有限一般線型群の ROUQUIER のブロックと FOCK 空間の柏原大域的基底

宮地兵衛

1. Lascoux-Leclerc-Thibon 予想の有木進による解決以降の考え方

私は, ある２つの異なる分野のつながりとその境界を見つめることに, 学生のころから心を奪われてきました。ここで言う２つとは、大雑把には有限一般線型群 (および古典群) の表現論と量子群の Fock 表現のことを指している.

片方は Brauer から始まる有限群の正標数の体上の表現を扱うモジュラー表現論と q-元体上の有限一般線型群 $GL_n(\mathbb{F}_q)$ に特化した表現論 (J.A. Green(既約指標の構成) や Deligne-Lusztig(既約指標の幾何学的構成)) の複合理論 (Deligne-Lusztig 理論, Asai-Shoji 理論のモジュラー表現論への応用) として Fong-Srinivasan により８０年代前半産声を上げた表現論である. その後 Dipper-James の岩堀-Hecke 環を中核とする岩堀-Hecke 環の表現論, q-Schur 環の表現論, 非等標数 $\ell > 0$(本報告集では ℓ は q を割らないことを非等標数と呼ぶ) での有限一般線型群 $GL_n(\mathbb{F}_q)$ の表現論３つを正確に行き来できるモジュラー表現論と発展していく.

もう片方の Fock 表現は、数理物理 (可解格子模型 etc) と関係する Drinfeld・神保の量子群のとある (可積分) 表現の話で主に林, 神保, 柏原, Misra, 三輪, Stern (alphabet 順) により発展してきた. Lascoux, Leclerc と Thibon により 1989 年の G.D. James の $GL_n(\mathbb{F}_q)$ $(1 \le n \le 10)$ のべき単既約表現を標数 ℓ の体へ係数を落として考えた表現の組成因子を explicit に表にしたものと先の Fock 空間なるある可積分表現の柏原/Lusztig の大域的基底/canonical base の PBW-型 base(standard base) への展開がよく似ていると言いはじめ、どう似ているのか [LLT96] にこの上なく正確に予想を書き下した (**LLT**-予想).

この **LLT**-予想は Kazhdan, Lusztig, Ginzburg の幾何学的表現論を駆使して有木進氏によりまずはじめに解かれた.

有木氏の LLT 予想解決により我々は、図式的にはつぎのような**思想**を持つようになった。[1]

$\bigoplus_n(\overline{\mathbb{F}_\ell}GL_n(\mathbb{F}_q)$-加群)		$U_v(\widehat{\mathfrak{gl}_e})$ の Fock 空間
ℓ : **十分大**		level 1
block ideal	$\leftrightarrow$	weight 空間
Tilting 加群	$\leftrightarrow$	Lower 大域的基底 (canonical bases)
Specht 加群	$\leftrightarrow$	Standard 基底
既約加群	$\leftrightarrow$	Upper 大域的基底 (dual canonical bases)

２つの世界は、まったく関係ないと長い間思われていた. 関係ないと思われていた感じを出すために、言葉使いの違いを見てみる: 左の世界では e-core というものがあるが、右の世界では extremal weight と普通呼んでいる. 左の世界では β-number とか Lusztig のシンボルと普通呼んでいるものは、右の世界 (とくに日本) では Maya 図形と呼んでいるらしい. 左の世界では、Kleshchev の ℓ-good graph という言葉は、右の世界では柏原の crystal graph という言葉で表される. このように、様々な先達により２つの世界で独立に定義され発見されてきた概念や用語が、**LLT**-予想で突然つながりだすのである. こういうことを普通**意外性**というのであろう.

Date: 2004.

[1] 有木氏の論文には、こういった風には書いてない、私の講演内容に合うように勝手に書き換えさせていただいた.

さてここまでに、専門的な言葉を度外視しても2つの世界がどうやらつながるらしいという感じは持って頂けたと思う．では、各々の世界での問題を見てみる．先ほどの図式中『$\leftrightarrow$』印は ℓ の条件がついての話である．つぎのような問題が、残されているのである．

係数体の標数 ℓ がどのくらい大きければいいのかまるで証明できていない.

大域的基底の standard 基底による表示はどうなるか? [perverse: constant]

このような問題に対して今回の話は、“**多く**” の部分で「LLT-Ariki の ℓ に関する” 漸近的” な話の精密化」と「表現論的な精密化」ができることを報告する．

話の outline を題名ごとにだいたい書くと次のようになる:

話の outline

(1) 話の outline
(2) $GL_n(\mathbb{F}_q)$ の加群
(3) LLT と $U_v(\widehat{\mathfrak{gl}}_e)$ の Fock 表現
(4) 分割に関する組み合わせ,Rouquier core
(5) Rouquier block における Loewy series (Hida-Miyachi).
(6) Rouquier weight 空間における大域的基底 (Leclerc-Miyachi).
(7) 関連する結果 I :行と列はずし定理
(Chuang-Miyachi-Tan)
(8) 関連する結果 II :v-Kleshchev 分解定数
(Chuang-Miyachi-Tan)
(9) 関連する結果 III:v-Peel 分解定数
(Chuang-Miyachi-Tan)

ここまでに問題意識, 動機, 興味等について大雑把に説明してきた． まず、§ 2 においてもう少し $GL_n(\mathbb{F}_q)$ の表現論で何が分かっているかおさらいする．§ 3 において 2 つ目の世界である LLT の枠組みを簡単に述べ、remark としてどんなことがこの報告集の内容よりも前に知られていたかを記す．基本的にここにある remark の結果は、我々の数学としての証明には使われない．つまり部分的な別証明を与えることもありえる．§ 4 では、Young 図形に関する記号等を説明する．取り分け Rouquier の core を持つ分割 (Young 図形) たちは次の節で結果に非常にかかわってくる．§ 5,6 はさきに述べた「” **多く**” の部分で」を Rouquier の core をもつ部分でに置き換えて 2 つの精密化ができることがわかる．§ 5 は $GL_n(\mathbb{F}_q)$ 側の話であり、§ 6 は LLT や Fock 空間側の話である．§ 7,8,9 はここまでに述べていなかった「” **多く**” の部分で」に対応する結果を述べていく．§ 8 は、Ariki, Varanolo-Vasserot の結果が必要になる．その意味でこの部分は、§ 5,6 とは様相が異なる． (つまり純代数的証明ではなくなる．もっと言えば canonical base であることや parabolic Kazhdan-Lusztig 多項式の正値性とかが必要になってくる．)

2. $GL_n(\mathbb{F}_q)$ の Specht 加群

q を素数ベキとし,ℓ を素数 $\ell \nmid q$ となる素数とする．$\mathbb{F}_q$ で q-元体をあらわす．$\Bbbk$ を標数 $\ell > 0$ の体, K を標数 0 の体とする．$G := GL_n(\mathbb{F}_q)$ とおく．G に対して $\Bbbk, K$ は十分大きいと仮定する．

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ O & & * \end{pmatrix} \in G \right\} \text{上三角行列}$$

$R \in \{K, \Bbbk\}$ とする．自明な $R[B]$-加群 R_B の誘導表現を考える:

$$M_R := \mathrm{Ind}_{R[B]}^{R[G]}(R_B)$$

M_K は semisimple になっている．James により characteristic-free な M_R の標準的な部分加群 $S_R(\lambda)$ が次のように構成されている．

Theorem 1 (James). [Jam84] $\lambda \vdash n$ (n の分割).

(1) *$S_K(\lambda)$ is a simple KG-submodule of M_K.*
(2) *$S_\Bbbk(\lambda)$ is an indecomposable $\Bbbk G$-submodule of $M_\Bbbk$.*
(3) *$S_\Bbbk(\lambda)$ is an ℓ-modular reduction of $S_K(\lambda)$.*
(4) *$S_\Bbbk(\lambda)$ has a unique maximal submodule $S_\Bbbk(\lambda)^{\max}$.*
(5) *$D(\lambda) := S_\Bbbk(\lambda)/S_\Bbbk(\lambda)^{\max}$ is simple.*
(6) *Each composition factor in $S_\Bbbk(\lambda)$ is isomorphic to $D(\mu)$ for some μ.*

上の定理の 6 から次の分解定数が定義できる:

$$d_{\lambda,\mu}^{\ell,e} := [S_\Bbbk(\lambda) : D(\mu)].$$

ここで、e は $q \cdot \mathbb{F}_\ell$ の乗法的位数である．また左辺に q をどこにもつけてない理由は (本来なら $d_{\lambda,\mu}^{\ell,q}$ と書くべきところだが)[DJ89] の q-Schur 代数の導入により標数 ℓ を止めたときには q には依存しないで e だけで決まることが分かるからである．表現論の基本的な問題として次がある．

Open problem: Compute $\dim_\Bbbk(D(\lambda))$ for any λ.

$\dim_\Bbbk(S_\Bbbk(\lambda))$ の公式は、Steinberg により知られているので $d_{\lambda,\mu}^{\ell,e}$ たちがわかればよろしい．

ついでに、Open problem よりは易しめな **James 予想**についても簡単に雰囲気だけ荒っぽい評価で述べておく:

Conjecture 2 (G.D. James'89). 2 つの素数 $\ell, \ell' > |\lambda|$ について次が成り立つのではないか？

$$d_{\lambda,\mu}^{\ell,e} = d_{\lambda,\mu}^{\ell',e}.$$

つまり、ある程度大きい標数 ℓ では $d_{\lambda,\mu}^{\ell,e}$ は標数 ℓ も関係なくて e だけで決まるのではないか？ということである．

Remark 3. この報告を 1 度最後まで読んで 2 回目にここまで読んで頂いた方のためにより正確に *James* 予想を書くと*: $\ell >$ ($\tilde{e}$-weight of λ)* ならば

$$d_{\lambda,\mu}^{\ell,e} = d_{\lambda,\mu}(1)?$$

ここで $\tilde{e} = \min\{i \in \mathbb{N} \mid 1 + q + q^2 + \cdots + q^{i-1} \equiv 0 \ \textit{in}\ \mathbb{F}_\ell\}$.

3. LLT

[LT96] にしたがって LLT の設定を書いていく．$\mathcal{P} := \{\text{partitions}\}$, v を不定元 とおく．$\{|\lambda\rangle\}_{\lambda \in \mathcal{P}}$ を形式的な基底とする $\mathbb{Q}(v)$ 係数の無限次元ベクトル空間 $\mathcal{F}_v := \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}} \mathbb{Q}(v)|\lambda\rangle$ を考える．Fock 空間と呼ばれる．T. Hayashi[Hay90] により $\mathcal{F}_v$ に $U_v(\widehat{\mathfrak{sl}}_e)$ の Chevalley 生成元 E_i, F_i, etc の作用が定義され, Misra-Miwa[MM90] によりこれに Heisenberg 代数の作用 $\{V_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ を足して $U_v(\widehat{\mathfrak{gl}}_e)$ の作用が定義される: Let λ and μ be two Young diagrams such that μ is obtained from λ by adding an i-node γ. Such a node is called a removable i-node of μ, or an indent i-node of λ. Let $I_i^r(\lambda, \mu)$

(resp. $R_i^r(\lambda,\mu)$) be the number of indent i-nodes of λ (resp. of removable i-nodes of λ) situated to the right of γ. Here γ is not included. Set $N_i^r(\lambda,\mu) := I_i^r(\lambda,\mu) - R_i^r(\lambda,\mu)$. Then,

$$F_i|\lambda\,\rangle = \sum_{\mu} v^{N_i^r(\lambda,\mu)}|\mu\,\rangle$$

where the sum runs over all partitions μ such that μ/λ is an i-node.

For $k \in \mathbb{N}_0$, let V_k be the linear operator action on $\mathcal{F}_v$ by

$$V_k|\lambda\,\rangle = \sum_{\mu}(-v)^{\mathrm{spin}(\mu/\lambda)}|\mu\,\rangle$$

where the sum runs over all μ such that μ/λ is a horizontal e-ribbon strip of weight k.

Λ_0 をよく使う標準的な記号での fundamental weight とすると $\mathcal{F}_v$ は Λ_0 を最高 weight とする既約表現 $M(\Lambda_0)$ に同型となる.

$$U_v(\widehat{\mathfrak{gl}}_e) \curvearrowright \mathcal{F}_v,\ \mathcal{F}_v = U_v(\widehat{\mathfrak{gl}}_e)|\emptyset\rangle \cong M(\Lambda_0).$$

次で特徴付けられる $\exists$ bar involution $- : \mathcal{F}_v \to \mathcal{F}_v$ が存在する:

$$\overline{|\emptyset\rangle} = |\emptyset\rangle.$$

$$\overline{\varphi(v)x + \psi(v)y} = \varphi(v^{-1})\overline{x} + \psi(v^{-1})\overline{y}$$
$$x, y \in \mathcal{F}_v, \varphi, \psi \in \mathbb{Q}(v).$$

$$\overline{F_i x} = F_i\overline{x}$$
$$0 \le i \le e-1, x \in \mathcal{F}_v.$$

$$\overline{V_k x} = V_k\overline{x}$$
$$k \ge 1, x \in \mathcal{F}_v.$$

柏原大域的基底

さて、上の bar involution を使っていよいよ大域的基底を登場させる.

Theorem 4 (Leclerc-Thibon). [LT96], *There are unique basis* $\{G(\lambda)\}_{\lambda\in\mathcal{P}}$ *and basis* $\{G^-(\lambda)\}_{\lambda\in\mathcal{P}}$ *of* $\mathcal{F}_v$ *such that*

$$\overline{G(\lambda)} = G(\lambda),\ G(\lambda) \equiv |\lambda\rangle \bmod vL,$$
$$\overline{G^-(\lambda)} = G^-(\lambda),\ G^-(\lambda) \equiv |\lambda\rangle \bmod v^{-1}L^-.$$

ここで、L は、$\{|\lambda\rangle\}$ を基底とする自由 $\mathbb{Z}[v]$-加群で、L^- は、$\{|\lambda\rangle\}$ を基底とする自由 $\mathbb{Z}[v^{-1}]$-加群である。

分割 λ, μ に対して多項式 $d_{\lambda,\mu}(v), e_{\lambda,\mu}(v)$ を次のように定義する:

$$G(\mu) = \sum_{\lambda} d_{\lambda,\mu}(v)|\lambda\rangle,\ G^-(\lambda) = \sum_{\mu} e_{\lambda,\mu}(-v^{-1})|\mu\rangle.$$

$d_{\lambda,\mu}(v)$ は LLT の分解定数とか, 結晶化された[2]分解定数とよばれる. だいたいどんな感じになるか非常に小さいランクで見てみる. $e=2$ で分割のサイズが 10 で 2-core が (10) のそれと同じになるもの $\{d_{\lambda,\mu}(v)\}$ を集めて表にすると § 9.1 のようになる.

[2]たぶん、これは A. Mathas による. 標数 $\ell > 0$ から標数 0 へ移行すると万物固まって簡単!?になることからとっているのだろうか?だが標数 ℓ が 0 でなく、小さいと実際の分解定数はこの上なく難しい. 実際 LLT のアルゴリズムでは、分からない. 僕の感じでは, $\ell \to \infty$ が標数 0 に対応しているように思う. まあ標準的な教科書 [Mat99] で結晶化された分解定数と呼んでいるので、それにならうことにする.

Remark:

(1) Ariki [Ari96] により標数ゼロの原始 e-乗根に特殊化した A 型岩堀-Hecke 環の Specht 加群 S^λ 中にいくつ既約組成因子 D^μ(μ:e-regular) が入るかを記述した $[S^\lambda : D^\mu]$ に関して

$$[S^\lambda : D^\mu] = d_{\lambda,\mu}(1)$$

が成り立つ. (Ariki の LLT-予想 1 の解決 [LLT96, Conjecture 6.9])

(2) これの標数ゼロでの ζ-Schur 版を Varagnolo-Vasserot[VV99] が構成した. 副産物として $d_{\lambda,\mu}(v), e_{\lambda,\mu}(v)$ は parabolic Kazhdan-Lusztig polynomial of affine type [3] となることが知られている.

(3) Kashiwara-Tanisaki[KT02] の parabolic Kazhdan-Lusztig polynomial の幾何的解釈により

$$d_{\lambda,\mu}(v), e_{\lambda,\mu}(v) \in \mathbb{N}_0[v]$$

が成立する. (Kashiwara-Tanisaki,Varagnolo-Vasserot による LLT 予想 2 の解決 [LLT96, Conjecture 6.9],[LT96].) [4]

(4) $d_{\lambda,\mu}(v), e_{\lambda,\mu}(v)$ は Lusztig の指標公式, Soergel の tilting module に関する指標公式として Lusztig 予想に現れるものと同じ. (*i.e.* 関連する分野では非常に重要な多項式.) (放物的)Kazhdan-Lusztig 多項式を求める研究分野は、国際的にもそれ自体が一つの独立研究領域としての確固たる地位をすでに得てる. 研究者人口が非常に多く、アプローチも千差万別である. それから、Kostka-Foulks 多項式 $K_{\lambda,\mu}(v)$ などは Kazhdan-Lusztig 多項式であることを知られていて、今回の報告集の記号では $e_{\alpha,\beta}(v)$ たちの部分としてすべて現れる.

4. Combinatorics

ここでは、Rouquier の e-core を定義するのにも必要な β-数, e-ソロバン等の組み合わせ論的な言葉を用意する. 組み合わせ論的な言葉を理解ために、普通例を頭に置いて手を動かして行うものと私は思っている. なので、正確な定義は度外視して例を上げて一般の形を推測していただくこととする. (こういった作業を行うのに別段博学である必要はなく、幼稚園, 小中学校等の IQ クイズとたいして変わりはない.)

(1) **(分割と β-数の対応)** $\lambda \vdash m$ に対して β_λ で λ の β-数 (Maya 図形) をあらわす. 分割から β-数 (Maya 図形) への書き直しの具体的な説明をすると次のようになる:
  (a) $\lambda = (3,1,1) \vdash 5$ をとる.
  (b) λ は、**3つ**の非ゼロの成分で書いてある。
  (c) $\beta_\lambda := \lambda + (3-1, 3-2, 3-3)$ を考える. ((b) の**3つ**と対応して $3-1$,$3-2$,$3-3$ が出てくることに注意.)

$$\begin{array}{rccc} & 3 & 1 & 1 \\ +) & 2 & 1 & 0 \\ \hline & 5 & 2 & 1 \end{array}$$

  $\beta_\lambda = (5,2,1)$ を得た.

(2) 次に e-ソロバン (abacus) を考える.
  $e \in \mathbb{N}$ を一つ固定.

---

[3] 部分的ではあるが放物的 Kazhdan-Lusztig 多項式になることを示した人たちは他にも Goodman-Wenzl や (Andersen-Janzten-Soergel と LLT の枠組みを見据えた)Steen Ryom-Hansen がいる. Ryom-Hansen の結果は、publish されていないようだ. 激戦区状況が伝わってくる. それから, Varagnolo-Vasserot の結果を使わなくても Leclerc の Erdmann の定理の v-類似 [Lec00] を使うと Ariki の定理からリカヴァーできることも知られている.

[4] ここも別のバイパスがある. 正値性に関して O. Shiffmann による cyclic quiver を使った別証明がある.

$e=2$ として例で説明: 位が e 個あり左から 0 の位,1 の位,$\cdots$ とある次のような下方に無限に続くソロバンを考える:

0	1
2	3
4	5
6	7
8	9
$\vdots$	$\vdots$

$\bigcirc$ が数珠をあらわすとして $\lambda=(3,1,1),\beta_\lambda=(5,2,1)$ の e-ソロバン表示は次のようになる:

0	$\bigcirc$
$\bigcirc$	3
4	$\bigcirc$

β_λ の格成分の場所に $\bigcirc$ を置いたのである. これを $(3,1,1)$ の 2-ソロバン表示とよぶ.

次に [ひとつの数珠の上に空きがあったらつめる] という操作を行う.

操作 1 回目:

0	$\bigcirc$
$\bigcirc$	$\bigcirc$
4	5

操作 2 回目:

$\bigcirc$	$\bigcirc$
2	$\bigcirc$
4	5

もうこれ以上つめられない. λ に対して操作の回数を e-weight と呼びどん詰まりの状態を e-core と呼ぶ.

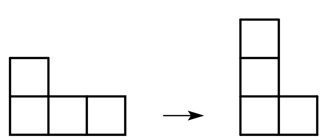
(3) $\underline{\lambda}=(\lambda^{(0)},\lambda^{(1)},\ldots,\lambda^{(e-1)})$ で λ の e-quotient を表すとする.
$\lambda^{(i)}$ は $(\lambda^{(i)})_j$ を i の位にある下から j 番目の数珠を上に可能な限り押しあげた回数と定義される分割.
$e=3,\lambda=(9,6,5,4,2,2)$ なら 6 個の数珠を使って $\beta_\lambda=(14,10,8,6,3,2)$ となり

0	1	$\bigcirc_3$
$\bigcirc_2$	4	5
$\bigcirc_1$	7	$\bigcirc_2$
9	$\bigcirc_1$	11
12	13	$\bigcirc_1$

ここで $\bigcirc_i$ は下から数えて i 番目の数珠という意味. ここで得られた e-quotient は

$$\underline{\lambda}=((1,1),(3),(2,1)).$$

(4) λ' で dual な分割を表す.



λ $\qquad$ λ'

(5) $c^{\gamma}_{\alpha,\beta}$ で Littlewood-Richardson 係数を表す ($|\alpha|+|\beta|=|\gamma|$ 以外はゼロとする). (*i.e.* 表現論的には, χ_λ で λ に対応する既約 $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_{|\lambda|}]$-指標をあらわすと

$$c^{\gamma}_{\alpha,\beta} = \langle \mathrm{Ind}^{\mathfrak{S}_{|\gamma|}}_{\mathfrak{S}_{|\alpha|}\times\mathfrak{S}_{|\beta|}}(\chi_\alpha \otimes \chi_\beta), \chi_\gamma \rangle$$

ここで $\mathfrak{S}_m$ は m 次対称群,$\langle -,- \rangle$ は指標の標準的な内積.)

(6) **Rouquier's e-core**.
[Rou98] $w \in \mathbb{N}$ を一つ固定. e-core c が **Rouquier** とは,

$$\sharp(i \text{ の位の数珠}) - \sharp(i-1 \text{ の位の数珠}) \geq w-1 \tag{1}$$

となるときをいう.

$$\begin{array}{ccccc}
| & \circ & \circ & \cdots & \circ \\
| & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
| & \circ & \circ & \cdots & \circ \\
| & | & \circ & \cdots & \circ \\
| & | & \vdots & \vdots & \vdots \\
| & | & \circ & \cdots & \circ \\
| & | & | & \circ & \circ \\
| & | & | & \vdots & \vdots \\
| & | & | & \circ & \circ
\end{array}$$

ここでは、$r(w)$ を式 (1) において等号が成り立つもとのして定義する.

5. Rouquier block における Specht 型加群の Loewy 列

e を $q \cdot 1_{\mathbb{F}_\ell}$ の乗法的位数とする.

$B_{w,\tau}$ で e-weight w & e-core τ に対応する $\Bbbk[GL_m(\mathbb{F}_q)]$ のべき単 block ideal とする. $m = ew + |\tau|$,$|\tau| = (e\text{-core の"size"})$. 詳しくは [FS82] を参照. (つまり $\exists \lambda$ *s.t.*

(1) (λ の e-core) $= \tau$.
(2) (λ の e-weight) $= w$.
(3) $S(\lambda) \cdot B_{w,\tau} \neq 0$.
(4) $B_{w,\tau}$ は $\Bbbk[GL_m(\mathbb{F}_q)]$ の直既約両側加群.

有限群 G に対して $B_0(G)$ で $\Bbbk G$ の自明な加群 $\Bbbk_G$ を零化しない block ideal を表す. 次がこの節の結果において一番 key となる定理である.

Theorem 5 (Hida-Miyachi). [Miy01] *$w \in \mathbb{N}$ を固定. $\ell > w$ ならば $B_{w,r(w)}$ について次が成り立つ:*

(1) *森田同値 $\mathbf{F}_w$: mod-$B_{w,r(w)} \to$ mod-$B_0(GL_e(\mathbb{F}_q) \wr \mathfrak{S}_w)$ が存在する.*
(2) *$\mathbf{F}_w$ による Specht 型加群の像は、$GL_e(\mathbb{F}_q) \wr \mathfrak{S}_w$ の standard な直既約加群に同型になる.*

Remark 6. [Tur02] において定理の 1 の主張が独立に行われている. 2 の主張がないと以降の系の結果を保証できない.

Theorem 5 と Ariki[Ari96] もしくは Varagnolo-Vasserot[VV99] の結果を使うと込み入った計算いらずですぐに次がわかる.(証明法が２通りある.)

Corollary 7. [Miy01] *James 予想は、Rouquier の block については正しい.*

Specht 型 $\Bbbk GL_n(\mathbb{F}_q)$-加群 $S_\Bbbk(\lambda)$ に対して、次の多項式を定義する:

$$\mathrm{rad}_{\lambda,\mu}(v) := \sum_{i \geq 0} [\mathrm{Rad}^i(S_\Bbbk(\lambda))/\mathrm{Rad}^{i+1}(S_\Bbbk(\lambda)) : D(\mu)] v^i \in \mathbb{N}_0[v].$$

とおく. 今度は、Theorem 5 できちんと圏同値での対応が分かったことと wreath product の一般論,Clifford 理論から正確に分解定数を計算して次のことが得られる:

Corollary 8. [Miy01] $\ell > w$ とし, λ は、*Rouquier e-core* を持ち *e-weight* w を持つとする.

$$\mathrm{rad}_{\lambda,\mu}(v) = v^{\delta(\underline{\lambda},\underline{\mu})} \sum_{\substack{\alpha^0,\cdots,\alpha^e,\\ \beta^0,\cdots,\beta^{e-1}}} \prod_{0\le j\le e-1} c^{\mu^{(j)}}_{\alpha^j,\beta^j} c^{\lambda^{(j)}}_{\beta^j,(\alpha^{i+1})'}$$

ここで、和は次を満たす分割 $\alpha^0,\cdots,\alpha^e$, $\beta^0,\cdots,\beta^{e-1}$ 全体を走る:

$$|\alpha^i| = \sum_{0\le j\le i-1} |\lambda^{(j)}| - |\mu^{(j)}|,$$

$$|\beta^i| = |\mu^{(i)}| + \sum_{0\le j\le i-1} |\mu^{(j)}| - |\lambda^{(j)}|.$$

$$\delta(\underline{\lambda},\underline{\mu}) := \sum_{0\le j\le e-2} (e-1-j)(|\lambda^{(j)}| - |\mu^{(j)}|).$$

Fock 空間版

Theorem 5, Corollary 8 に触発されて次の結果 [LM02] を得た:

Theorem 9 (**Leclerc-Miyachi**)**.** $\ell > w$, λ は *Rouquier e-core* を持つならば

$$\mathrm{rad}_{\lambda,\mu}(v) = d_{\lambda,\mu}(v).$$

Remark:

(1) $e_{\lambda,\mu}(v)$ に関する公式もある. [JM96] では $e=2$ の場合で e-regular の場合だけが扱われている. これの完全な拡張になっている.
(2) 証明方針は、右辺が計算可能になり直に Corollary と比べると同じ表示になっている.
(3) Ariki もしくは VV の別証明を Rouquier block では与えている.
(4) $e=2$ と仮定して
$\mathcal{P}(w) := \{\lambda\in\mathcal{P} \mid (\text{2-weight of } \lambda) = w\}, \mathcal{R}(w) := \{\lambda\in\mathcal{P} \mid \lambda \text{の } e\text{-core は } w \text{ に関して Rouquier}\}$
とおく. 当然のことながら $\sharp\mathcal{P}(w) = \infty$ となっている. ここで言いたいことは (我々の定理の有効範囲を強調することで)、$\sharp(\mathcal{P}(w) - \mathcal{R}(w)) < \infty$ にある.
(5) [CT02] に上の公式が, e-regular 分割に対して独立に得られている.
(6) 純代数的に Theorem 9 と Corollary 8 をつかい次を得る:

Corollary 10. *James* 予想は、*Rouquier* の *block* については正しい.

6. 行と列はずし定理

さて、ここでは小さい rank での分解定数が分かったときに、大きな rank の分解定数が復元できる場合があることをみる. **Row&Column Removal Theorem** はその一つである. つまり、先の Rouquier block の結果とこれから記す **Row&Column Removal Theorem** を使えば、復元できる部分がまた増えるわけだ. [Jam89] からそれを書き下す:

Theorem 11 **(James,Donkin).** *Let* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ *and* $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots)$ *be partitions.*

(1) (*Row removal*) *Suppose that*
$\lambda_1 + \ldots + \lambda_r = \mu_1 + \ldots + \mu_r$ *for some* r *and let*

$$\lambda^{(0)} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r),$$
$$\mu^{(0)} = (\mu_1, \ldots, \mu_r),$$
$$\lambda^{(1)} = (\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \ldots),$$
$$\mu^{(1)} = (\mu_{r+1}, \mu_{r+2}, \ldots).$$

Then $d^{\ell,e}_{\lambda\mu} = d^{\ell,e}_{\lambda^{(0)}\mu^{(0)}} d^{\ell,e}_{\lambda^{(1)}\mu^{(1)}}$.

(2) (*Column removal*) *Suppose that*
$\lambda'_1 + \ldots + \lambda'_r = \mu'_1 + \ldots + \mu'_r$ *for some* r *and let*

$$\lambda^{(0)\prime} = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_r),$$
$$\mu^{(0)\prime} = (\mu'_1, \ldots, \mu'_r),$$
$$\lambda^{(1)'} = (\lambda'_{r+1}, \lambda'_{r+2}, \ldots),$$
$$\mu^{(1)\prime} = (\mu'_{r+1}, \mu'_{r+2}, \ldots).$$

Then $d^{\ell,e}_{\lambda\mu} = d^{\ell,e}_{\lambda^{(0)}\mu^{(0)}} d^{\ell,e}_{\lambda^{(1)}\mu^{(1)}}$.

この行と列はずし定理が、v-類似を Fock 空間でもつことが分かる. [CMT02] の主定理は次の二つ

Theorem 12 **(Chuang-Miyachi-Tan).** *Let* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ *and* $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots)$ *be partitions.*

(1) (*Row removal*) *Suppose that*
$\lambda_1 + \ldots + \lambda_r = \mu_1 + \ldots + \mu_r$ *for some* r *and let*

$$\lambda^{(0)} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r),$$
$$\mu^{(0)} = (\mu_1, \ldots, \mu_r),$$
$$\lambda^{(1)} = (\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \ldots),$$
$$\mu^{(1)} = (\mu_{r+1}, \mu_{r+2}, \ldots).$$

Then $d_{\lambda\mu}(v) = d_{\lambda^{(0)}\mu^{(0)}}(v) d_{\lambda^{(1)}\mu^{(1)}}(v)$.

(2) (*Column removal*) *Suppose that*
$\lambda'_1 + \ldots + \lambda'_r = \mu'_1 + \ldots + \mu'_r$ *for some* r *and let*

$$\lambda^{(0)\prime} = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_r),$$
$$\mu^{(0)\prime} = (\mu'_1, \ldots, \mu'_r),$$
$$\lambda^{(1)'} = (\lambda'_{r+1}, \lambda'_{r+2}, \ldots),$$
$$\mu^{(1)\prime} = (\mu'_{r+1}, \mu'_{r+2}, \ldots).$$

Then $d_{\lambda\mu}(v) = d_{\lambda^{(0)}\mu^{(0)}}(v) d_{\lambda^{(1)}\mu^{(1)}}(v)$.

Example $e = 2$**:**

$$d_{(\mathbf{5},\mathbf{5}),(\mathbf{6},\mathbf{4})}(v) = v,$$
$$d_{(4,4),(3,2,2,1)}(v) = v^3 + v,$$
$$d_{(\mathbf{5},\mathbf{5},4,4),(\mathbf{6},\mathbf{4},3,2,2,1)}(v) = v^4 + v^2$$

Fock 空間とのつながり具合うまくいっていることが分かった.

7. Kleshchev の分岐係数と分解定数

ここでも Kleshchev の結果 GL_n 等の表現論側と Fock 空間とのつながり具合を見ていく. 少し記号を用意する:

(1) $\lambda(j) := (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_j - 1, \lambda_{j+1}, \ldots)$.
(2) $0 < i < j \leq \mathrm{Length}(\lambda)$ に対して, $\lambda(i,j) := (\lambda_1, \ldots, \lambda_i + 1, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_j - 1, \lambda_{j+1}, \ldots)$.

[Kle97] の結果2つを述べる:

Theorem 13 (**Kleshchev[分岐係数について]**). *$q \equiv 1 \mod \ell$ と仮定する. $\lambda, \lambda(j)$ はともに ℓ-regular とする. (i.e. おなじ成分 ℓ 回以上は並ばない.) $[{}^*R^{GL_n}_{GL_{n-1}}(D(\lambda)) : D(\lambda(j))]$ は、explicit に計算できる.*

Remark 14. ここで、${}^*R^{GL_n}_{GL_{n-1}}$ は *Harish-Chandra* 制限関手. タイトルにあわせてこういう書き方にしてある. また、$GL_n(\mathbb{F}_q)$ の表現論を知らないと *Kleshchev* の結果からどういうことが $GL_n(\mathbb{F}_q)$ の表現論についていえるか分かりにくいので、この形で載せることも有用かとも思う. 対称群の表現論では、$[\mathrm{Res}^{\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_{n-1}}(D^\lambda) : D^{\lambda(j)}]$ が *explicit* に組み合わせ論的言葉で計算できるということ.

Theorem 15 (**Kleshchev[分解定数について]**). *$q \equiv 1 \mod \ell$ と仮定する. $\lambda(i,j)$ は ℓ-regular とする. $d^{\ell,1}_{\lambda,\lambda(i,j)}$ は、explicit に計算できる.*

Remark 16. *Kleshchev* は彼の分岐則 *branching rule I,II,III,IV* を使って**いくらでも大きな正数値をとる分解定数**があることを証明した. (彼はこれでモジュラー表現論業界ではかなり有名になったに違いない. 実際 *70* 年代くらいには、対称群の分解定数は 0 か 1 しかないと思われていたくらいだからである.) これは彼自身による一番拡張された定理だ. [Kle97] は *60* 頁くらいの長い論文.

さて今度は、Fock 空間版を見ていく.

Theorem 17 (**Chuang-Miyachi-Tan[v-分岐係数について]**). *$E_r(G^-(\lambda))$ の $G^-(\lambda(j))$ の係数は explicit に計算できる. (Kleshchev の定理にある分岐係数を m とすると v-整数 $[m]_v$).*

Theorem 18 (**Chuang-Miyachi-Tan[v-分解定数について]**). *$d_{\lambda,\lambda(i,j)}(v)$ は、explicit に計算できる. とくに, アファイン量子群は of type $A^{(1)}_{\ell-1}$ として $q \equiv 1 \mod \ell, \lambda(i,j) : \ell$-regular とすると*

$$d_{\lambda,\lambda(i,j)}(1) = d^{\ell,1}_{\lambda,\lambda(i,j)}$$

Remark 19. どんな公式か正確に書かれていないが、この部分は京都大学数理解析研究所での「表現論における組合せ論的手法とその応用」*(2004* 年 *10* 月 *19-22* 日*)* の集会の報告集にゆだねることにする. 我々の定理は、[VV99] を使うと標数 0 での ζ-*Schur* 代数もしくは、莫大に大きい標数 $\ell > 0$ の q-*Schur* 代数で意味をもち, e-*regular* とか ℓ-*regular* とか関係なく分解定数を記述している. (現段階では、ℓ の下限は分からない.) 対して *Kleshchev* の結果には ℓ-正則性がついているところが異なる点の１つ. また、我々の結果から *Kleshchev* の結果が出るわけでもなく、*Kleshchev* の結果から我々の結果が出るわけでもない. また、我々の結果の証明は **Row&Column Removal** を頻繁に使い *Young* 図形のサイズを小さくしておいて **canonical base** であることを使って v-分岐係数, v-分解定数を双方とも同時に数学的帰納法にかけて証明していく.

Corollary 20. *部分的 James 予想 (Lusztig 予想) は、組 $(\lambda, \lambda(i,j))$ に関して正しい.*

Remark 現在、$e = 1$ の仮定, regular 性を取り外すこと Kleshchev の定理の完全拡張に取り組んでいる. こういうことを言う理由は、次の不等式にある:

$$d_{\lambda,\mu}(1) \leq d^{\ell,e}_{\lambda,\mu}$$

おそらく、この組 $(\lambda, \lambda(i,j))$ の場合には標数 ℓ や群の Lie rank にも関係なく,
quantum characteristic $\tilde{e} =$

$$\min\{i \in \mathbb{N} \mid 1 + q + \cdots + q^{i-1} \equiv 0 \mod \ell\}$$

のみで決まってしまう "generic decomposition number" になっていると思われる. つまり、やりたいことを予想として書くと:

Conjecture 21. *$e \neq 1$ とする.*

$$d_{\lambda,\lambda(i,j)}(1) = d^{\ell,e}_{\lambda,\lambda(i,j)}$$

Remark 22. *前述の Corollary 18 から ℓ の条件がないことに注意. James 予想の下限の条件が要らないことを言っている.*

8. Peel の分解定数

この節は対称群のモジュラー表現論の 70 年代の定理と Fock 空間とのつながりを見ていく.

Theorem 23 (Peel,James). [Jam89] *$e > 2$, $\lambda = (j, 1^{n-j})$, μ:e-regular と仮定する. $d^{\ell}_{\lambda,\mu} \in \{0,1\}$. いつ 0 になるか 1 になるかもわかる.*

Theorem 24 (Chuang-Miyachi-Tan). [CMT04] *$\lambda = (j, 1^{n-j})$, μ:e-regular と仮定する. $d_{\lambda,\mu}(v) = v^m$ or 0. いつ 0 になるかもわかる. m もわかる.*

もっと正確に現在までに拡張している場合を書くと、$e = 2$ として結晶化された分解定数の行列 $(d_{\lambda,\mu}(v))_{\lambda,\mu}$ の部分行列として § 9.2 の表のようなピラミッド型パターンに気づいたことがある.

Remark: 論文 G.D. James,The decomposition matrices of $GL_n(q)$ for $n \leq 10$ に登場する定理の v-類似版は、この論文からすぐに従うこととあるひとつの定理を除いて Lascoux-Leclerc-Thibon と Chuang-Miyachi-Tan により構成されたことになる.

謝辞

最後に第４９回代数学シンポジウムの主催者の方々に講演の機会ならびに旅費を頂き感謝いたします.

9. Tables

ここでは、付録として分解行列を載せておく.

9.1. $e = 2$,**rank**$= 10$.

$e=2$, rank $=10$																																				
(10)	1
$(9,1)$	v	1
$(8,2)$	.	v	1
$(8,1^2)$	v	v^2	v	1
$(7,3)$	.	.	v	.	1
$(7,1^3)$	v^2	v	v^2	v	v	1
$(6,4)$	.	.	.	.	v	.	1
$(6,3,1)$	.	.	v	.	v^2	.	v	1
$(6,2^2)$	.	.	v^2	v	.	.	.	v	1
$(6,2,1^2)$	.	v^2	v^3+v	v^2	v^2	v	v	v^2	v	1
$(6,1^4)$	v^2	v^3	v^2	v	v^3	v^2	v^2	.	.	v	1
(5^2)	.	.	.	.	.	.	v	.	.	.	.	1
$(5,3,2)$	.	.	.	.	.	.	v	v^2	v	.	.	.	1
$(5,3,1^2)$	.	.	v^2	.	v	.	$2v^2$	v^3	v^2	v	.	v	v	1
$(5,2^2,1)$	.	.	v^3	v^2	v^2	v	v^3	v^4	v^3+v	v^2	.	.	v^2	v	1
$(5,1^5)$	v^3	v^2	v^3	v^2	v^2	v	v^3	.	.	v^2	v	v^2	.	v	.	1
$(4^2,2)$	.	.	.	.	.	.	v^2	.	.	.	.	v	v	.	.	.	1
$(4^2,1^2)$	.	.	.	.	v^2	.	v^3	.	.	.	.	v^2	v^2	v	.	.	v	1
$(4,3^2)$	.	.	.	.	.	.	.	.	v	.	.	.	v^2	.	.	.	v	.	1
$(4,3,1^3)$	.	.	v^2	.	v^3	.	v^2	v	v^2	v	.	v	v^3	v^2	.	.	v^2	v	v	1
$(4,2^3)$	.	.	.	.	v^3	v^2	v^2	.	v^2	v	.	v	v^3	v^2	v	.	v^2	v	v	.	1
$(4,2^2,1^2)$	.	.	v^3	v^2	v^4	v^3	$2v^3$	v^2	v^3+v	$2v^2$	v	$2v^2$	v^4	v^3	v^2	.	v^3	v^2	v^2	v	v	1
$(4,2,1^4)$	.	v^3	v^4+v^2	v^3	v^3	v^2	v^4	v^3	v^2	v^3+v	v^2	v^3	.	v^2	.	v	.	v	.	v^2	.	v	1
$(4,1^6)$	v^3	v^4	v^3	v^2	v^4	v^3	.	.	.	v^2	v	.	.	v^3	.	v^2	.	v^2	.	.	.	.	v	1
$(3^3,1)$	.	.	.	.	.	.	.	.	v^2	.	.	v	v^3	v^2	v	.	v^2	v	v	.	.	.	.	.	1
$(3^2,2^2)$	.	.	.	.	.	.	v^3	.	v^3	v^2	.	$2v^2$	v^4	v^3	v^2	.	v^3	v^2	v^2	.	v	.	.	.	v	1
$(3^2,2,1^2)$	.	.	.	.	.	.	v^4	v^3	v^4+v^2	v^3	.	$2v^3$	v^5	v^4	v^3	.	v^4	v^3+v	v^3+v	v^2	v^2	v	.	.	v^2	v	1
$(3^2,1^4)$	.	.	v^3	.	.	.	.	v^4	v^3	v^2	.	.	.	.	.	.	.	v^2	v^2	v^3	.	v^2	v	.	.	.	v	1
$(3,2^2,1^3)$	.	.	v^4	v^3	v^3	v^2	v^4	v^5	v^4+v^2	$2v^3$	v^2	v^3	.	v^2	v	v	.	v^3+v	v^3	v^4	v^2	v^3+v	v^2	.	.	v	v^2	v	1
$(3,1^7)$	v^4	v^3	v^4	v^3	.	v^2	.	.	.	v^3	v^2	.	.	.	.	v	.	.	.	.	.	.	v^2	v	.	.	.	v	.	1
(2^5)	.	.	.	.	.	.	v^4	.	.	v^3	v^2	v^3	.	.	.	.	.	.	.	.	v^2	v	.	.	.	v	.	.	.	.	1
$(2^4,1^2)$	.	.	.	.	v^4	v^3	v^5	.	.	v^4	v^3	v^4	.	v^3	v^2	v^2	.	v^2	.	.	v^3	v^2	.	.	.	v^2	.	.	v	.	v	1
$(2^3,1^4)$	.	.	v^4	v^3	v^5	v^4	.	.	v^2	v^3	v^2	.	.	v^4	v^3	v^3	.	v^3	.	.	.	v	v^2	v	.	.	.	v	v^2	.	.	v	1
$(2^2,1^6)$	.	v^4	v^5	v^4	.	v^3	.	.	v^3	v^4	v^3	.	.	.	.	v^2	.	.	.	.	.	v^2	v^3	v^2	.	.	.	v^2	.	v	.	.	v	1
$(2,1^8)$	v^4	v^5	.	v^3	.	v^4	.	.	.	.	v^2	.	.	.	.	v^3	.	.	.	.	.	.	.	v	.	.	.	.	.	v^2	.	.	.	v	1
(1^{10})	v^5	.	.	v^4	.	.	.	.	.	.	v^3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	v^2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	v	1

9.2.

(11)	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$(9,2)$	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$(9,1^2)$	v	v	1	.	.	.	.	.	.	.	.
$(8,2,1)$	.	v^2	v	.	.	.	.	.	.	.	.
$(7,2^2)$	.	.	v	.	.	.	.	.	.	.	.
$(7,2,1^2)$	.	v	v^2	1	.	.	.	.	.	.	.
$(7,1^4)$	v^2	v^2	v	v	1	.	.	.	.	.	.
$(6,2,1^3)$	.	v^3	v^2	v^2	v	.	.	.	.	.	.
$(5,2^3)$	.	.	.	v	.	.	.	.	.	.	.
$(5,2^2,1^2)$	.	.	v^2	v^2	v	.	.	.	.	.	.
$(5,2,1^4)$	.	v^2	v^3	v	v^2	1	.	.	.	.	.
$(5,1^6)$	v^3	v^3	v^2	v^2	v	v	1	.	.	.	.
$(4,2^3,1)$	.	.	.	v^3	v^2	.	.	.	.	.	.
$(4,2,1^5)$	.	v^4	v^3	v^3	v^2	v^2	v	.	.	.	.
$(3,2^4)$	.	.	.	.	v^2	.	.	.	.	.	.
$(3,2^3,1^2)$	.	.	.	v^2	v^3	v	.	.	.	.	.
$(3,2^2,1^4)$	.	.	v^3	v^3	v^2	v^2	v	.	.	.	.
$(3,2,1^6)$	.	v^3	v^4	v^2	v^3	v	v^2	1	.	.	.
$(3,1^8)$	v^4	v^4	v^3	v^3	v^2	v^2	v	v	1	.	.
$(2^4,1^3)$	.	.	.	v^4	v^3	v^3	v^2	.	.	.	.
$(2^2,1^7)$	.	v^5	v^4	v^4	v^3	v^3	v^2	v^2	v	1	.
(1^{11})	v^5	.	v^4	.	v^3	.	v^2	.	v	.	1

(12)	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$(11,1)$	v	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$(10,2)$	.	v	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$(10,1^2)$	v	v^2	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$(9,1^3)$	v^2	v	v	1	.	.	.	.	.	.	.	.
$(8,2^2)$	.	.	v	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$(8,2,1^2)$	.	v^2	v^2	v	.	.	.	.	.	.	.	.
$(8,1^4)$	v^2	v^3	v	v^2	1	.	.	.	.	.	.	.
$(7,2^2,1)$	.	.	v^2	v	.	.	.	.	.	.	.	.
$(7,1^5)$	v^3	v^2	v^2	v	v	1	.	.	.	.	.	.
$(6,2^2,1^2)$	.	.	v^2	v^3	v	.	.	.	.	.	.	.
$(6,2,1^4)$	.	v^3	v^3	v^2	v^2	v	.	.	.	.	.	.
$(6,1^6)$	v^3	v^4	v^2	v^3	v	v^2	1	.	.	.	.	.
$(5,2^2,1^3)$	.	.	v^3	v^2	v^2	v	.	.	.	.	.	.
$(5,1^7)$	v^4	v^3	v^3	v^2	v^2	v	v	1	.	.	.	.
$(4,2^4)$	.	.	.	.	v^2	.	.	.	.	.	.	.
$(4,2^3,1^2)$	.	.	.	v^3	v^3	v^2	.	.	.	.	.	.
$(4,2^2,1^4)$	.	.	v^3	v^4	v^2	v^3	v	.	.	.	.	.
$(4,2,1^6)$	.	v^4	v^4	v^3	v^3	v^2	v^2	v	.	.	.	.
$(4,1^8)$	v^4	v^5	v^3	v^4	v^2	v^3	v	v^2	1	.	.	.
$(3,2^4,1)$	.	.	.	.	v^3	v^2	.	.	.	.	.	.
$(3,2^2,1^5)$	.	.	v^4	v^3	v^3	v^2	v^2	v	.	.	.	.
$(3,1^9)$	v^5	v^4	v^4	v^3	v^3	v^2	v^2	v	v	1	.	.
$(2^5,1^2)$	.	.	.	.	v^3	v^4	v^2	.	.	.	.	.
$(2^4,1^4)$	.	.	.	v^4	v^4	v^3	v^3	v^2	.	.	.	.
$(2^3,1^6)$	.	.	v^4	v^5	v^3	v^4	v^2	v^3	v	.	.	.
$(2^2,1^8)$	.	v^5	v^5	v^4	v^4	v^3	v^3	v^2	v^2	v	.	.
$(2,1^{10})$	v^5	v^6	v^4	v^5	v^3	v^4	v^2	v^3	v	v^2	1	.
(1^{12})	v^6	.	v^5	.	v^4	.	v^3	.	v^2	.	v	1

References

[Ari96] S. Ariki, *On the decomposition numbers of the Hecke algebra of $G(m,1,n)$*, J. Math. Kyoto Univ. **36** (1996), 789–808.

[CK02] J. Chuang and R. Kessar, *Symmetric groups, wreath products, Morita equivalences, and Broué's abelian defect group conjecture*, Bull. London Math. Soc. **34** (2002), 174–184.

[CMT02] Joseph Chuang, Hyohe Miyachi, and Kai Meng Tan, *Row and column removal in the q-deformed Fock space*, J. Algebra **254** (2002), 84–91.

[CMT04] Joseph Chuang, Hyohe Miyachi, and Kai Meng Tan, *A v-analogue of Peel's theorem*, J. Algebra **280** (2004), 219–231.

[CT02] J. Chuang and K.M. Tan, *Some canonical basis vectors in the basic $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$-modules*, J. Algebra **248** (2002), no. 2, 765–779.

[DJ89] R. Dipper and G. D. James, *The q-Schur algebra*, Proc. London Math. Soc. **59** (1989), no. 3, 23–50.

[FS82] P. Fong and B. Srinivasan, *The blocks of finite general linear and unitary groups*, Invent. Math. **69** (1982), 109–153.

[Hay90] T. Hayashi, *q-analogues of Clifford and Weyl algebras – spinor and oscillator representations of quantum enveloping algebras*, Comm. Math. Phys. **127** (1990), 129–144.

[Jam84] G. D. James, *Representations of general linear groups*, London Mathematical Society Lecture Notes 94 (Cambrige Universitiy Press), 1984.

[Jam89] G. D. James, *The decomposition matrices of $GL_n(q)$ for $n \leq 10$*, Proc. London Math. Soc. **10** (1989), no. 100, 225–265.

[JK81] G. D. James and A. Kerber, *The representation theory of the symmetric group*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 16 (Cambrige University Press), 1981.

[JM83] M. Jimbo and T. Miwa, *Solitons and infinite dimensional Lie algebras*, Publ. R. I. M. S. Kyoto Univ. **19** (1983), 943–1001.

[JM96] G. D. James and A. Mathas, *Hecke algebras of type* **A** *with $q = -1$*, J. Algebra **184** (1996), 102–158.

[Kac90] V. G. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, 3rd ed., Cambridge University Press, 1990.

[Kas90] M. Kashiwara, *Crystalizing the q-analogue of universal enveloping algebras*, Commun. Math. Phys. **133** (1990), 249–260.

[Kas91] M. Kashiwara, *On crystal bases of the q-analogue of universal enveloping algebras*, Duke Math. J. **63** (1991), 465–516.

[Kas93] M. Kashiwara, *Global crystal bases of quantum groups*, Duke Math. J. **69** (1993), 455–485.

[Kle97] A. Kleshchev, *On the decomposition numbers and branching coefficients for symmetric and special linear groups*, Proc. Math. Soc. **75** (1997), no. 3, 497–558.

[KMM95] M. Kashiwara, K.C. Misra, and T. Miwa, *Decomposition of q-deformed Fock spaces*, Selecta Math. **1** (1995), 787–805.

[KT02] M. Kashiwara and T. Tanisaki, *Parabolic Kazhdan-Lusztig polynomials and Schubert varieties*, J. Algebra **249** (2002), 306–325.

[Lec00] Bernard Leclerc, *Decomposition numbers and canonical bases*, Algebras and Representation Theory **3** (2000), 277–287.

[Lec01] Bernard Leclerc, *Symmetric functions and Fock space representation of $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$, Lectures at the Newton Institute*, Combridge (2001), 1–20.

[LLT96] Alain Lascoux, Bernard Leclerc, and Jean-Yves Thibon, *Hecke algebras at roots of unity and crystal bases of quantum affine algebras*, Commun. Math. Physics **181** (1996), 205–263.

[LM02] B. Leclerc and H. Miyachi, *Some closed formulas for canonical bases of Fock space*, Represent. Theory (electronic) **6** (2002), 290–312.

[LT96] Bernard Leclerc and Jean-Yves Thibon, *Canonical bases of q-deformed Fock space*, Int. Math. Res. Notices (1996), 447–498.

[LT00] Bernard Leclerc and Jean-Yves Thibon, *Littlewood-Richardson coefficients and Kazhdan-Lusztig polynomials*, Combinatorial methods in representation theory (M. Kashiwara et al., eds.), vol. 28, Adv. Stud. Pure Math, 2000, pp. 155–220.

[Lus90] G. Lusztig, *Canonical bases arising from quantized enveloping algebras*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 447–498.

[Mac95] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, 2nd ed., Oxford, 1995.

[Mat99] A. Mathas, *Iwahori-Hecke algebras and Schur algebras of the symmetric groups*, University Lecture Series, vol. 15, AMS, 1999.

[Miy01] H. Miyachi, *Unipotent blocks of finite general linear groups in non-defining characteristic*, Ph.D. thesis, Chiba univ., Feb. 2001.

[MM90] K.C. Misra and T. Miwa, *Crystal base of the basic representation of* $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$, Commun. Math. Phys. **134** (1990), 79–88.
[Rou98] Raphaël Rouquier, *Représentations et catégories dérivées*, Rapport d'habilitation (1998).
[Tur02] W. Turner, *Equivalent blocks of finite general linear groups in non-describing characteristic*, J. Algebra **247** (2002), no. 1, 244–267.
[VV99] Michela Varagnolo and Eric Vasserot, *On the decomposition matrices of the quantized Schur algebra*, Duke Math. J. **100** (1999), no. 2, 269–297.
[有木 Text] 有木進, $A^{(1)}_{r-1}$ **型量子群の表現論と組合せ論**, no. 43 上智大学数学講究録, 上智大学数学教室, 10 2000.
[宮地報告集] 宮地兵衛, **有限一般線型群の** *specht* **型加群の** *radical* **列と結晶化された分解定数について**, in 第４回代数群と量子群の表現論研究集会報告集, 庄司俊明, ed., 上智大学軽井沢セミナーハウス, 2001.

愛知県名古屋市千種区不老町名古屋大学大学院多元数理科学研究科
E-mail address: `miyachi@math.nagoya-u.ac.jp`