交代符号行列の数え上げと Cauchy 型の行列式，Pfaffian

名古屋大学多元数理科学研究科 岡田 聡一

1 序 — 交代符号行列の数え上げ

正方行列 $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ は，次の条件 (i), (ii), (iii) をみたすとき，**交代符号行列**（alternating sign matrix）であるという．

(i) $a_{ij} \in \{1, 0, -1\}$ $(1 \le i, j \le n)$.

(ii) $\sum_{j=1}^{n} a_{kj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} = 1$ $(1 \le k \le n)$.

(iii) 各行，各列において 0 でない成分を見ると，1 と -1 が交互に現れる．

n 次交代符号行列全体のなす集合を $\mathcal{A}_n$ と表す．

例えば，置換行列は交代符号行列だから，n 次置換行列全体のなす集合を $\mathcal{S}_n$ と表すと，$\mathcal{S}_n \subset \mathcal{A}_n$ である．また，$n = 3$ のとき，

$$\mathcal{A}_3 = \mathcal{S}_3 \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

交代符号行列は，Robbins–Rumsey [RR] によって，行列式を計算する Dodgson（Lewis Carroll として知られている）のアルゴリズム（condensation of determinant）に関する研究の中から発見された．そして，Weyl の分母公式の変形や，Bruhat 順序，square ice model などとの関係が徐々に明らかになってきた．さらに，最近では，XXZ スピン鎖などの数理物理学のモデルとの不思議な関係が予想されている．

この報告では，交代符号行列の数え上げ問題を考察する．Mills–Robbins–Rumsey [MRR] が提出した n 次の交代符号行列の個数に関する予想は，十数年後に Zeilberger, Kuperberg によって全く異なる方法で証明された．（この予想の提示から解決にいたる物語については，[B] に詳しく書かれている．）

定理 1.1. （Zeilberger [Z], Kuperberg [K1]）n 次交代符号行列の個数は

$$\#\mathcal{A}_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(3k+1)!}{(n+k)!} \tag{1}$$

で与えられる．

位数 8 の正二面体群 D_8（正方形の対称性の群）が自然に $\mathcal{A}_n$ に作用している．従って，D_8 の部分群 H に対して，H による固定点を数え上げるという問題も自然に考えられ，

Robbins [R] は H に関する対称性をもつ交代符号行列の個数に関してさまざまな予想を提出している．D_8 の自明でない部分群の共役類は全部で 7 つあり，それぞれに対応して次のクラスの交代符号行列が考えられる．

(HTS) 180° 回転に関して不変である，つまり，$a_{n+1-i,n+1-j} = a_{i,j}$ $(1 \le i,j \le n)$ をみたす交代符号行列を，**half-turn symmetric** な交代符号行列 (HTSASM) という．

(QTS) 90° 回転に関して不変である，つまり，$a_{n+1-j,i} = a_{i,j}$ $(1 \le i,j \le n)$ をみたす交代符号行列を，**quarter-turn symmetric** な交代符号行列 (QTSASM) という．

(VS) 縦方向の軸に関する鏡映で不変である，つまり，$a_{ij} = a_{i,n+1-j}$ $(1 \le i,j \le n)$ をみたす交代符号行列を，**vertically symmetric** な交代符号行列 (VSASM) という．

(VHS) 縦，横両方向の軸に関する鏡映で不変である，つまり，$a_{ij} = a_{i,n+1-j} = a_{n+1-i,j}$ $(1 \le i,j \le n)$ をみたす交代符号行列を，**vertically and horizontally symmetric** な交代符号行列 (VHSASM) という．

(DS) 主対角線に関する鏡映で不変である，つまり，$a_{ij} = a_{ji}$ $(1 \le i,j \le n)$ をみたす交代符号行列を，**diagonally symmetric** な交代符号行列 (DSASM) という．

(DAS) 主対角線, 逆対角線に関する鏡映で不変である，つまり，$a_{ij} = a_{ji} = a_{n+1-j,n+1-i}$ $(1 \le i,j \le n)$ をみたす交代符号行列を，**diagonally and antidiagonally symmetric** な交代符号行列 (DASASM) という．

(TS) D_8 全体で不変である交代符号行列を，**totally symmetric** な交代符号行列 (TSASM) という．

対称性 $\circledast =$ HTS, QTS, $\cdots$ に対して，その対称性をもつ n 次交代符号行列全体のなす集合を $\mathcal{A}_n^{\circledast}$ と表す．

Kuperberg [K2] は，square ice model（の基礎となるグラフと境界条件）をうまく設定し，次の 2 つの段階を経て，対称性をもつ交代符号行列の数え上げ問題（のうちのいくつか）を解決している．

(a) square ice model の分配関数を，Yang–Baxter 方程式を用いることによって，行列式，あるいは Pfaffian の形に表す．

(b) 含まれるスペクトルパラメーターを q のべきに特殊化した場合に，(a) で求めた行列式，Pfaffian を割り切る因子を見出すことによって，分配関数を計算する．

ところが，Cauchy 型の行列式，Pfaffian の分解公式（定理 3.1）を利用すると，(a) で求めた分配関数が本質的に古典群の既約指標で表されることが証明できる．そして，対称性をもつ交代符号行列の個数が 2 のべき，3 のべきを除いて古典群の既約表現の次元で表されることがわかる．特に，スペクトルパラメーターを q のべきに特殊化することでは証明できなかった vertically and horizontally symmetric な交代符号行列の数え上げ問題も解決できる．このようにして，次のクラスの交代符号行列に対してその個数がわかっている．

定理 1.2. （岡田 [O3]）

(a) n 次交代符号行列の個数は，

$$\#\mathcal{A}_n = 3^{-n(n-1)/2} \dim \mathbf{GL}_{2n}(\delta(n-1,n-1)).$$

(b) $2n$ 次 half-turn symmetric な交代符号行列の個数は，

$$\#\mathcal{A}_{2n}^{\mathrm{HTS}} = 3^{-n(n-1)/2} \dim \mathbf{GL}_{2n}(\delta(n-1,n-1)) \cdot 3^{-n(n-1)/2} \dim \mathbf{GL}_{2n}(\delta(n,n-1)).$$

(c) $4n$ 次 quarter-turn symmetric な交代符号行列の個数は，

$$\begin{aligned}\#\mathcal{A}_{4n}^{\mathrm{QTS}} &= \Big(3^{-n(n-1)/2} \dim \mathbf{GL}_{2n}(\delta(n-1,n-1))\Big)^3 \\ &\quad \times 3^{-n(n-1)/2} \dim \mathbf{GL}_{2n}(\delta(n,n-1)).\end{aligned}$$

(d) $(2n+1)$ 次 vertically symmetric な交代符号行列の個数は，

$$\#\mathcal{A}_{2n+1}^{\mathrm{VS}} = 3^{-n(n-1)} \dim \mathbf{Sp}_{4n}(\delta(n-1,n-1)).$$

(e) $(4n+1)$ 次 vertically and horizontally symmetric な交代符号行列の個数は，

$$\begin{aligned}\#\mathcal{A}_{4n+1}^{\mathrm{VHS}} &= 3^{-n(n-1)} \dim \mathbf{Sp}_{4n}(\delta(n-1,n-1)) \\ &\quad \times 2^{-2n} 3^{-n^2} \dim \widetilde{\mathbf{O}}_{4n}(\delta(n+1/2,n-1/2)).\end{aligned}$$

(f) $(4n+3)$ 次 vertically and horizontally symmetric な交代符号行列の個数は，

$$\#\mathcal{A}_{4n+3}^{\mathrm{VHS}} = 3^{-n(n-1)} \dim \mathbf{Sp}_{4n}(\delta(n-1,n-1)) \cdot 3^{-n^2} \dim \mathbf{Sp}_{4n+2}(\delta(n,n-1)).$$

ここで，$\dim \mathbf{GL}_N(\lambda)$ (resp. $\dim \mathbf{Sp}_N(\lambda)$, $\dim \widetilde{\mathbf{O}}_N(\lambda)$) は，$\mathbf{GL}_N$ (resp. $\mathbf{Sp}_N$, $\widetilde{\mathbf{O}}_N$) の最高ウエイト λ をもつ既約表現の次元を表す．また，

$$\begin{aligned}\delta(n-1,n-1) &= (n-1,n-1,n-2,n-2,\cdots,2,2,1,1), \\ \delta(n,n-1) &= (n,n-1,n-1,n-2,\cdots,3,2,2,1), \\ \delta(n+1/2,n-1/2) &= (n+1/2,n-1/2,n-1/2,n-3/2,\cdots,5/2,3/2,3/2,1/2)\end{aligned}$$

である．

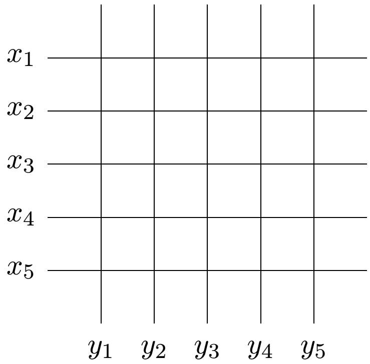
Weyl の次元公式を用いると，この定理から，対称性をもつ交代符号行列の個数を (1) のような積の形に表す公式が導かれる．

この報告の構成は，以下のとおりである．§2 では，Kuperberg [K1], [K2] に従って，交代符号行列の母関数と square ice model の分配関数の関係について復習する．§3 では，Cauchy 型行列式，Pfaffian の分解公式を与え，これらの公式を用いて square ice model の分配関数が古典群の既約指標で表されることを説明する．§4 では Cauchy 型行列式，Pfaffian の分解公式の別の応用を，§5 では交代符号行列の周辺の話題として λ-行列式などを紹介する．

2　交代符号行列と square ice model

Kuperberg は [K1], [K2] で，square ice model を利用して，交代符号行列の母関数を行列式，Pfaffian を用いて表している．この節では，この行列式，Pfaffian 表示を説明する．

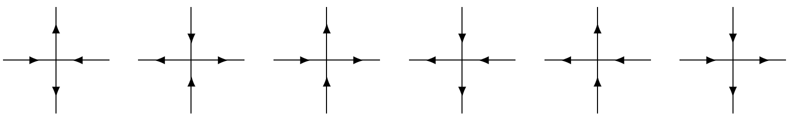
まず，対称性を課さない交代符号行列を考える．



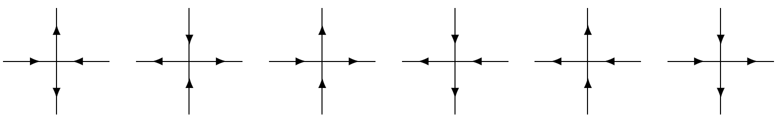
のような格子状のグラフ（上の図は $n = 5$ の場合である．また，$x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n$ は分配関数を定義するためのスペクトルパラメーターである．）を考え，次の 2 条件 (i), (ii) をみたすように各辺に矢印を配置する．

(i) （domain wall boundary condition）左端，右端の辺の矢印はすべて内側を向き，上端，下端の辺の矢印はすべて外側を向いている．

(ii) （square ice condition）端点以外の各頂点において，4 つの辺の矢印のうちその頂点に向かう矢印は 2 本である．つまり，次の 6 通りの配置のいずれかのみを許す．

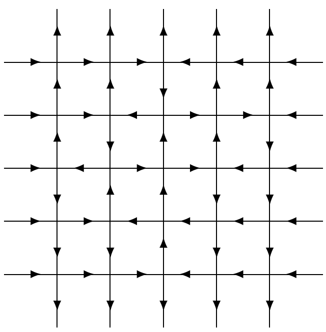


この条件をみたす配置全体のなす集合を $\mathcal{C}_n$ とする．このような矢印の配置が与えられたとき，端点以外の各頂点に次の規則で 1, −1, 0 を対応させることによって，n 次正方行列を作る．



$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
1	-1	0	0	0	0

例えば，



$$\longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

この対応によって，交代符号行列の全体 $\mathcal{A}_n$ と条件 (i), (ii) をみたす矢印の配置全体 $\mathcal{C}_n$ の間の全単射が得られる．

分配関数を定義するために，各頂点での 6 通りの矢印の配置に対して，Boltzmann 重み W を次のように与える．（a はモデルのパラメーターであり，z は後でスペクトルパラメーターの比に置き換えられる．）

$$W\left(\;\middle|\; z;a\right) = \sigma(a^2), \quad W\left(\;\middle|\; z;a\right) = \sigma(a^2),$$
$$W\left(\;\middle|\; z;a\right) = \sigma(a/z), \quad W\left(\;\middle|\; z;a\right) = \sigma(a/z),$$
$$W\left(\;\middle|\; z;a\right) = \sigma(az), \quad W\left(\;\middle|\; z;a\right) = \sigma(az).$$

ここで，

$$\sigma(t) = t - \frac{1}{t}$$

である．（以下でもこの記号を用いる．）そして，スペクトルパラメーター $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} = (x_1, \cdots, x_n)$, $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} = (y_1, \cdots, y_n)$ に対して，分配関数 $Z_n(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}}; a)$ を

$$Z_n(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}}; a) = \sum \prod_{i,j=1}^{n} W\left(x_i \underset{y_j}{\;} \;\middle|\; \frac{x_i}{y_j}; a\right)$$

（和は $\mathcal{C}_n$ に含まれる矢印の配置全体にわたる）とおいて定義する．このとき，

補題 2.1. （Kuperberg [K2]）交代符号行列 A に現れる -1 の個数を $n(A)$ とし，母関数

$$A_n(x) = \sum_{A \in \mathcal{A}_n} x^{n(A)}$$

を考える．このとき，$A_n(x)$ は分配関数 $Z_n(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}}; a)$ を用いて，

$$A_n(x) = \frac{1}{\sigma(a)^{n^2-n}\sigma(a^2)^n} Z_n(1, \cdots, 1, 1, \cdots, 1; a)$$

と表される．ただし，$x = a^2 + 2 + a^{-2}$ である．

従って，n 次交代符号行列の個数を求めるには，$a = \zeta_6 = \exp(2\pi\sqrt{-1}/6)$ のときの分配関数の特殊値 $Z_n(1, \cdots, 1, 1, \cdots, 1; \zeta_6)$ を計算すればよい．ところが，ここで考えている domain wall boundary condition をもつ square ice model は以前から考察され，$Z_n(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}}; a)$ の行列式による表示が Izergin–Korepin によって与えられていた．

定理 2.2. （Izergin–Korepin [Iz]）

$$Z_n(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}}; a) = \frac{\sigma(a^2)^n \prod_{i,j=1}^{n} \sigma(ax_i/y_j)\sigma(ay_j/x_i)}{\prod_{1 \le i < j \le n} \sigma(x_j/x_i)\sigma(y_j/y_i)} \det\left(\frac{1}{\sigma(ax_i/y_j)\sigma(ay_j/x_i)} \right)_{1 \le i,j \le n}.$$

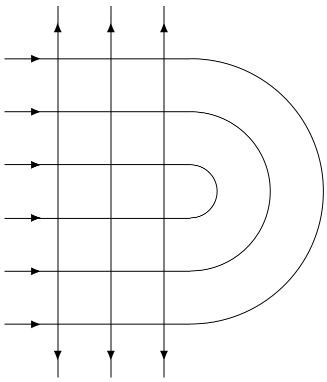
この表示ではそのまま $x_1 = \cdots = x_n = y_1 = \cdots = y_1 = 1$ と特殊化することはできないが，次節で述べる Cauchy 型行列式の分解公式を用いると，$Z_n(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}; \overrightarrow{\boldsymbol{y}}; \zeta_6)$ を一般線型群

の既約指標（Schur 関数）を用いて表すことができ，$x_1 = \cdots = x_n = y_1 = \cdots = y_n = 1$ とおくことができる．

次に，対称性 $\circledast (= \mathrm{HTS}, \cdots)$ をもつ交代符号行列を考える．対称性 $\circledast$ に対応する D_8 の部分群を H とする．交代符号行列 $A \in \mathcal{A}_n^{\circledast}$ に対して，A に現れる -1 の H-軌道の個数（ただし，対称性から -1 でなければならない成分は除く）を $n_{\circledast}(A)$ と表し，母関数

$$A_n^{\circledast}(x) = \sum_{A \in \mathcal{A}_n^{\circledast}} x^{n_{\circledast}(A)}$$

を考える．Kuperberg [K2] は，対称性をもつ交代符号行列のいくつかのクラスに対して，square ice model の基礎となるグラフと境界条件をうまくとることによって，$A_n^{\circledast}(x)$ を対応する square ice model の分配関数を用いて表し，分配関数の行列式，Pfaffian による表示を与えている．例えば，half-turn symmetric な交代符号行列の場合は，次のようなグラフと境界条件について，分配関数を与えている．



Kuperberg の求めた分配関数を行列式，Pfaffian の形で与えよう．n 個の変数からなる 2 つのベクトル $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} = (x_1, \cdots, x_n)$, $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} = (y_1, \cdots, y_n)$ とパラメーター a, b, c に対して，n 次正方行列 M, M_{HT}, M_{U}, M_{UU} を，

$$\begin{aligned}
M(n; \overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}}; a)_{i,j} &= \frac{1}{\sigma(ax_i/y_j)\sigma(ay_j/x_i)}, \\
M_{\mathrm{HT}}(n; \overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}}; a)_{i,j} &= \frac{1}{\sigma(ax_i/y_j)} + \frac{1}{\sigma(ay_j/x_i)}, \\
M_{\mathrm{U}}(n; \overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}}; a)_{i,j} &= \frac{1}{\sigma(ax_i/y_j)\sigma(ay_j/x_i)} - \frac{1}{\sigma(ax_iy_j)\sigma(1/x_iy_j)}, \\
M_{\mathrm{UU}}(n; \overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}}; a, b, c)_{i,j} &= \frac{\sigma(b/y_j)\sigma(cx_i)}{\sigma(ax_i/y_j)} - \frac{\sigma(b/y_j)\sigma(c/x_i)}{\sigma(a/x_iy_j)} \\
&\quad - \frac{\sigma(by_j)\sigma(cx_i)}{\sigma(ax_iy_j)} + \frac{\sigma(by_j)\sigma(c/x_i)}{\sigma(ay_j/x_i)}
\end{aligned}$$

とおいて定める．また，

$$\begin{aligned}
F(n; \overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}}; a) &= \frac{\prod_{i,j=1}^{n} \sigma(ax_i/y_j)\sigma(ay_j/x_i)}{\prod_{1 \le i < j \le n} \sigma(x_j/x_i)\sigma(y_i/y_j)}, \\
F_V(n; \overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}}; a) &= \frac{\prod_{i,j=1}^{n} \sigma(ax_i/y_j)\sigma(ay_j/x_i)\sigma(ax_iy_j)\sigma(a/x_iy_j)}{\prod_{1 \le i < j \le n} \sigma(x_j/x_i)\sigma(y_i/y_j) \prod_{1 \le i \le j \le n} \sigma(1/x_ix_j)\sigma(y_iy_j)}
\end{aligned}$$

とおき，分配関数（を交代符号行列の母関数にあうように $\sigma(a)$ のべきなどを調節したもの）を次のように定義する．

$$
\begin{aligned}
A(n;\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{y}};a) &= \sigma(a)^{-n^2+n}F(n;\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{y}};a)\det M(n;\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{y}};a),\\
A_{\mathrm{HT}}^{(2)}(2n;\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{y}};a) &= \sigma(a)^{-n^2}F(n;\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{y}};a)\det M_{\mathrm{HT}}(n;\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{y}};a),\\
A_{\mathrm{V}}(2n+1;\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{y}};a) &= \sigma(a)^{-2n^2+2n}F_{\mathrm{V}}(n;\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{y}};a)\det M_{\mathrm{U}}(n;\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{y}};a),\\
A_{\mathrm{VH}}^{(2)}(4n+1;\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{y}};a) &= \sigma(a)^{-2n^2-n}F_{\mathrm{V}}(n;\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{y}};a)\det M_{\mathrm{UU}}(n;\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{y}};a,a,a),\\
A_{\mathrm{VH}}^{(2)}(4n+3;\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{y}};a) &= \sigma(a)^{-2n^2-n}F_{\mathrm{V}}(n;\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{y}};a)\det M_{\mathrm{UU}}(n;\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{y}};a,a^{-1},a^{-1}).
\end{aligned}
$$

さらに，$2n$ 個の変数からなるベクトル $\vec{\boldsymbol{x}}=(x_1,\cdots,x_{2n})$ とパラメーター a に対して，$2n$ 次正方行列 $M_{\mathrm{QT}}^{(k)}$ を

$$
M_{\mathrm{QT}}^{(k)}(n;\vec{\boldsymbol{x}};a)_{ij}=\frac{\sigma(x_j^k/x_i^k)}{\sigma(ax_j/x_i)\sigma(ax_i/x_j)}
$$

とおいて定義する．また，

$$
F_{\mathrm{QT}}(n;\vec{\boldsymbol{x}};a)=\frac{\prod_{1\le i<j\le 2n}\sigma(ax_j/x_i)\sigma(ax_i/x_j)}{\prod_{1\le i<j\le 2n}\sigma(x_j/x_i)}
$$

とおき，分配関数を

$$
A_{\mathrm{QT}}^{(k)}(4n;\vec{\boldsymbol{x}};a)=\sigma(a)^{-2n^2+2n}F_{\mathrm{QT}}(n;\vec{\boldsymbol{x}};a)\,\mathrm{Pf}\,M_{\mathrm{QT}}^{(k)}(n;\vec{\boldsymbol{x}};a)
$$

によって定義する．このとき，

定理 2.3.（Kuperberg [K2]）対称性をもつ交代符号行列の母関数は，分配関数を用いて，

$$
\begin{aligned}
A_n(x) &= A(n;\vec{\mathbf{1}},\vec{\mathbf{1}};a),\\
A_{2n}^{\mathrm{HTS}}(x) &= A(n;\vec{\mathbf{1}},\vec{\mathbf{1}};a)A_{\mathrm{HT}}^{(2)}(2n;\vec{\mathbf{1}},\vec{\mathbf{1}};a),\\
A_{2n+1}^{\mathrm{VS}}(x) &= A_{\mathrm{V}}(2n+1;\vec{\mathbf{1}},\vec{\mathbf{1}};a),\\
A_{4n+1}^{\mathrm{VHS}}(x) &= A_{\mathrm{V}}(2n+1;\vec{\mathbf{1}},\vec{\mathbf{1}};a)A_{\mathrm{VH}}^{(2)}(4n+1;\vec{\mathbf{1}},\vec{\mathbf{1}};a),\\
A_{4n+3}^{\mathrm{VHS}}(x) &= A_{\mathrm{V}}(2n+1;\vec{\mathbf{1}},\vec{\mathbf{1}};a)A_{\mathrm{VH}}^{(2)}(4n+3;\vec{\mathbf{1}},\vec{\mathbf{1}};a),\\
A_{4n}^{\mathrm{QTS}}(x) &= A_{\mathrm{QT}}^{(1)}(4n;\vec{\mathbf{1}};a)A_{\mathrm{QT}}^{(2)}(4n;\vec{\mathbf{1}};a)
\end{aligned}
$$

と表される．ここで，$\vec{\mathbf{1}}=(1,\cdots,1)$ であり，$x=a^2+2+a^{-2}$ である．

3 Cauchy 型の行列式，Pfaffian

この節では，Cauchy 型行列式，Pfaffian の分解公式を与える．そして，これらの公式を用いて，$a=\zeta_6$ のときの分配関数を古典群の既約指標を用いて表す．

まず，$\overrightarrow{\boldsymbol{x}} = (x_1, \cdots, x_n)$, $\overrightarrow{\boldsymbol{a}} = (a_1, \cdots, a_n)$ という n 個の変数からなる 2 つのベクトルに対して，次のような Vandermonde 型の行列 $V^{p,q}(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}; \overrightarrow{\boldsymbol{a}})$, $W^n(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}; \overrightarrow{\boldsymbol{a}})$ を導入する．$p+q=n$ となる非負整数 p, q に対して，

$$(1, x_i, x_i^2, \cdots, x_i^{p-1}, a_i, a_i x_i, \cdots, a_i x_i^{q-1})$$

を第 i 行とする n 次正方行列を $V^{p,q}(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}; \overrightarrow{\boldsymbol{a}})$ と表す．つまり，

$$V^{p,q}(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}; \overrightarrow{\boldsymbol{a}}) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{p-1} & a_1 & a_1 x_1 & \cdots & a_1 x_1^{q-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{p-1} & a_n & a_n x_n & \cdots & a_n x_n^{q-1} \end{pmatrix}.$$

また，

$$(1 + a_i x_i^{n-1}, x_i + a_i x_i^{n-2}, \cdots, x_i^{n-1} + a_i)$$

を第 i 行とする n 次正方行列を $W^n(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}; \overrightarrow{\boldsymbol{a}})$ と表す．つまり，

$$W^n(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}; \overrightarrow{\boldsymbol{a}}) = \begin{pmatrix} 1 + a_1 x_1^{n-1} & x_1 + a_1 x_1^{n-2} & \cdots & x_1^{n-1} + a_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 + a_n x_n^{n-1} & x_n + a_n x_1^{n-2} & \cdots & x_n^{n-1} + a_n \end{pmatrix}.$$

Cauchy 型行列式，Pfaffian の分解公式とは，これらの一般化された Vandermonde 行列式を成分とするような行列式，Pfaffian を与える次の等式である．

定理 3.1. （岡田 [O4], 石川–岡田–田川–Zeng [IOTZ]）

(a) n を正整数，p, q を非負整数とする．6 組の変数

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}} = (x_1, \cdots, x_n), \quad \overrightarrow{\boldsymbol{y}} = (y_1, \cdots, y_n), \quad \overrightarrow{\boldsymbol{z}} = (z_1, \cdots, z_{p+q}),$$
$$\overrightarrow{\boldsymbol{a}} = (a_1, \cdots, a_n), \quad \overrightarrow{\boldsymbol{b}} = (b_1, \cdots, b_n), \quad \overrightarrow{\boldsymbol{c}} = (c_1, \cdots, c_{p+q})$$

に対して，

$$\det \left(\frac{\det V^{p+1,q+1}(x_i, y_j, \overrightarrow{\boldsymbol{z}}; a_i, b_j, \overrightarrow{\boldsymbol{c}})}{y_j - x_i} \right)_{1 \le i,j \le n}$$
$$= \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{\prod_{i,j=1}^{n} (y_j - x_i)} \det V^{p,q}(\overrightarrow{\boldsymbol{z}}; \overrightarrow{\boldsymbol{c}})^{n-1} \det V^{n+p,n+q}(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}}, \overrightarrow{\boldsymbol{z}}; \overrightarrow{\boldsymbol{a}}, \overrightarrow{\boldsymbol{b}}, \overrightarrow{\boldsymbol{c}}). \quad (2)$$

(b) n を正整数，p, q, r, s を非負整数とする．7 組の変数

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}} = (x_1, \cdots, x_{2n}), \quad \overrightarrow{\boldsymbol{a}} = (a_1, \cdots, a_{2n}), \quad \overrightarrow{\boldsymbol{b}} = (b_1, \cdots, b_{2n}),$$
$$\overrightarrow{\boldsymbol{z}} = (z_1, \cdots, z_{p+q}), \quad \overrightarrow{\boldsymbol{c}} = (c_1, \cdots, c_{p+q}),$$
$$\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = (w_1, \cdots, w_{r+s}), \quad \overrightarrow{\boldsymbol{d}} = (d_1, \cdots, d_{r+s})$$

に対して，

$$\mathrm{Pf} \left(\frac{\det V^{p+1,q+1}(x_i, x_j, \overrightarrow{\boldsymbol{z}}; a_i, a_j, \overrightarrow{\boldsymbol{c}}) \det V^{r+1,s+1}(x_i, x_j, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}; b_i, b_j, \overrightarrow{\boldsymbol{d}})}{x_j - x_i} \right)_{1 \le i,j \le 2n}$$
$$= \frac{1}{\prod_{1 \le i < j \le 2n} (x_j - x_i)} \det V^{p,q}(\overrightarrow{\boldsymbol{z}}; \overrightarrow{\boldsymbol{c}})^{n-1} \det V^{r,s}(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}; \overrightarrow{\boldsymbol{d}})^{n-1}$$
$$\times \det V^{n+p,n+q}(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{z}}; \overrightarrow{\boldsymbol{a}}, \overrightarrow{\boldsymbol{c}}) \det V^{n+r,n+s}(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}; \overrightarrow{\boldsymbol{b}}, \overrightarrow{\boldsymbol{d}}). \quad (3)$$

(c) n を正整数，p を非負整数とする．6 組の変数

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}} = (x_1, \cdots, x_n), \quad \overrightarrow{\boldsymbol{y}} = (y_1, \cdots, y_n), \quad \overrightarrow{\boldsymbol{z}} = (z_1, \cdots, z_p),$$
$$\overrightarrow{\boldsymbol{a}} = (a_1, \cdots, a_n), \quad \overrightarrow{\boldsymbol{b}} = (b_1, \cdots, b_n), \quad \overrightarrow{\boldsymbol{c}} = (c_1, \cdots, c_p)$$

に対して，

$$\begin{aligned}&\det\left(\frac{\det W^{p+2}(x_i, y_j, \overrightarrow{\boldsymbol{z}}; a_i, b_j, \overrightarrow{\boldsymbol{c}})}{(y_j - x_i)(1 - x_i y_j)}\right)_{1 \le i,j \le n} \\ &= \frac{(-1)^n}{\prod_{i,j=1}^{n}(y_j - x_i)(1 - x_i y_j)} \det W^p(\overrightarrow{\boldsymbol{z}}; \overrightarrow{\boldsymbol{c}})^{n-1} \det W^{2n+p}(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}}, \overrightarrow{\boldsymbol{z}}; \overrightarrow{\boldsymbol{a}}, \overrightarrow{\boldsymbol{b}}, \overrightarrow{\boldsymbol{c}}).\end{aligned} \tag{4}$$

(d) n を正整数，p, q を非負整数とする．7 組の変数

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}} = (x_1, \cdots, x_{2n}), \quad \overrightarrow{\boldsymbol{a}} = (a_1, \cdots, a_{2n}), \quad \overrightarrow{\boldsymbol{b}} = (b_1, \cdots, b_{2n}),$$
$$\overrightarrow{\boldsymbol{z}} = (z_1, \cdots, z_p), \quad \overrightarrow{\boldsymbol{c}} = (c_1, \cdots, c_p),$$
$$\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = (w_1, \cdots, w_q), \quad \overrightarrow{\boldsymbol{d}} = (d_1, \cdots, d_q)$$

に対して，

$$\begin{aligned}&\mathrm{Pf}\left(\frac{\det W^{p+2}(x_i, x_j, \overrightarrow{\boldsymbol{z}}; a_i, a_j, \overrightarrow{\boldsymbol{c}}) \det W^{q+2}(x_i, x_j, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}; b_i, b_j, \overrightarrow{\boldsymbol{d}})}{(x_j - x_i)(1 - x_i x_j)}\right)_{1 \le i,j \le 2n} \\ &= \frac{1}{\prod_{1 \le i < j \le 2n}(x_j - x_i)(1 - x_i x_j)} \det W^p(\overrightarrow{\boldsymbol{z}}; \overrightarrow{\boldsymbol{c}})^{n-1} \det W^q(\overrightarrow{\boldsymbol{w}}; \overrightarrow{\boldsymbol{d}})^{n-1} \\ &\quad \times \det W^{2n+p}(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{z}}; \overrightarrow{\boldsymbol{a}}, \overrightarrow{\boldsymbol{c}}) \det W^{2n+q}(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{w}}; \overrightarrow{\boldsymbol{b}}, \overrightarrow{\boldsymbol{d}}).\end{aligned} \tag{5}$$

これらの等式は，特別な場合が [O2], [O3] で証明され，一般の場合が [O4] で予想された．そして，一般的な状況のもとでの証明が [IOTZ] で与えられた．

証明のアイデア． 次の 2 段階に分けて証明する．

第 1 段階：n 次正方行列 A と行添字 $i_1, \cdots, i_r$，列添字 $j_1, \cdots, j_r$ が与えられたとき，A から第 i_1 行，$\cdots$，第 i_r 行，第 j_1 列，$\cdots$，第 j_r 列を取り除いて得られる $(n-r)$ 次正方行列を $A^{i_1, \cdots, i_r}_{j_1, \cdots, j_r}$ と表す．このとき，次の Desnanot–Jacobi の公式とその Pfaffian 版が成り立つ．

$$\det A \cdot \det A^{1,2}_{1,2} = \det A^2_2 \cdot \det A^1_1 - \det A^2_1 \cdot \det A^1_2, \tag{6}$$
$$\mathrm{Pf}\, A \cdot \mathrm{Pf}\, A^{1234}_{1234} = \mathrm{Pf}\, A^{12}_{12} \cdot \mathrm{Pf}\, A^{34}_{34} - \mathrm{Pf}\, A^{13}_{13} \cdot \mathrm{Pf}\, A^{24}_{24} + \mathrm{Pf}\, A^{14}_{14} \cdot \mathrm{Pf}\, A^{23}_{23}. \tag{7}$$

（ただし，(7) では n は偶数，A は交代行列とする．）この Desnanot–Jacobi の公式を用いて，一般の場合を $n = 2$ の場合に帰着させる．

第 2 段階：$n = 2$ の場合を，$p + q$ あるいは $p + q + r + s$ に関する帰納法で証明する．

注意 3.2. 定理 3.1 の等式 (2) において，$p = q = 0$ とし，

$$x_i \to x_i^2, \quad y_i \to y_i^2, \quad a_i \to x_i, \quad b_i \to y_i \quad (1 \le i \le n)$$

と置き換えると，**Cauchy の行列式** [C]

$$\det\left(\frac{1}{x_i + y_j}\right)_{1 \le i,j \le n} = \frac{(-1)^{n(n-1)/2} \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)(y_j - y_i)}{\prod_{i,j=1}^{n} (x_i + y_j)}$$

が得られる．また，等式 (3) において，$p = q = r = s = 0$ とし，

$$x_i \to x_i^2, \quad a_i \to x_i, \quad b_i \to y_i \quad (1 \le i \le n)$$

と置き換えると，**Schur の Pfaffian** [S]

$$\mathrm{Pf}\left(\frac{x_j - x_i}{x_j + x_i}\right)_{1 \le i,j \le 2n} = \prod_{1 \le i < j \le 2n} \frac{x_j - x_i}{x_j + x_i}$$

が得られる．

定理 3.1 を利用すると，前節で導入した分配関数を古典群の既約指標を用いて表すことができる．ここで，古典群の既約指標を Weyl の指標公式に従って次のように定義する．整数（あるいは半整数）の列 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ に対して，n 次正方行列 $V(\alpha; \overrightarrow{\boldsymbol{x}})$, $W^{\pm}(\alpha; \overrightarrow{\boldsymbol{x}})$ を

$$V(\alpha; \overrightarrow{\boldsymbol{x}}) = \left(x_i^{\alpha_j}\right)_{1 \le i,j \le n}, \quad W^{\pm}(\alpha; \overrightarrow{\boldsymbol{x}}) = \left(x_i^{\alpha_j} \pm x_i^{-\alpha_j}\right)_{1 \le i,j \le n}$$

とおいて定める．非負整数の減少列（分割）$\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ が与えられたとき，

$$\mathbf{GL}_n(\lambda; \overrightarrow{\boldsymbol{x}}) = \frac{\det V(\lambda + \delta(n-1); \overrightarrow{\boldsymbol{x}})}{\det V(\delta(n-1); \overrightarrow{\boldsymbol{x}})},$$
$$\mathbf{Sp}_{2n}(\lambda; \overrightarrow{\boldsymbol{x}}) = \frac{\det W^{-}(\lambda + \delta(n); \overrightarrow{\boldsymbol{x}})}{\det W^{-}(\delta(n); \overrightarrow{\boldsymbol{x}})}$$

とおく．$\mathbf{GL}_n(\lambda; \overrightarrow{\boldsymbol{x}})$, $\mathbf{Sp}_{2n}(\lambda; \overrightarrow{\boldsymbol{x}})$ はそれぞれ，一般線型群 $\mathbf{GL}_n$，斜交群 $\mathbf{Sp}_{2n}$ の λ を最高ウェイトとする既約表現の指標である．また，非負整数（あるいは非負半整数）の減少列 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ に対して，

$$\widetilde{\mathbf{O}}_{2n+1}(\lambda; \overrightarrow{\boldsymbol{x}}) = \frac{\det W^{-}(\lambda + \delta(n-1/2); \overrightarrow{\boldsymbol{x}})}{\det W^{-}(\delta(n-1/2); \overrightarrow{\boldsymbol{x}})},$$
$$\widetilde{\mathbf{O}}_{2n}(\lambda; \overrightarrow{\boldsymbol{x}}) = \begin{cases} \dfrac{\det W^{+}(\lambda + \delta(n-1); \overrightarrow{\boldsymbol{x}})}{(1/2)\det W^{+}(\delta(n-1); \overrightarrow{\boldsymbol{x}})} & (\lambda_n \neq 0 \text{ のとき}) \\ \dfrac{\det W^{+}(\lambda + \delta(n-1); \overrightarrow{\boldsymbol{x}})}{\det W^{+}(\delta(n-1); \overrightarrow{\boldsymbol{x}})} & (\lambda_n = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定義する．$\widetilde{\mathbf{O}}_N(\lambda; \overrightarrow{\boldsymbol{x}})$ は直交群 $\mathbf{O}_N$ の 2 重被覆群 $\widetilde{\mathbf{O}}_N = \mathbf{Pin}_N$ の既約指標である．

定理 3.3. （岡田 [O3]）$a=\zeta_6$ のときの分配関数は，古典群の既約指標を用いて次のように表される．

$$
\begin{aligned}
A(n;\overrightarrow{\boldsymbol{x}},\overrightarrow{\boldsymbol{y}};\zeta_6)&=3^{-n(n-1)/2}\prod_{i=1}^{n}x_i^{-n+1}y_i^{-n+1}\cdot\mathbf{GL}_{2n}(\delta(n-1,n-1):\overrightarrow{\boldsymbol{x}}^2,\overrightarrow{\boldsymbol{y}}^2),\\
A_{\mathrm{HT}}^{(2)}(2n;\overrightarrow{\boldsymbol{x}},\overrightarrow{\boldsymbol{y}};\zeta_6)&=3^{-n(n-1)/2}\prod_{i=1}^{n}x_i^{-n}y_i^{-n}\cdot\mathbf{GL}_{2n}(\delta(n,n-1);\overrightarrow{\boldsymbol{x}}^2,\overrightarrow{\boldsymbol{y}}^2),\\
A_{\mathrm{V}}(2n+1;\overrightarrow{\boldsymbol{x}},\overrightarrow{\boldsymbol{y}};\zeta_6)&=3^{-n(n-1)}\mathbf{Sp}_{4n}(\delta(n-1,n-1);\overrightarrow{\boldsymbol{x}}^2,\overrightarrow{\boldsymbol{y}}^2),\\
A_{\mathrm{VH}}^{(2)}(4n+1;\overrightarrow{\boldsymbol{x}},\overrightarrow{\boldsymbol{y}};\zeta_6)&=3^{-n^2}\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(x_i+x_i^{-1})(y_i+y_i^{-1})}\\
&\qquad\times\widetilde{\mathbf{O}}_{4n}(\delta(n+1/2,n-1/2);\overrightarrow{\boldsymbol{x}}^2,\overrightarrow{\boldsymbol{y}}^2),\\
A_{\mathrm{VH}}^{(2)}(4n+3;\overrightarrow{\boldsymbol{x}},\overrightarrow{\boldsymbol{y}};\zeta_6)&=3^{-n^2}\mathbf{Sp}_{4n+2}(\delta(n,n-1);\overrightarrow{\boldsymbol{x}}^2,\overrightarrow{\boldsymbol{y}}^2,1),\\
A_{\mathrm{QT}}^{(1)}(n;\overrightarrow{\boldsymbol{x}};\zeta_6)&=3^{-n^2+n}\prod_{i=1}^{2n}x_i^{-2n+2}\cdot\mathbf{GL}_{2n}(\delta(n-1,n-1);\overrightarrow{\boldsymbol{x}}^2)^2,\\
A_{\mathrm{QT}}^{(2)}(n;\overrightarrow{\boldsymbol{x}};\zeta_6)&=3^{-n^2+n}\prod_{i=1}^{2n}x_i^{-2n+1}\\
&\qquad\times\mathbf{GL}_{2n}(\delta(n-1,n-1);\overrightarrow{\boldsymbol{x}}^2)\mathbf{GL}_{2n}(\delta(n,n-1);\overrightarrow{\boldsymbol{x}}^2).
\end{aligned}
$$

ただし，$\overrightarrow{\boldsymbol{x}}^2=(x_1^2,x_2^2,\cdots)$ である．

この定理と定理 2.3 をあわせると，§1 で述べた交代符号行列の個数に関する定理 1.2 が得られる．

証明. アイデアはどの場合も同じなので，$A(n;\overrightarrow{\boldsymbol{x}},\overrightarrow{\boldsymbol{y}};\zeta_6)$ と $A_{\mathrm{VHS}}^{(2)}(4n+3;\overrightarrow{\boldsymbol{x}},\overrightarrow{\boldsymbol{y}};\zeta_6)$ の場合に説明する．

まず，$A(n;\overrightarrow{\boldsymbol{x}},\overrightarrow{\boldsymbol{y}};\zeta_6)$ の場合，$\det M(n;\overrightarrow{\boldsymbol{x}},\overrightarrow{\boldsymbol{y}};\zeta_6)$ の計算は，

$$
\det\left(\frac{1}{x_i^4+x_i^2y_j^2+y_j^4}\right)_{1\le i,j\le n}=\det\left(\frac{y_j^2-x_i^2}{y_j^6-x_i^6}\right)_{1\le i,j\le n}\tag{8}
$$

に帰着される．定理 3.1 の (2) において $p=q=0$ とし，

$$
x_i\to x_i^6,\quad a_i\to x_i^2,\quad y_i\to y_i^6,\quad b_i\to y_i^2\quad(1\le i\le n)
$$

と置き換えることによって，行列式 (8) は一般化された Vandermonde 行列式 $\det V^{n,n}$ を用いて表される．

次に，$A_{\mathrm{VHS}}^{(2)}(4n+3;\overrightarrow{\boldsymbol{x}},\overrightarrow{\boldsymbol{y}},\zeta_6)$ の場合は，

$$
\det\left(\frac{x_i^4y_j^2+y_j^2+x_i^2y_j^4+x_i^2+2x_i^2y_j^2}{(x_i^4+y_j^4+x_i^2y_j^2)(x_i^4y_j^4+1+x_i^2y_j^2)}\right)_{1\le i,j\le n}\tag{9}
$$

を求める必要があるが，このままでは Cauchy 型行列式の分解公式を利用できない．しかし，(9) の行列式の (i,j) 成分の分子が

$$
x_i^4y_j^2+x_i^2y_j^4+2x_i^2y_j^2+x_i^2+y_j^2=x_i^2y_j^2\cdot\mathbf{Sp}_6((1,0,0);x_i^2,y_j^2,1)
$$

と斜交群の既約指標で表される（$\det W^3$ を用いて表される）ことに注意して，変数 z を導入し，(9) の代わりに，

$$\det\left(\frac{x_i^4y_j^2z^2+x_i^2y_j^4z^2+x_i^2y_j^2z^4+x_i^2y_j^2+x_i^2z^2+y_j^2z^2}{(x_i^4+y_j^4+x_i^2y_j^2)(x_i^4y_j^4+1+x_i^2y_j^2)}\right)_{1\le i,j\le n} \tag{10}$$

を考えると，定理 3.1 が利用できる．(4) において $p=1$ とし，

$$x_i\to x_i^6,\quad y_i\to y_i^6,\quad z\to z^6,\quad a_i\to -x_i^4,\quad b_i\to -y_i^4,\quad c\to -z^4\quad (1\le i,j\le n)$$

と置き換えることによって，行列式 (10) は $\det W^{2n+1}$ を用いて表され，後は $z=1$ を代入することで求める結論が得られる．

4　その他の応用

Cauchy 型行列式，Pfaffian の分解公式（定理 3.1）と，Cauchy–Binet の公式，石川–若山の小行列式の和公式 [IW] を用いると，次のようないくつかの結果が導かれる．

4.1　長方形の Young 図形をもつ分割に対応する古典群の表現

長方形の Young 図形に対応する分割を最高ウエイトとする古典群の既約表現のテンソル積や部分群への制限の既約分解を具体的に決定することができる．詳しくは，[O2] を参照されたい．

非負整数 a, b に対して，$a\times b$ の長方形の Young 図形に対応する分割を $\square(a,b)$ と表す：

$$\square(a,b)=(b^a)=(\underbrace{b,\cdots,b}_{a}).$$

このとき，例えば次のような既約分解を証明できる．

定理 4.1. s, t を $s\le t$ となる非負整数とする．このとき，

$$\mathbf{Sp}_{2n}(\square(n,s);\overrightarrow{\boldsymbol{x}})\cdot\mathbf{Sp}_{2n}(\square(n,t);\overrightarrow{\boldsymbol{x}})=\sum\mathbf{Sp}_{2n}(\lambda_1+t-s,\cdots,\lambda_n+t-s;\overrightarrow{\boldsymbol{x}}).$$

ここで，和は $\square(n,2s)$ に含まれる Young 図形（分割）λ で，行の長さがすべて偶数であるもの全体にわたる．

4.2　Littlewood–Richardson 係数の間の関係式

Schur 関数の積 $s_\mu s_\nu$ を Schur 関数で展開したときの s_λ を，$\mathrm{LR}^\lambda_{\mu,\nu}$ と表し，Littlewood–Richardson 係数と呼ぶ．

$$s_\mu s_\nu=\sum_\lambda \mathrm{LR}^\lambda_{\mu,\nu}\,s_\lambda.$$

つまり，$\mathrm{LR}^\lambda_{\mu,\nu}$ は一般線型群の既約表現のテンソル積 $\mathbf{GL}_n(\mu)\otimes\mathbf{GL}_n(\nu)$ における $\mathbf{GL}_n(\lambda)$ の重複度である．ν が長方形の場合の Littldwood–Richardson 係数 $\mathrm{LR}^\lambda_{\mu,\square(n,f)}$ に対して次の関係式を証明することができる．詳しくは，[O4] を参照されたい．

定理 4.2. n を正整数，e, f を非負整数とし，λ, μ を $\lambda \subset \square(2n, e+f)$, $\mu \subset \square(n, e)$ となる分割とする．このとき，

(a) λ が条件

$$\lambda_n \geq f, \quad \lambda_{n+1} \leq \min(e, f).$$

をみたさないならば，$\mathrm{LR}^{\lambda}_{\mu,\square(n,f)} = 0$ である．

(b) λ が上の条件をみたすとき，分割 α, β を

$$\alpha_i = \lambda_i - f, \quad \beta_i = e - \lambda_{2n+1-i} \quad (1 \leq i \leq n),$$

とおいて定めると，

$$\mathrm{LR}^{\lambda}_{\mu,\square(n,f)} = \mathrm{LR}^{\beta}_{\alpha,\mu^\dagger(n,e)}.$$

ただし，$\mu^\dagger = \mu^\dagger(n, e)$ は

$$\mu^\dagger_i = e - \mu_{n+1-i} \quad (1 \leq i \leq n)$$

によって定義される分割である．特に，$\alpha \subset \beta$ でなければ $\mathrm{LR}^{\lambda}_{\mu,\square(n,f)} = 0$ となる．

4.3 Stanley 予想の解決

石川 [I] は，Cauchy 型 Pfaffian の分解公式 (3) を少し変形したものを利用して，R. Stanley が FPSAC03 の open problem session で提示した予想を解決した．

定理 4.3. （石川 [I]）分割 λ に対して，

$$\omega(\lambda) = a^{\sum_{i\geq 1}\lceil \lambda_{2i-1}/2 \rceil} b^{\sum_{i\geq 1}\lfloor \lambda_{2i-1}/2 \rfloor} c^{\sum_{i\geq 1}\lceil \lambda_{2i}/2 \rceil} d^{\sum_{i\geq 1}\lfloor \lambda_{2i}/2 \rfloor}$$

（ここで，$\lceil x \rceil$, $\lfloor x \rfloor$ はそれぞれ x 以上の最小の整数，x 以下の最大の整数を表す）とおく．このとき，

$$\log\left(\sum_{\lambda} \omega(\lambda) s_\lambda\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} a^n (b^n - c^n) p_{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n} a^n b^n c^n d^n p_{2n}^2 \in \mathbb{Q}[[p_1, p_3, p_5, \cdots]].$$

ここで，最初の和は分割全体をわたり，p_k は巾和対称関数を表す．

5 交代符号行列の周辺

最後に，交代符号行列が現れるいくつかの場面を紹介する．

5.1 λ-行列式

Rumsey–Robbins [RR] は，Desnanot–Jacobi の公式 (6) に着目して，行列式の変形である λ-行列式 $\det_\lambda M$ を次のように帰納的に定義した．

(i) $n = 1, 2$ のときは,

$$\det_\lambda \begin{pmatrix} m_{11} \end{pmatrix} = m_{11}, \quad \det_\lambda \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = m_{11}m_{22} + \lambda m_{12}m_{21}.$$

(ii) $n \geq 3$ のときは,

$$\det_\lambda M = \frac{\det_\lambda M_n^n \cdot \det_\lambda M_1^1 + \lambda \cdot \det_\lambda M_1^n \cdot \det_\lambda M_n^1}{\det_\lambda M_{1,n}^{1,n}}.$$

λ-行列式の定義からは，$\det_\lambda M$ は λ と M の成分に関する有理式であることしかわからないが，実は交代符号行列を用いて展開が与えられる Laurent 多項式となる．

定理 5.1. （Robbins–Rumsey [RR]）n 次正方行列 M に対して,

$$\det_\lambda M = \sum_{A \in \mathcal{A}_n} \lambda^{i(A)} \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^{n(A)} M^A. \tag{11}$$

ここで, $i(A) = \sum_{p<r,\, q>s} a_{p,q}a_{r,s}$, $n(A) = \#\{(i,j) : a_{ij} = -1\}$ であり, $M^A = \prod_{i,j=1}^n m_{ij}^{a_{ij}}$ である．

$\lambda = -1$ とすると，Jacobi–Desnanot の公式 (6) から，$\det_{-1} M = \det M$ となる．このとき，(11) は行列式の通常の定義となる．

5.2 Weyl の分母公式の変形

行列 $M = \left(x_i^{n-j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ の λ-行列式を考えると，Vandermonde の行列式（A 型のルート系に対する Weyl の分母公式）の λ 変形が得られる．

命題 5.2.

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} \left(1 + \lambda x_i x_j^{-1}\right) = \sum_{A \in \mathcal{A}_n} \lambda^{i(A)} \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^{n(A)} x^{\delta(A_{n-1}) - A\delta(A_{n-1})}.$$

ここで，$\delta(A_{n-1}) = {}^t\!\big((n-1)/2, (n-3)/2, \cdots, -(n-1)/2\big)$ である．

B 型，C 型のルート系に対する Weyl の分母公式の λ 変形は，half-turn symmetric な交代符号行列を用いて，次のように与えられる．

定理 5.3. （岡田 [O1]）

$$\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^n (1 - \lambda x_i) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (1 - \lambda^2 x_i x_j)(1 - \lambda^2 x_i x_j^{-1}) \\
&\quad = \sum_{A \in \mathcal{A}_{2n}^{\mathrm{HTS}}} (-1)^{i_1^+(A) + i_2(A)/2} \lambda^{i(A)} \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)^{n(A)/2} x^{\delta(B_n) - A\delta(B_n)},
\end{aligned}$$

$$\prod_{i=1}^{n}(1-\lambda x_i)(1+\lambda^2 x_i)\prod_{1\le i<j\le n}(1-\lambda^2 x_i x_j)(1-\lambda^2 x_i x_j^{-1})$$
$$=\sum_{A\in\mathcal{A}_{2n+1}^{\mathrm{HTS}}}(-1)^{i_1^+(A)+i_2(A)/2}\lambda^{i(A)}\prod_{k=1}^{n(A)}\left(1+\frac{(-1)^k}{\lambda}\right)x^{\delta(C_n)-A\delta(C_n)}.$$

ここで，$\delta(B_n)={}^t(n-1/2,n-3/2,\cdots,-n+1/2)$, $\delta(C_n)={}^t(n,n-1,\cdots,1,0,-1,\cdots,-n)$ である．($i_1^+(A)$, $i_2(A)$ の定義はここでは省略する．)

Hamel–King [HK] は，U–turn boundary をもつ交代符号行列（vertically symmetric な交代符号行列の一般化）を用いて，C 型の Weyl の分母公式の別の変形を与えている．

5.3 Bruhat 順序の MacNeille completion

対称群 $\mathcal{S}_n$（一般に Weyl 群）上の Bruhat 順序は，旗多様体上の Schubert 多様体の包含関係を記述している半順序であり，Kazhdan–Lusztig 多項式などさまざまな場面で基本的な役割を果たしている．対称群 $\mathcal{S}_n$ 上の Bruhat 順序 $\le$ は，組合せ論的には次のように定義される．まず，$[n]=\{1,2,\cdots,n\}$ の 2 つの部分集合 $I=\{s_1<s_2<\cdots<s_k\}$, $J=\{t_1<t_2<\cdots<t_k\}$ に対して，

$$I\le J \Longleftrightarrow s_1\le t_1,\ s_2\le t_2,\ \cdots,\ s_k\le t_k$$

と定義し，この半順序を用いて，置換 $\sigma,\tau\in\mathcal{S}_n$ に対して，

$$\sigma\le\tau \Longleftrightarrow \{i:\sigma(i)\le k\}\le\{i:\tau(i)\le k\}\quad(k=1,2,\cdots,n)$$

と定義する．Bruhat 順序は束（lattice）ではないことに注意する．

一方，交代符号行列全体のなす集合 $\mathcal{A}_n$ には，monotone triangle を用いて，半順序が定義される．整数を三角形状に並べた配列

$$T=\begin{array}{ccccccccc} & & & & t_{1,1} & & & & \\ & & & t_{2,1} & & t_{2,2} & & & \\ & & \iddots & & & & \ddots & & \\ & \iddots & & & & & & \ddots & \\ t_{n,1} & & t_{n,2} & & \cdots & & t_{n,n-1} & & t_{n,n}\end{array}$$

は条件

$$t_{i+1,j}\le t_{i,j}\le t_{i+1,j+1},\quad t_{i,j}<t_{i,j+1}$$

をみたすとき，n 次 **monotone triangle** であるという．n 次の monotone triangle 全体のなす集合を $\mathcal{M}_n$ と表す．$\mathcal{M}_n$ 上には自然な半順序が

$$S=(s_{ij})\le T=(t_{ij}) \Longleftrightarrow s_{i,j}\le t_{i,j}\quad(1\le j\le i\le n)$$

によって定まる．この半順序に関して $\mathcal{M}_n$ は分配束となっている．

交代符号行列と monotone triangle の間には，次のようにして全単射が構成される．$A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}\in\mathcal{A}_n$ に対して，

$$\overline{a}_{ij}=\sum_{k=1}^{i}a_{kj}\quad(1\le i,j\le n)$$

とおくと，$\overline{a}_{i,j}=0$ または 1 であり，$\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{ij}=i$ である．行列 $\overline{A}=(\overline{a}_{ij})$ を用いて，n 次 monotone triangle $T=T(A)=(t_{ij})_{1\le j\le i\le n}$ を

$$\{t_{i,1}<\cdots<t_{i,i}\}=\{j:\overline{a}_{ij}=1\}\quad(1\le i\le n)$$

となるように定める．例えば，

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&1&-1&0&1\\1&-1&0&1&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}\longmapsto\overline{A}=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&1&0&0&1\\1&0&0&1&1\\1&1&0&1&1\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}\longmapsto T=\begin{array}{ccccccccc}&&&&3&&&&\\&&&2&&5&&&\\&&1&&4&&5&&\\&1&&2&&4&&5&\\1&&2&&3&&4&&5\end{array}$$

となる．

命題 5.4. 上の対応 $A\mapsto T(A)$ は $\mathcal{A}_n$ と $\mathcal{M}_n$ の間の全単射を与える．さらに，置換 σ, τ に対応する置換行列をそれぞれ P_σ, P_τ とするとき，$\sigma\le\tau$ ならば，$T(P_\sigma)\le T(P_\tau)$ となる．

定理 5.5. （Lascoux–Schützenberger [LS]）$\mathcal{M}_n$ は，$\mathcal{S}_n$ の **MacNeille completion** である．（つまり，$\mathcal{M}_n$ は，$\mathcal{S}_n$ を部分半順序集合として含む「最小の」束である．）

参考文献

[B] D. M. Bressoud, Proofs and Confirmations : The Story of the Alternating Sign Matrix Conjecture, Cambridge Univ. Press, 1999.

[C] A. L. Cauchy, Mémoire sur les fonctions alternée et les sommes alterneée, Exercisex Anal. et Phys. Math. **2** (1841), 151–159 ; Oeuvres, ser.2, vol.12, pp.173–182.

[HK] A. Hamel and R. C. King, Symplectic shifted tableaux and deformations of Weyl's demonimator formula for $sp(2n)$, J. Algebraic Combin. **16** (2002), 269–300.

[I] M. Ishikawa, Minor summation formula and a proof of Stanley's open problem, `arXiv:math.CO/0408204`.

[IOTZ] M. Ishikawa, S. Okada, H. Tagawa, and J. Zeng, Generalizations of Cauchy's determinant and Schur's Pfaffian, to appear.

[IW] M. Ishikawa and M. Wakayama, Minor summation formulas of Pfaffians, Linear and Multilinear Algebra **39** (1995), 285–305.

[Iz] A. Izergin, Partition function of the six-vertex model in a finite volume, Soviet Phys. Dokl. **32** (1987), 878–879 (English translation).

[K1] G. Kuperberg, Another proof of the alternating-sign matrix conjecture, Internat. Math. Res. Notices (1996), 139–150.

[K2] G. Kuperberg, Symmetry classes of alternating-sign matrices under one roof, Ann. Math. **156**, 835–866.

[LS] A. Lascoux and M.-P. Schützenberger, Treillis et bases des groupes de Coxeter, Electron. J. Combin. **3** no.2 (1996), # R27.

[M] I. G. Macdonald, Symmetric Functions and Hall Polynomials (2nd ed.), Oxford Univ. Press, 1995.

[MRR] W. H. Mills, D. P. Robbins and H. Rumsey, Jr., Alternating sign matrices and descending plane partitions, J. Combin. Theory Ser. A **34** (1983), 340–359.

[O1] S. Okada, Alternating sign matrices and some deformations of Weyl's denominator formula J. Algebraic Combin. **2** (1993), 155–176.

[O2] S. Okada, Applications of minor summation formulas to rectangular-shaped representations of classical groups, J. Algebra **205** (1998), 337–367.

[O3] S. Okada, Enumeration of alternating sign matrices and characters of classical groups, `arXiv:math.CO/0308234`.

[O4] S. Okada, Cauchy 型の行列式，Pfaffian とその応用，「組合せ論的表現論の諸相」数理解析研究所講究録 **1382** (2004), 198–215.

[R] D. P. Robbins, Symmetry classes of alternating sign matrices, `arXiv:math.CO/0008045`.

[RR] D. P. Robbins and H. Rumsey, Jr., Determinants and alternating sign matrices, Adv. Math. **62** (1986), 169–184.

[S] I. Schur, Über die Darstellung der symmetrischen und der alternirenden Gruppe durch gebrochene lineare Substitutuionen, J. Reine Angew. Math. **139** (1911), 155–250.

[Z] D. Zeilberger, Proof ot the alternating-sign matrix conjecture, Electron. J. Combin. **3** (2) (1996), #R13.