli 問題 ([T5]) を用いて, Jacobi 多様体のある部分のみを見ることによって切り抜けています.

2.2. 有限体の代数閉包上の場合

この節では, k を代数閉体, X を k 上の (smooth, 連結な) 代数曲線とします. 1.3, 2.1 と同様に, g で X のコンパクト化 X^* の種数, r で $X^* - X$ の (幾何的) 点の個数を表すものとします.

代数閉体は絶対 Galois 群が自明なため, 数論的基本群といっても幾何的基本群と同じことになります. このような場合に Grothendieck 予想の類似が成立するかどうかを考えることは, Grothendieck の本来の意味での遠アーベル幾何 — 基礎体の絶対 Galois 群と曲線の幾何的基本群の間の高度に非自明な絡まり合いの中に曲線の (数論) 幾何が忠実に表現される — とはだいぶ異なります. しかも, 以下の remarks のように, 遠アーベル幾何の観点からみると否定的な (すなわち「基本群はあまり曲線の取り方によらない」ということを示唆する) 結果が得られています.

Remark 1. ([SGA1])

(i) $\mathrm{char}(k) = 0$ の時,

$$\pi_1(X) \simeq \Pi_{g,r}^{\widehat{}}$$

$$\Pi_{g,r} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_g, \beta_1, \ldots, \beta_g, \gamma_1, \ldots, \gamma_r \mid \alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\cdots\alpha_g\beta_g\alpha_g^{-1}\beta_g^{-1}\gamma_1\cdots\gamma_r = 1\rangle$$

特に, 更に $r > 0$ ならば,

$$\pi_1(X) \simeq F_{2g+r-1}^{\widehat{}}$$

ここで, F_n は階数 n の自由群を表す.

(ii) $\mathrm{char}(k) = p > 0$ の時,

$$\pi_1(X) \twoheadrightarrow \pi_1^{\mathrm{t}}(X) \twoheadleftarrow \Pi_{g,r}^{\widehat{}}$$

$$\pi_1(X)^{p'} \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\mathrm{t}}(X)^{p'} \xleftarrow{\sim} (\Pi_{g,r}^{\widehat{}})^{p'}$$

特に, 更に $r > 0$ ならば,

$$\pi_1(X) \twoheadrightarrow \pi_1^{\mathrm{t}}(X) \twoheadleftarrow F_{2g+r-1}^{\widehat{}}$$

$$\pi_1(X)^{p'} \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\mathrm{t}}(X)^{p'} \xleftarrow{\sim} (F_{2g+r-1}^{\widehat{}})^{p'}$$

ここで, 副有限群 Γ に対し, $\Gamma^{p'}$ で Γ の最大 pro-prime-to-p 商を表す.

Remark 2. 副有限群 Γ に対し,

$$\Gamma_A \stackrel{\text{def}}{=} \{G\text{: 有限群} \mid \Gamma \twoheadrightarrow G\}/\simeq$$

とおき,

$$\pi_A(X) \stackrel{\text{def}}{=} \pi_1(X)_A$$

とおく.
(i) ([SGA1]) $\mathrm{char}(k)=0$ の時,

$$\pi_A(X) = (\Pi_{g,r}^{\wedge})_A$$

特に, 更に $r>0$ ならば,

$$\pi_A(X) = (F_{2g+r-1}^{\wedge})_A = \{G\text{: 有限群} \mid G \text{ は (たかだか) } 2g+r-1 \text{ 元生成 }\}/\simeq$$

(ii) (Abhyankar 予想) (Raynaud [R2], Harbater [Ha1]) $\mathrm{char}(k)=p>0$, $r>0$ の時,

$$\begin{aligned}\pi_A(X) &= \{G\text{: 有限群} \mid G^{p'} \in (F_{2g+r-1}^{\wedge})_A\}/\simeq \\ &= \{G\text{: 有限群} \mid G^{p'} \text{ は (たかだか) } 2g+r-1 \text{ 元生成 }\}/\simeq\end{aligned}$$

Remark 3. (幾何的 Shafarevich 予想) (Douady [D] ($\mathrm{char}(k)=0$); Pop [P], Harbater [Ha2] ($\mathrm{char}(k)>0$)) $G_{k(X)}$ は階数が k の濃度に等しい自由副有限群

しかしながら, $\mathrm{char}(k)>0$ の場合には, $\pi_1(X)$ 自体は X によって大きく異なるという可能性は残ります. 実際, 以下に述べる最近の研究により, 少なくとも $k=\overline{\mathbb{F}_p}$ の場合には, X は $\pi_1(X)$ からほとんど決まってしまうことがわかってきています. 以下では X は双曲的と仮定します.

<u>玉川 [T3][T4]</u>
$k=\overline{\mathbb{F}_p}$, $g=0$, (wIsom) (π_1^{t} 版も)

この場合に1つの大きな鍵となるのが, $\pi_1(X)$ から (g,r) を群論的に復元するというステップです. (それを全ての被覆に対して適用します.) π_1 の場合 ([T3]) には, これは曲線の被覆における種数と分岐指数に関する Hurwitz の公式と曲線の p 冪次 Galois 被覆における p 階数 (= Hasse-Witt 不変量) と分岐指数に関する Deuring-Shafarevich の公式を組み合わせることによって比較的簡単に得られます. 一方, π_1^{t} の場合 ([T4]) には, 一般 Hasse-Witt 不変量に関するある種の平均値定理をへて (g,r) を復元します. この平均値定理の証明は, Raynaud のテータ因子の理論 ([R1]) の一般化を必要とし, 全体としてやや複雑になっています.

次の結果を述べるために, Grothendieck 予想のある弱い version (weak-weak Isom-version) の定式化をしておきます. $\mathcal{C}$ で k 上の双曲的曲線全体を表し, $\mathcal{C}/\simeq$ で $\mathcal{C}$ の対象の (スキームとしての) 同型類の集合を表すことにします. この時, $X \mapsto \pi_1(X)$ によって引き起こされる写像

$$\mathcal{C}/\simeq \ \to \ (\text{副有限群})/\simeq$$

を Π で表すことにします. すると, 1.2 で導入した (wIsom) は, 双曲的曲線に対する場合には,

(wIsom) Π は単射 (すなわち全てのファイバーの濃度がたかだか 1)

と言い換えることができます. ここで導入する新しい version (wwIsom) は,

(wwIsom) Π はほとんど単射 (すなわち全てのファイバーの濃度がたかだか有限)

というものです. つまり, 各双曲的曲線 X に対し, $\pi_1(X) \simeq \pi_1(Y)$ となるような双曲的曲線 Y の同型類は有限個しかないことを主張しています.

この時, 次のような結果が得られています:

Pop-Saïdi [PS], Raynaud [R3], 玉川 [T5]

$k = \overline{\mathbb{F}_p}$, (wwIsom) ($\pi_1^{\mathrm{t}}$ 版も)

簡単のため, $r = 0$ ($\implies g \geq 2$) の場合の証明の方針を述べます. まず, Π のあるファイバーが無限集合になったと仮定します. すなわち, ある副有限群 Γ に対し, 双曲的曲線 X で $\pi_1(X) \simeq \Gamma$ となるものの同型類の集合 $\Sigma \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Pi^{-1}(\Gamma)$ が無限集合になるものがあるとします. Σ に属する X に対してその種数 g は一定であることがわかるので, Σ の点は, 全て $\mathbb{F}_p$ 上の種数 g の曲線のモジュライ空間 M_g の閉点とみなすことができます. そこで, Σ の M_g における Zariski 閉包 $\overline{\Sigma}$ を考えると, Σ の無限性から, $\overline{\Sigma}$ の既約成分 $T = \overline{\{t\}}$ で $\dim(T) > 0$ となるものがあることがわかります. ここで, $s \in \Sigma \cap T (\neq \emptyset)$ を取れば, specialization 準同型 $\mathrm{sp} : \pi_1(X_{\overline{t}}) \twoheadrightarrow \pi_1(X_{\overline{s}})$ がありますが ($X_{\overline{t}}$, $X_{\overline{s}}$ は, モジュライの意味で幾何的点 $\overline{t}, \overline{s}$ に対応する双曲的曲線), t, s の取り方及び有限生成副有限群の持ついくつかの性質により, sp が同型になることがわかります.

そこで, 一般にこのような specialization 準同型が同型にならないことを示せばよいことになります. この事実の証明には, Raynaud のテータ因子の理論 ([R1]), (一般化された) Anderson-Indik の定理 ([AI], [PS], [R3]), Hrushovski の定理 (正標数における Mordell-Lang 予想)([Hr]), 一般 Prym 多様体に対する無限小 Torelli 問題 ([T5]) などを用いるのですが, 詳細は省略させていただきます.

§3. 「この後」(今後の展望)

3.1. $\dim > 1$ の場合

高次元多様体に対する Grothendieck 予想について, まず, 肯定的結果としては, 中村らによる双曲的曲線の点配置空間の場合 ([N3][N4][N5][NT][IN]), 望月による双曲的ファイバー曲面の場合 ([M2]) があります. いずれも Grothendieck の言う初等的遠アーベル多様体の特別な場合になります. 一方, 否定的結果としては, 伊原-中村による Siegel モジュラ多様体の場合や Hilbert モジュラ多様体の場合 ([IN]) があります. 特に前者は, (偏極付き) アーベル多様体のモジュライ空間が遠アーベルであろうという Grothendieck の期待を打ち破っています.

高次元の遠アーベル幾何の難しさの１つは, 遠アーベルスキームのよい定義が見つからない (あるいは存在しないのかもしれない) ということです. その背後にあるのは, 高次元には双有理同値, 超曲面切断, 有理多様体との直積など, 基本群を変えないような幾何的操作がたくさんあるという事実です. 通常の代数多様体の圏で考える限り, (数論的) 基本群を共有する多様体たちの同型類の中には遠アーベルなものはたかだか１つしか存在しえないわけですから, それをどのように特徴付けるのかという問題が生じます. あるいは, 通常の代数多様体の圏から上述のような基本群を変えない幾何的操作を可逆化することによって得られるような、何か新しい幾何の圏で作業をする方が自然という可能性もあります.

最後に, Grothendieck が考えていた, 広義の (あるいは, 真の) 遠アーベル幾何について少しふれておきたいと思います. これは, 狭義の遠アーベル幾何 $\approx$ Grothendieck 予想のように遠アーベルスキームのみを対象とするのではなく, (全ての) スキームの圏を純に副有限群の言葉で再構成しようという企てと言えます. 実際には, 適当な極

限議論や局所 $K(\pi, 1)$ 定理などを用いて (初等的) 遠アーベル多様体を「はりあわせて」一般のスキームを構成するという考えのため, まずは (初等的) 遠アーベル多様体の場合に考えれば十分という話になります. その場合に, 数論的基本群を取るという関手の忠実充満性を要請するのが狭義の遠アーベル幾何 ≈ Grothendieck 予想ですが, 更に, 広義の遠アーベル幾何では, essential image を決定できないか, すなわち, (初等的遠アーベル多様体の) 数論的基本群として現れる副有限群の拡大とは何かを純群論的に記述できないか, ということを問題にします. その第 1 段階として, 基礎体の絶対 Galois 群の純群論的記述という問題も内包しますが, ここでは, Grothendieck は (標点付き) 曲線のモジュライ空間の塔の幾何を通じた有理数体の絶対 Galois 群の組み合わせ論的記述によってこの問題にアプローチすることを考えており, いわゆる Grothendieck-Teichmüller 群の研究などに関係していきます. 最後に, 初等的遠アーベル多様体という部品たちがこの essential image の決定によって完全に群論的にとらえられ, しかもそのはりあわせに要する射たちは狭義の遠アーベル幾何 ≈ Grothendieck 予想によって完全に群論的にとらえられ, そうした暁には, それらのはりあわせとして一般の多様体・スキームを完全に群論的にとらえられるだろう, これが Grothendieck の広義の遠アーベル幾何のおおまかな構想だと思います.

3.2. Section 予想

遠アーベル幾何における重要な未解決問題として section 予想がありますが, これについては [T1] を参照して下さい. また, 最近の研究 [K] もあります.

3.3. $\dim = 1$ の場合

曲線の遠アーベル幾何は, 既に「古典的」で終わってしまったものという印象があるかもしれませんが, 私自身は, いまだに曲線の場合が一番おもしろいと思っています. 実際, たくさんの興味深い未解決問題があります. 以下では, ほんのいくつかの例を提示させていただきたいと思います. 基礎体 k 上の双曲的曲線 X を考えているものとします.

1. $[k : \mathbb{F}_p] < \infty$ で, 幾何的基本群 $\pi_1(\overline{X})$ を最大 pro-prime-to-p 商 $\pi_1(\overline{X})^{p'}$ (あるいは, より強く, 最大 pro-l 商 $\pi_1(\overline{X})^l$ (l: 素数 $\neq p$)) に置き換えた場合.

2.2 で述べた通り, 有限体上の場合, 幾何的基本群だけでも曲線をほとんど決定してしまうので, Grothendieck の本来の意味での遠アーベル幾何のパターン— 基礎体だけで決まる絶対 Galois 群と曲線の位相幾何だけで (モジュライによらず) 決まる幾何的基本群の間の, 高度に非自明な絡まり合いの中に曲線の (数論) 幾何が忠実に表現されている — とはだいぶ異なります. しかしながら, 2.2 の Remark 1 (ii) で述べた通り, 幾何的基本群をその最大 pro-prime-to-p 商に取り替えれば, モジュライに依存せずに決まる群になりますので, ここで Grothendieck 予想が成立すれば, 有限体上の場合も本来の遠アーベル幾何に晴れて仲間入りという感じです.

2. k が正標数局所体の場合 ($k \simeq \mathbb{F}_q((t))$).

$[k : \mathbb{Q}_p] < \infty$ の場合には, p 進 Hodge 理論や Serre-Tate 理論など, なんらかの p 進理論を幾何的基本群のアーベル化から得られる p 進 Galois 表現に適用することが不可欠でした. 正標数局所体上の場合, このような Galois 表現は一般には (étale part だけを見ているため) 十分な情報を与えてくれないのが問題です. そういう意味では問題自体が自然でないという考え方もあるのですが, 筆者は, 2.2 で述べた $\overline{\mathbb{F}_p}$ 上の場合へのアプローチがさまざまな代数幾何的問題と関係したように, この場合へのアプローチを考えることが, 何かおもしろい数論幾何的な問題を派生するのではないかと期待しています.

3. k が代数閉体上の関数体の場合 (non-isotriviality は仮定).

$\mathbb{C}$ 上の 1 変数代数関数体に限っても, 十分非自明でおもしろい問題をはらんでいるのではないかと思います. (Riemann 面の族に関する今吉-志賀の定理 ([IS]) を離散版とした時の副有限版を考えるという問題に当たります.)

4. $[k : \mathbb{Q}_p] < \infty$ に対する絶対版.

1.3 で復習した通り, この場合の相対版は望月氏によって非常に強い形で解決されていますが, 絶対版は, p 進局所体の絶対 Galois 群の非幾何的自己同型の存在により, 成否が不明になっています. これに関しては, 望月氏の最近の研究 [M4][M5][M6][M7] があります. 筆者は, 比較的安直に絶対版の成立を信じているのですが, 望月さんは, 近年の彼の Diophantus 幾何 (abc 予想など) への全く新しい圏論的アプローチなどをへて, どちらかというと不成立なのではないかと感じているようです.

References

[AI] G. W. Anderson and R. Indik, *On primes of degree one in function fields*, Proc. Amer. Math. Soc. **94** (1985), 31–32.

[D] A. Douady, *Détermination d'un groupe de Galois*, C. R. Acad. Sci. Paris **258** (1964), 5305–5308.

[G1] A. Grothendieck, *La longue marche à travers la théorie de Galois*, manuscript (1981).

[G2] ———, *Letter to G. Faltings* (German), manuscript (1983), included in [SL] with an English translation.

[G3] ———, *Esquisse d'un programme*, manuscript (1984), included in [SL] with an English translation.

[Ha1] D. Harbater, *Abhyankar's conjecture on Galois groups over curves*, Invent. Math. **117** (1994), 1–25.

[Ha2] ———, *Fundamental groups and embedding problems in characteristic p*, in Recent developments in the inverse Galois problem (Seattle, 1993), Contemp. Math., 186, Amer. Math. Soc., 1995, pp. 353–369.

[Hr] E. Hrushovski, *The Mordell-Lang conjecture for function fields*, J. Amer. Math. Soc. **9** (1996), 667–690.

[IN] Y. Ihara and H. Nakamura, *Some illustrative examples for anabelian geometry in high dimensions*, in [SL], pp. 127–138.

[IS] Y. Imayoshi and H. Shiga, *A finiteness theorem for holomorphic families of Riemann surfaces*, in Holomorphic functions and moduli, II (Berkeley, 1986), Math. Sci. Res. Inst. Publ., 11, Springer, 1988, pp. 207–219.

[K] Jochen Koenigsmann, *On the 'Section Conjecture' in anabelian geometry*, preprint, arXiv: math.AG/0305226.

[M1] S. Mochizuki, *The profinite Grothendieck conjecture for closed hyperbolic curves over number fields*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **3** (1996), 571–627.

[M2] ———, *The local pro-p anabelian geometry of curves*, Invent. Math. **138** (1999), 319–423.

[M3] ———, *Topics surrounding the anabelian geometry of hyperbolic curves*, in Galois groups and fundamental groups, Math. Sci. Res. Inst. Publ., 41, Cambridge Univ. Press, 2003, pp. 119–165.

[M4] ———The absolute anabelian geometry of canonical curves, Doc. Math., Extra Vol.: Kazuya Kato's fiftieth birthday (2003), 609–640.

[M5] ———The absolute anabelian geometry of hyperbolic curves, in Galois theory and modular forms, Dev. Math., 11, Kluwer Acad. Publ., 2004, pp. 77–122.

[M6] ———, *Galois sections in absolute anabelian geometry*, Preprint RIMS-1473 (2004).

[M7] *Absolute anabelian cuspidalizations of proper hyperbolic curves*, preliminary version (2004).

[N1] H. Nakamura, *Rigidity of the arithmetic fundamental group of a punctured projective line*, J. Reine Angew. Math. **405** (1990), 117–130.

[N2] ———, *Galois rigidity of the étale fundamental groups of punctured projective lines*, J. Reine Angew. Math. **411** (1990), 205–216.

[N3] ———, *Centralizers of Galois representations in pro-l pure sphere braid groups*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **67** (1991), 208–210.
[N4] ———, *Galois rigidity of algebraic mappings into some hyperbolic varieties*, Internat. J. Math. **4** (1993), 421–438.
[N5] ———Galois rigidity of pure sphere braid groups and profinite calculus, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **1** (1994), 71–136.
[NT] H. Nakamura and N. Takao, *Galois rigidity of pro-l pure braid groups of algebraic curves*, Trans. Amer. Math. Soc. **350** (1998), 1079–1102.
[P] F. Pop, *Étale Galois covers of affine smooth curves, The geometric case of a conjecture of Shafarevich, On Abhyankar's conjecture*, Invent. Math. **120** (1995), 555–578.
[PS] F. Pop and M. Saïdi, *On the specialization homomorphism of fundamental groups of curves in positive characteristic*, in Galois groups and fundamental groups, Math. Sci. Res. Inst. Publ., 41, Cambridge Univ. Press, 2003, pp. 107–118.
[R1] M. Raynaud, *Sections des fibrés vectoriels sur une courbe*, Bull. Soc. Math. France **110** (1982), 103–125.
[R2] ———, *Revêtements de la droite affine en caractéristique* $p > 0$ *et conjecture d'Abhyankar*, Invent. Math. **116** (1994), 425–462.
[R3] ———, *Sur le groupe fondamental d'une courbe complète en caractéristique* $p > 0$, in Arithmetic fundamental groups and noncommutative algebra (Berkeley, 1999), Proc. Sympos. Pure Math., 70, Amer. Math. Soc., 2002, pp. 335–351.
[SL] L. Schneps and P. Lochak (eds.), *Geometric Galois actions, 1, Around Grothendieck's "Esquisse d'un programme",* London Math. Soc. Lecture Note Ser., 242, Cambridge Univ. Press, 1997.
[SGA1] A. Grothendieck and Mme. M. Raynaud, *Revêtements Étales et groupe fondamental, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1960–1961 (SGA 1),* Lecture Notes in Mathematics, 224, Springer-Verlag, 1971.
[S1] J. Stix, *Affine anabelian curves in positive characteristic*, Compositio Math. **134** (2002), 75–85.
[S2] ———, *Projective anabelian curves in positive characteristic and descent theory for log-étale covers,* Dissertation (Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, 2002), Bonner Mathematische Schriften, 354, Universität Bonn, Mathematisches Institut, 2002.
[T1] A. Tamagawa, 代数曲線の数論的基本群に関する *Grothendieck* 予想, in 第４１回代数学シンポジウム報告集, 1996, pp. 73–82.
[T2] ———, *The Grothendieck conjecture for affine curves*, Compositio Math. **109** (1997), 135–194.
[T3] ———, *On the fundamental groups of curves over algebraically closed fields of characteristic* > 0, Internat. Math. Res. Notices **1999** (1999), no. 16, 853–873.
[T4] ———, *On the tame fundamental groups of curves over algebraically closed fields of characteristic* > 0, in Galois groups and fundamental groups, Math. Sci. Res. Inst. Publ., 41, Cambridge Univ. Press, 2003, pp. 47–105.
[T5] ———, *Finiteness of isomorphism classes of curves in positive characteristic with prescribed fundamental groups*, J. Algebraic Geom. **13** (2004), 675–724.
[U] K. Uchida, *Isomorphisms of Galois groups of algebraic function fields*, Ann. Math. (2) **106** (1977), 589–598.

Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan
E-mail address: tamagawa@kurims.kyoto-u.ac.jp