分数の小数展開に関連した素数の集合の密度について

北岡良之*

1 Introduction

これはほぼ [HKKN] の証明を省いたものである。分数の小数展開がまだ未知の面白い問題を提供しうる一例を紹介したい。出発は次の例である。

$$1/7 = 0.\dot{1}4285\dot{7} = 0.142857142857\cdots$$

であり

$$\begin{aligned} 142 + 857 &= 999 \\ 14 + 28 + 57 &= 99 \\ 1+4+2+8+5+7 &= 27 = 9 \times 3. \end{aligned}$$

はすぐわかる。これは次のように一般化される。

Theorem 1 *Let p $(\neq 2, 5)$ be a prime number. $1/p$ has a purely periodic decimal expansion*

$$\frac{1}{p} = 0.\dot{c}_1 \cdots \dot{c}_e = 0.c_1 \cdots c_e c_1 \cdots c_e \cdots, \quad (0 \leqq c_i \leqq 9)$$

where we assume that e is the minimal length of periods, i.e. $e =$ the order of $10 \bmod p$. Suppose $e = nk$ for natural numbers n $(> 1), k$. We divide the period to n parts of equal length k , and add them. By setting

$$c_1 \cdots c_k + c_{k+1} \cdots c_{2k} + \cdots + c_{(n-1)k+1} \cdots c_{nk} = (10^k - 1)\mathfrak{s}(p) = 9 \cdots 9 \times \mathfrak{s}(p),$$

$\mathfrak{s}(p)$ is a natural number, and $\mathfrak{s}(p) = n/2$ if n is even, and $1 \leqq \mathfrak{s}(p) \leqq n-2$ if n is odd.

*Department of Mathematics, Meijo University, Tenpaku, Nagoya, 468-8502, Japan.

n が偶数のときや $n=3$ のときは $\mathfrak{s}(p)$ は一意的に決まるが n が 5 以上の奇数のときそれはどのように分布するのであろうか。ここで述べる多くの予想のきっかけとなる疑問である。以後 $n\ (\geqq 5)$ は奇数であり、$1 \leqq s \leqq n-2$ と仮定する。例によって

$$P(n,s,x) = \frac{\#\{p \mid p \leqq x, n|e, \mathfrak{s}(p)=s\}}{\#\{p \mid p \leqq x, n|e\}},$$

を調べる。ここで $p\ (\neq 2,5)$ は素数を表し、e は $10 \bmod p$ の位数である。計算機を使って $P(n,s,10^9)$ の表を作った。

s	$n=5$	$n=9$	$n=11$
1	0.1666	0	0.0000
2	0.6667	0	0.0014
3	0.1667	0.2499	0.0403
4		0.5001	0.2432
5		0.2500	0.4301
6		0	0.2433
7		0	0.0403
8			0.0014
9			0.0000

(最後にもっと多くのデータがある。)

x について $P(n,s,x)$ のグラフを書いてみると最初は乱れるもののほとんど直線となってしまう。従って、まづ

Conjecture 1 $P(n,s) = \lim_{x\to\infty} P(n,s,x)$ *exists.*

を立てる。そうして表を眺めてみると $P(n,s,x)$ は $(n-1)/2$ で対称のように見える。大胆にどんどん気の付いたことを挙げていこう。

Conjecture 2

$$P(n,s) = P(n, n-1-s) \text{ for } 1 \leqq s \leqq n-2.$$

表の中で 0.0000 は $n=11$ で $s=1,9$ を取る素数が少なかったことを意味し、$n=9$ で 0 は素数が現れなかったことを意味している。これは x を大きくしても現れない。それを説明するのが次の定理である。

Theorem 2 *In Theorem 1, we assume* $n = n_1 n_2$ *and* $n_1 \geqq 3$. *Then* $n_2 \leqq \mathfrak{s}(p) \leqq n - n_2 - 1$ *holds.*

Conjecture 3 $P(n,s) > 0$ *holds if* n *is an odd prime number.*

さて密度の表を見ているとグラフは釣鐘状になっていることがわかる。そのような典型的な例である正規分布との違いを見てみよう。そのために度数分布表関連の基本的なことを思い出しておこう。以下のような度数分布表に対して

value	x_1	x_2	$\cdots$	x_m	sum
relative frequency	r_1	r_2	$\cdots$	r_m	1

平均 μ と標準偏差 σ が次のように定義される。

$$\mu = \sum_{i=1}^{m} x_i r_i,\ \sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_i^2 r_i - \mu^2}.$$

前の表から計算してみると

n	μ	σ
5	2.0001	0.5774
9	4.0002	0.7070
11	5.0002	0.9132

となり、次の予想に至る。

Conjecture 4

$$\lim_{x\to\infty} \mu = \frac{n-1}{2}, \quad \lim_{x\to\infty} \sigma^2 = \begin{cases} (n-1)/12 & \mathit{if}\ 3 \nmid n, \\ (n-3)/12 & \mathit{if}\ 3 \mid n. \end{cases}$$

標準偏差 σ については上の表からは見難いが最後にあげる表とよくあっている。(講演のときより改良された予想となっている。)

われわれの密度が正規分布に近いことを見るために、平均 μ、標準偏差 σ の正規分布の密度関数

$$f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

と表の数値を比較してみよう。

n	$\max_{1\le s\le n-2} \lvert P(n,s,10^9) - f_{\mu,\sigma}(s)\rvert$
5	0.0243
9	0.0641
11	0.0067

この表からの予想として

Conjecture 5

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leq s\leq n-2} |P(n,s) - f_{\mu,\sigma}(s)| = 0.$$

2 Generalization

我々は 10-進小数展開を考えた。もっと別の展開、例えば ℓ 進展開を考えて同様のことを行うとどうなるのであろうか。このようなことに気づけば容易に次の定理に至る。

Theorem 3 *Let a $(\neq 0, \pm 1)$ be an integer and p a prime number relatively prime to a. Put $e =$ the order of $a \bmod p$ and suppose $e = nk$ $(n > 1)$. Define an integer r_i by*

$$r_i \equiv a^{ki} \bmod p, \quad 0 \leqq r_i < p.$$

Then $\mathfrak{s}(p) = \sum_{i=0}^{n-1} r_i/p$ is an integer such that $\mathfrak{s}(p) = n/2$ if n is even, and $1 \leqq \mathfrak{s}(p) \leqq n-2$ if n is odd.

この定理で $a = 10$ とすると Theorem 1 の表現を変えただけのものとなっている。前節と同様に

$$P_a(n,s,x) = \frac{\#\{p \mid p \leqq x, n|e, \mathfrak{s}(p) = s\}}{\#\{p \mid p \leqq x, n|e\}} \ .$$

と置き計算してみると

Conjecture 6

$$\lim_{x\to\infty} P_a(n,s,x) = \lim_{x\to\infty} P_{10}(n,s,x) \ (= P(n,s))$$

が得られるが、どうして a に依らないのか想像がつかない。

ここで更に a が p の原始根とすると：$e = p-1$ であり、$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ の位数 n の部分群 $G_{n,p}$ は a^{ki} ($k = (p-1)/n$, $i = 0, 1, \cdots, n-1$) から成り立っている。そこで

$$\mathfrak{s}(p) = \sum_{g \in G_{n,p}} \{g/p\},$$

と置く。但し $\{g/p\} = g/p - [g/p]$ は g/p の小数部分である。

同様に

$$P_{gr}(n,s,x) = \frac{\#\{p \mid p \leqq x, n|p-1, \mathfrak{s}(p) = s\}}{\#\{p \mid p \leqq x, n|p-1\}} \ ,$$

と置くと

Conjecture 7

$$\lim_{x\to\infty} P_{gr}(n,s,x) = P(n,s).$$

が得られる。

3 Stochastic consideration

我々の分布が正規分布に近いと予想したが、確率論や統計の教科書を見ていると分布の無限系列が正規分布に近づくという類の事実を時々見かける (中心極限定理)。確率論が直截に適用できるわけではないが直感的な説明をしてみよう。基礎となるのは次の予想である。

Conjecture 8 *For an odd natural number* $n\,(>2)$ *and a prime number* p *satisfying* $p \equiv 1 \bmod n$*, we set*

$$S(p) = \big\{\{g/p\} \mid g \in G_{n,p}, g \neq 1\big\}$$

Then $\cup_{p<x} S(p)$ *distribute uniformly on* $(0,1]$ *when* x *tends to the infinity.*

これも実験では問題ない。横道にそれるが、少なくともこれは次のように拡張される。

Conjecture 9 *Let* $F = \mathbb{Q}(\alpha)\,(\neq \mathbb{Q})$ *be an algebraic number field with an algebraic integer* α*, and let* k *be a non-negative integer. For a prime number* p *which decomposes fully in* F *and a prime ideal* $\mathfrak{p}$ *lying above* p*, we write in* $F_{\mathfrak{p}} = \mathbb{Q}_p$

$$\alpha = c_{\mathfrak{p}}(0) + c_{\mathfrak{p}}(1)p + \cdots \quad (c_{\mathfrak{p}}(i) \in \mathbb{Z}, 0 \le c_{\mathfrak{p}}(i) < p).$$

Then the points $(c_{\mathfrak{p}}(0)/p, c_{\mathfrak{p}}(1)/p, \cdots, c_{\mathfrak{p}}(k)/p) (\in [0,1)^{k+1})$ *distribute uniformly when* $p, \mathfrak{p}$ *run over the above ones.*

上の記述の仕方が最終的な形とは思えないのだが、これは数のありようを述べていて興味深いと思われる。F が二次体で $k = 0$ のとき正しい ([DFI],[T])。

この予想を念頭において

Theorem 4 *Let* $f_0(x)$ *be the characteristic function of the interval* $[0,1]$*, let* $x_1, x_2, \cdots, x_m$ *be random variables on* $\mathbb{R}$ *whose distribution densities are all equal to* f_0*, and put*

$$X_m = \frac{1}{\sqrt{m}}(x_1 + x_2 + \cdots + x_m - m/2).$$

Then, $X = \lim_{m\to\infty} X_m$ *determines a normal distribution on* $\mathbb{R}$ *with mean* 0 *and with standard deviation* $\dfrac{1}{\sqrt{12}}$.

を眺めると、予想 7 の直前の $\mathfrak{s}(p)$ と $S(p)$ の元の和の違いは $1/p$ であり、その小さな差を無視すれば $m = n - 1$ の時我々の問題にしている分布が正規分布に近いとか分散が $(n-1)/12$ とかをよく直感的に説明している。

最後に

Proposition 1 *Conjecture 1 and 8 yield*

$$\lim_{x\to\infty} \mu = \frac{n-1}{2}.$$

を付け加えておく。

4 Numerical data

我々の密度が x にどの程度依っているかを見るために $P_{gr}(n,s,x)$ の表を $x = 10^9$（上段）、 $x = 10^{10}$（下段）を載せる（5 桁目で四捨五入してある）。

$n = 5$

s	1	2	3
	0.16659	0.66672	0.16669
	0.16667	0.66668	0.16666

$n = 7$

s	1	2	3	4	5
	0.00837	0.21644	0.55012	0.21673	0.00834
	0.00834	0.21663	0.55002	0.21669	0.00832

$n = 9$

s	1	2	3	4	5	6	7
	0	0	0.24993	0.50014	0.24993	0	0
	0	0	0.25001	0.50000	0.24998	0	0

$n = 11$

s	1	2	3	4	5	6	7
	0.00000	0.00140	0.04026	0.24320	0.43019	0.24322	0.04035
	0.00000	0.00138	0.04021	0.24318	0.43043	0.24312	0.04029

8	9
0.00138	0.00000
0.00138	0.00000

The following is the table of $P_{gr}(n, s, 10^9)$.

$s\backslash n$	13	15	17	19	21	23	25
1	0.00000	0	0.00000	0.00000	0	0	0
2	0.00005	0	0.00000	0	0	0	0
3	0.00382	0	0.00001	0	0	0	0
4	0.05502	0	0.00065	0.00004	0	0.00000	0
5	0.24437	0.06392	0.01149	0.00132	0	0.00001	0.00000
6	0.39381	0.24454	0.07870	0.01613	0	0.00024	0.00003
7	0.24385	0.38327	0.23812	0.08755	0.01568	0.00353	0.00050
8	0.05527	0.24444	0.34247	0.23369	0.09389	0.02531	0.00500
9	0.00376	0.06383	0.23788	0.32296	0.23375	0.10040	0.02983
10	0.00005	0	0.07845	0.23373	0.31323	0.22442	0.10498
11	0	0	0.01159	0.08723	0.23381	0.29237	0.21953
12		0	0.00064	0.01601	0.09399	0.22434	0.28036
13		0	0.00001	0.00131	0.01565	0.10026	0.21946
14			0	0.00004	0	0.02534	0.10495
15			0	0.00000	0	0.00351	0.02979
16				0	0	0.00025	0.00505
17				0	0	0.00001	0.00049
18					0	0	0.00002
19					0	0	0.00000
20						0	0
21						0	0
22							0
23							0

この表を見る限り、$x = 10^9$ で密度の小数点以下三桁目までは信頼してよかろう。次の表において max of error は

$$\max_{1 \le s \le n-2} |P_{gr}(n, s, 10^9) - f_{\mu,\sigma}(s)|.$$

のことであり、また

$$N = \begin{cases} (n-1)/12 \text{ if } 3 \nmid n, \\ (n-3)/12 \text{ if } 3 \mid n. \end{cases}$$

とする。

n	$\mu/((n-1)/2)$	σ^2/N	max of error
5	1.00005	0.99985	0.02432
7	1.00008	1.00001	0.01407
9	1.00000	0.99973	0.06413
11	1.00003	1.00071	0.00667
13	0.99997	0.99930	0.00527
15	0.99996	0.99998	0.01567
17	0.99994	1.00020	0.00299
19	0.99989	0.99998	0.00278
21	1.00002	1.00068	0.01239
23	0.99997	0.99970	0.00231
25	0.99999	1.00146	0.00153
27	0.99991	1.00073	0.00913
29	1.00007	0.99960	0.00176
31	0.99994	0.99886	0.00143
33	0.99997	1.00120	0.00633
35	0.99993	0.99991	0.00161
37	1.00005	1.00044	0.00061
39	0.99984	0.99875	0.00504
41	0.99992	0.99840	0.00102
43	0.99990	1.00144	0.00075
45	0.99999	1.00064	0.00381
47	0.99989	0.99961	0.00054
49	1.00008	1.00209	0.00076
51	0.99995	0.99939	0.00295
53	0.99987	1.00089	0.00057
55	0.99989	0.99965	0.00041
57	0.99994	1.00039	0.00226
59	1.00003	0.99673	0.00121
61	0.99999	1.00225	0.00108
63	1.00002	0.99859	0.00252
65	0.99998	1.00026	0.00044
67	0.99997	1.00264	0.00098
69	1.00000	1.00039	0.00199
71	0.99989	1.00018	0.00072
73	0.99987	1.00049	0.00119
75	1.00000	1.00135	0.00201
77	1.00001	1.00160	0.00062
79	0.99997	1.00204	0.00077

81	0.99995	0.99960	0.00186
83	0.99990	1.00135	0.00064
85	1.00000	0.99645	0.00067
87	0.99997	1.00063	0.00153
89	0.99993	0.99835	0.00107
91	0.99998	0.99901	0.00058
93	0.99996	0.99950	0.00124
95	0.99990	0.99960	0.00086
97	0.99988	1.00146	0.00100
99	0.99998	1.00207	0.00130
101	0.99995	1.00030	0.00069

次の表はいくつか定義した密度が一致しているであろうと言った根拠である。$\max_{1\leq s\leq n-2}|P_{gr}(n,s,10^9)-P_a(n,s,10^9)|$

n	$a=10$	$a=2$	$a=5$
5	0.00050	0.00013	0.00004
7	0.00008	0.00006	0.00002
9	0.00011	0.00010	0.00007
11	0.00013	0.00006	0.00010
13	0.00010	0.00008	0.00009
15	0.00022	0.00012	0.00016
17	0.00012	0.00009	0.00002
19	0.00007	0.00005	0.00003
21	0.00024	0.00021	0.00019
23	0.00008	0.00007	0.00008
25	0.00020	0.00014	0.00015
27	0.00021	0.00022	0.00018
29	0.00010	0.00011	0.00008
31	0.00011	0.00006	0.00009
33	0.00033	0.00023	0.00016
35	0.00018	0.00019	0.00020
37	0.00005	0.00004	0.00008
39	0.00032	0.00029	0.00018
41	0.00005	0.00009	0.00010
43	0.00010	0.00007	0.00011
45	0.00015	0.00035	0.00019
47	0.00011	0.00011	0.00016
49	0.00020	0.00016	0.00013
51	0.00036	0.00014	0.00032

次の

$$\max_{1\le s\le n-2} |P_{gr}(n,s,10^9) - P_{gr}(n,s,10^9;k,5)|$$

の表は素数を剰余類に制限しても密度は変わらないことを示唆している。但し

$$P_{gr}(n,s,x;k,m) = \frac{\#\{p \mid p\le x, n|p-1, \mathfrak{s}(p)=s, p\equiv k \bmod m\}}{\#\{p \mid p\le x, n|p-1, p\equiv k \bmod m\}}.$$

n	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
7	0.00023	0.00036	0.00045	0.00028
9	0.00036	0.00030	0.00030	0.00027
11	0.00027	0.00036	0.00040	0.00035
13	0.00043	0.00043	0.00025	0.00026
17	0.00045	0.00047	0.00059	0.00066
19	0.00046	0.00076	0.00064	0.00063
21	0.00039	0.00051	0.00069	0.00057
23	0.00085	0.00106	0.00033	0.00032
27	0.00045	0.00063	0.00044	0.00052
29	0.00053	0.00112	0.00077	0.00074
31	0.00072	0.00089	0.00180	0.00076
33	0.00061	0.00039	0.00056	0.00055
37	0.00069	0.00107	0.00167	0.00113
39	0.00035	0.00081	0.00061	0.00041
41	0.00104	0.00141	0.00150	0.00098
43	0.00138	0.00032	0.00125	0.00100
47	0.00051	0.00062	0.00083	0.00055
49	0.00072	0.00096	0.00083	0.00059
51	0.00084	0.00088	0.00101	0.00080

最後に密度を有理数で近似しておくと
$n=5$

s	1	2	3
	1/6	4/6	1/6

$n=7$

s	1	2	3	4	5
	1/120	26/120	66/120	26/120	1/120

$n=9$

s	1	2	3	4	5	6	7
	0	0	1/4	2/4	1/4	0	0

References

[KN] Y. Kitaoka and M. Nozaki, *On the density of the set of primes which are related to decimal expansion of rational numbers,* RIMS *Kokyuroku*, to appear.

[HKKN] T. Hadano, Y. Kitaoka, T. Kubota and M. Nozaki, *Densities of sets of primes related to decimal expansion of rational numbers,* submitted.

[DFI] W. Duke, J.B. Friedlander and H. Iwaniec, *Equidistribution of roots of a quadratic congruence to prime moduli,* Ann. of Math., 141(1995), 423-441.

[T] Á. Tóth, *Roots of Quadratic congruences,* Internat. Math. Res. Notices 2000, 719-739.