２次ジーゲル保型形式に関する種々のリフティング予想と志村対応予想

伊吹山知義（Tomoyoshi IBUKIYAMA）
大阪大学大学院理学研究科数学教室
（Department of Math., Graduate School of Sci., Osaka Univ.）

次数２のジーゲル保型形式に関するリフティングに関する結果および予想について若干復習し、あわせてウェイトが整数の保型形式とウェイトが半整数の保型形式の間の対応（志村対応）が次数２ではどうなると思われるかという予想を述べる。

1　ジーゲル保型形式の定義

複素上半空間 H_n を

$$H_n = \{Z = X + iY \in M_n(\mathbb{C}); {}^t Z = Z,\ X, Y \in M_n(\mathbb{R}),\ Y > 0\}$$

と定義する。これは６種類ある有界対称領域のうちのひとつである。有界対称領域は解析的自己同型が豊富にあるが、今の場合は

$$Sp(n,\mathbb{R}) = \{g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R});\ {}^t gJg = J\}$$

$J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1_n \\ 1_n & 0 \end{smallmatrix}\right)$ とおくと、

$$X \to g(Z) = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}$$

として $Sp(n,\mathbb{R})$ は H_n に作用する。さて、V を $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間とし、H_n 上の V-valued な正則関数 $f(Z)$ の空間を考える。$Sp(n,\mathbb{R})$ の部分群 Γ について、$\Gamma \times H_n$ 上の $GL_n(\mathbb{C})$-valued な関数 $J(g,Z)$ で、Z に関して正則なものを考える。$\gamma \in \Gamma$ について $f(Z) \to J(\gamma,Z)^{-1} f(\gamma Z)$ なる写

像が、V-値正則関数への右からの Γ の作用となるとき、$J(\gamma, Z)$ を Γ の保型因子という。この条件は、任意の $\gamma_i \in \Gamma$ $(i = 1{,}2)$ について

$$J(\gamma_1\gamma_2, Z) = J(\gamma_1, \gamma_2 Z)J(\gamma_2, Z)$$

となることと同値である。一般には、$J(\gamma, Z)$ は $Sp(n, \mathbb{R}) \times H_n$ 上の関数まで延長できるわけではない（たとえば半整数ウェイトなど）。しかし、延長できるものとの関連で考えるほうがわかりやすい。

もっとも典型的な保型因子は、$GL_n(\mathbb{C})$ の有理既約表現 (ρ, V) に対して

$$J(g, Z) = \rho(CZ + D)$$

とおいたものである。たとえば、$n = 2$ ならば、$GL_2(\mathbb{C})$ の有理既約表現は $\rho_{k,j}(h) = \det^k(h)Sym_j(h)$ $(h \in GL_2(\mathbb{C}))$ の形に限る。ただしここで、Sym_j は j 次対称テンソル積表現（２変数の j 次斉次多項式上への表現）である。

2 整数ウェイトおよび半整数ウェイトのベクトル値保型形式

$GL_n(\mathbb{C})$ の有理既約表現 (ρ, V) をとる。H_n 上の V-valued な正則関数 $F(Z)$ で、任意の $\gamma \in \Gamma_n = Sp(n, \mathbb{Z})$ について

$$f(\gamma Z) = \rho(CZ + D)f(Z)$$

となるものを Γ_n のウェイト ρ の保型形式という。特に、$n = 2$ で $\rho = \rho_{k,j}$ のとき、この空間を $A_{k,j}(Sp(2, \mathbb{Z}))$ と書くことにする。さらにカスプ形式 $F(Z)$ (正則保型形式のうちで、佐武コンパクト化の境界で消える関数）の全体を $S_{k,j}(\Gamma_2)$ と書く。以上を、$\det^k$ の指数 k が整数であることを強調するために整数ウェイトという事にする。

さて、これに対し、半整数ウェイトというのは、上で行列式部分のべきが半整数になっているものである。しかし、各 $g \in Sp(n, \mathbb{R})$ に対して H_n 上 $\det(CZ + D)^{1/2}$ を各 C, D に対して一価関数として定義することはできるが、全体として保型因子になるようにすることはできない。ここを切り抜けるには $Sp(n, \mathbb{R})$ に変わるものとしてメタプレクティック群をとればよいが、ここでは簡単のため、離散群についてのみ解説する。$Sp(n, \mathbb{Z})$ の部分群を

$$\Gamma_0(4) = \left\{ \gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(n, \mathbb{Z}); C \equiv 0 \bmod 4 \right\}$$

と定義する。このとき $\gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ に対して、$\psi(\gamma) = \left(\frac{-1}{\det(D)}\right)$ と置くとこれは $\Gamma_0(4)$ の指標になる。さて、

$$(\theta(\gamma Z)/\theta(Z))^2 = \psi(\gamma)\det(CZ+D)$$

が知られている。よって、$\theta(\gamma Z)/\theta(Z)$ を $\Gamma_0(4)$ のウェイト 1/2 の保型因子として用いることができる。さて、整数ウェイトの時と異なり、保型形式の定義で $\Gamma_0(4)$ のなんらかの指標 χ を考慮に入れることにする。典型的なものとしては χ が単位指標、または $\chi(\gamma) = \psi(\gamma) = \left(\frac{-1}{\det(D)}\right)$ の場合が考えられる。$\Gamma_0(4)$ に関するウェイト $\det^{k-1/2}\rho$ （ただし ρ は $GL_n(\mathbb{C})$ の表現）かつ指標 χ の保型形式 F というのを、H_2 上の正則関数で任意の $\gamma \in \Gamma_0(4)$ について

$$F(\gamma Z) = \chi(\gamma)(\theta(\gamma Z)/\theta(Z))^{2k-1}\rho(CZ+D)F(Z)$$

となるものと定義する。 このような関数の空間を $A_{k-1/2,\rho}(\Gamma_0(4),\chi)$ と書く。またカスプ形式の空間を $S_{k-1/2,\rho}(\Gamma_0(4),\chi)$ と書く。ρ が単位表現の時は（すばわち、スカラー値の保型形式の時は）、これを省略して $A_{k-1/2}$, $S_{k-1/2}$ 等と書く。特に $n=2$ で $\rho = Sym_j$ の時は、$A_{k-1/2,j}(\Gamma_0(4))$ などと書くことにする。また、χ が単位指標のときは、省略して、$A_{k-1/2,j}(\Gamma_0(4)) = A_{k-1/2,j}(\Gamma_0(4),\chi)$ などと書く。注意として、$n=1$ ならば k によらずに $A_{k-1/2}(\Gamma_0(4),\psi) = 0$ であるが、$n=2$ ならば $A_{k-1/2}(\Gamma_0(4),\psi)$ は普通はゼロではない。これは $n=1$ と $n=2$ の大きな違いである。

3 Lifting など

１変数から２次ジーゲル保型形式へのリフティングとしては、Saito-Kurokawa lifting が有名である。これは $f(\tau) \in A_{2k-2}(SL_2(\mathbb{Z}))$ が Hecke 作用素の同時固有関数であるとき、$F \in A_k(\Gamma_2)$ で spinor L 関数が $L(s,F) = \zeta(s-k+1)\zeta(s-k+2)L(s,f)$ となるものが存在するという主張であり、H. Maass, D. Zagier などにより証明された。この定理の証明は、Shimura 対応 $S^+_{k-1/2}(SL_2(\mathbb{Z})) \cong S_{2k-2}(SL_2(\mathbb{Z}))$ （後述）と指数 1 のヤコービ形式 ($H_1 \times \mathbb{C}$ 上の保型形式にあたるもの、定義は略）との対応 $J_{k,1}(\Gamma^J) \cong S^+_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ を用いて、f から index 1 のヤコービ形式をつくり、ヤコービ形式から一種のヘッケ作用素で、ジーゲル保型形式を構成することにより、得られる。類似の結果は、いくつかある。たとえば１変数保型形式が、$SL_2(\mathbb{Z})$ ではなくて $\Gamma_0(N)$ のときには、H. Kojima, B. Ramakrishnan らの文献があるようである。また、Gritsenko により、ヤコービ形式から paramodular 群に関するジーゲル保型形式に拡張

されている (cf. [4])。この場合、ヤコービ形式の index と paramodular 群の level が一致するようなリフティングになっている。([4]). いずれにしても、ヤコービ形式から Zagier と同様な方法でジーゲル保型形式を構成すること自身は、離散群のよい生成元が取れることさえ言えれば、難しくはない。実際 $\Gamma_0(N)$ については、このような生成元があり、([1] Lemma 6.2)、自分で Eichler-Zagier の本をまねればヤコービ形式を出発点とする限り、かなり容易にリフティングが構成できる。これは指標がついてもつかなくても同じである。これは Eichler-Zagier とまったく同様なので、詳しい解説は省略する。ヤコービ形式と１変数保型形式との対応はまた別の問題と考えればよい。

さて、$n=2$ の Saito-Kurokawa lifting の進化した形としては Yoshida lifting が存在する。これは、たとえばウェイト 2 の保型形式 f と ウェイト $2k-2$ の１変数の保型形式 g を、Shimizu-Jacquet-Langlands 対応で $SU(2)\times SU(2)$ 上の保型形式とみなし、$SO(4)\cong SU(2)\times SU(2)/\{\pm 1\}$ と $Sp(2,\mathbb{R})$ のテータ対応を用いてウェイト k のジーゲル保型形式 F で $L(s,F)=L(s-k+1,f)L(s,g)$ なるものを構成するものである。この lifting はベクトル値ジーゲル保型形式でも同様に行えることは吉田氏自身が注意していることである。この場合は１変数保型形式でウェイトが $j+2$ のものとウェイトが $2k+j-2$ のものの組からウェイトが $\rho_{k,j}$ になるジーゲル保型形式を構成することになる。ここで注意すべきなのは、このやり方だと、コンパクト群を経由しているので、もとのレベル１のケース（つまり、離散群が $SL_2(\mathbb{Z})$ や $\Gamma_2=Sp(2,\mathbb{Z})$ のケース）は取り扱えないということである。事実、$Sp(2,\mathbb{Z})$ に属するベクトル値のジーゲル保型形式で Saito-Kurokawa lifting や Yoshida lifting の形をしている実験例はなぜか皆無であるし、Eichler-Zagier の手法もうまく行かない。個人的には、レベル１、つまり $Sp(2,\mathbb{Z})$ に関する限り、ベクトル値ではこのような lifting は存在しないのではないかと考えている。

以上でレベルが高くなると構成は複雑になるが、計算の実例はある。たとえば $y^2=x^5-1$ なる曲線のヤコービ多様体に関する Hasse-Weil L 関数が次数２ウェイト２のジーゲル保型形式から来るという Top-Salvati-Manni の予想を岡崎武生氏が解決したときにかなり小さな合同部分群 $(\Gamma(8))$ で計算を実行している。これは、かなり面倒な計算になる。（なお、有理数体上定義された２次元のアーベル多様体の Hasse-Weil ゼータ関数はウェイト２のジーゲル保型形式の Spinor L 関数であろうというのは、吉田敬之氏の一般的な予想であるが、対応すべき離散群などははっきり定式化されていないと思う。Armand Brumer は paramodular 群がよい候補であるとの観測を若干の実験例とともに述べていた。）Geemen と Nygaard は、レベルが高いところで、ウェイト３のジーゲル保型形式についていくつかの実験をして、lifting の予想を述べている。この予想のうち、Yoshida lifting の範疇に属するものはやはり岡崎氏により解かれている。しかし彼らの予想の中にはジーゲル保

型形式でその L 関数が量指標と１変数保型形式の convolution product になりそうな実験例があり、これについては予想は解かれていない。

更に、Yoshida lifting の半整数ウェイト版とも言うべき予想もある。これは林田秀一氏との共同研究である。

Conjecture 3.1 (cf. [6]) 任意の *Hecke* 同時固有関数 $f \in S_{2k-2}(SL_2(\mathbb{Z}))$ と $g \in S_{2k-4}(SL_2(\mathbb{Z}))$ の組に対して、ジーゲル保型形式 $F \in S^+_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ が存在して、$L(s,F) = L(s,f)L(s-1,g)$ となる。

ここで登場した $S^+_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ は半整数ウェイトの場合の new form にあたるプラス空間という $S_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ の部分空間であるが、これの説明は都合により次のセクションにまわすことにする。この予想に関しては、多くの数値実験が存在している ([6])。証明は現在林田氏が試みている最中である。

さて、以上とまったく性格の異なる予想がある。Kim と Shahidi は $GL(2)$ から $GL(4)$ へのリフティングに関連して次の予想を述べた。

Conjecture 3.2 ウェイト２の *Hecke* 同時固有関数となる１変数 *cusp* 形式 f に対して、ウェイト３の２次正則ジーゲルカスプ形式 F が存在して、$L(s,F) = L(s,f,Sym_3)$ となるであろう。

ここで右辺は symmetric cube representation に対応するゼータ関数、つまり、$L(s,f) = \prod_p (1-a_p p^{-s}+p^{1-2s})^{-1} = \prod_p (1-\alpha_p p^{-s})^{-1}(1-\beta_p p^{-s})^{-1}$ とするとき、$L(s,f,Sym_3) = \prod_p ((1-\alpha^3 p^{-s})(1-\alpha^2\beta p^{-s})(1-\alpha\beta^2 p^{-s})(1-\beta^3))^{-1}$ である。さて、この予想を実験しようとするとウェイト２のカスプ形式が存在するような $\Gamma_0(p)$ は最低でも $p=11$ であり、対応すべきジーゲル保型形式を記述するのがきわめて難しくなる。そこで、リフトされた先がベクトル値になるように予想を拡張すると、関数等式その他から考えて、$p=$（素数）または 1 に対して、$S_k(\Gamma_0(p))$ から $S_{k+1,k-2}(B(p))$ ($B(p)$ は p が素数ならば $Sp(2,\mathbb{Z})$ のレベル p の岩堀部分群, $p=1$ ならば $\Gamma_0(p) = SL_2(\mathbb{Z})$ かつ $B(1) = Sp(2,\mathbb{Z})$ を意味するとする。）へのリフティングで同じ性質を満たすものが存在すると考えるのが自然である。実際、岩堀部分群のウェイト３の new form の次元は、私自身が昔考えた $Sp(2,\mathbb{R})$ と $Sp(2)$ の対応予想（Ihara-Langlands 予想）から判断すると１次元のはずであり、これが対応すると考えられるが残念ながらこのような保型形式を構成するのは容易とは思えない。一方で、このように予想を拡張すると、１変数の側でウェイトの大きい保型形式を考えられる利点がある。この想定の元に、実験してみた。$\dim S_{12}(SL_2(\mathbb{Z})) = 1$ であり、この空間の基底は Ramanujan のデルタ関数

Δ で与えられる。一方で $\dim S_{13,10}(\Gamma_2) = 2$ が対馬により知られており、また、この 2 次元空間の基底を球関数つきのテータ関数で構成できる。これを Hecke 作用素の同時固有関数に分解すると、そのうちの一方の L 関数の 2 および 3 でのオイラー因子は、$L(s, \Delta, Sym_3)$ のオイラー因子に一致している。よって、実験的にもこの予想は正当であることがわかる。

4　志村対応についての新予想

次数 2 の場合を説明する前に 1 変数の復習をしておく。ここで復習するのは、W. Kohnen によるもっとも単純な場合である。正整数 k に対して、$S_{2k-2}(SL_2(\mathbb{Z}))$ で $SL_2(\mathbb{Z})$ に関するウェイト $2k-2$ のカスプ形式の空間を表す。また $S_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ でウェイトが $k-1/2$ のカスプ形式の空間を表す。定義は前に述べた通りである。

　さて、$S_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ はレベルが 4 であるから、この空間の中でレベル 1 に相当するものを抽出したい。これは一種の new forms であり、これが Kohnen のプラス空間である。具体的には、$f \in S_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ のとき f のフーリエ展開を

$$f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} c(n) e(n\tau)$$

とするとき、$n \equiv 0$ or $(-1)^{k-1} \bmod 4$ でないと $c(n) = 0$ となるようなもののなす $S_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ の部分空間を $S^+_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ と書いて、Kohnen のプラス空間という。

定理（Shimura, Kohnen） L 関数を保つ次の同型が存在する。

$$S_{2k-2}(SL_2(\mathbb{Z})) \cong S^+_{k-1/2}(\Gamma_0(4)).$$

ここで左辺の L 関数は普通の Hecke の意味での L 関数である。右辺は、平方のところだけで決まるヘッケ作用素で定義された L 関数であるが、詳しくは略す。

　ちなみにプラス空間は、k が偶数ならば正則ヤコービ形式の空間に、また k が奇数ならば歪正則ヤコービ形式の空間に同型である。(それぞれ Zagier と Skoruppa による。)

　次に一般の次数のプラス空間を定義する。$l = 0$ または 1 として、$F \in S_{k-1/2,j}(\Gamma_0(4), \psi^l)$ とする。ここで $\psi(\gamma) = \left(\frac{-1}{\det D}\right)$ と置いた。フーリエ展開が

$$F(Z) = \sum_T a(T) e(tr(TZ)$$

(T は半正定値半整数対称行列）となるのは普通通りである。ただしここで $a(T)$ は $j+1$ 次のベクトルである。さて、ある $\mu \in \mathbb{Z}^2$ について $(-1)^{k+l}T \equiv {}^t\mu\mu \bmod 4$ となる T、すなわち $(-1)^{k+l}T - {}^t\mu\mu$ が半整数対称行列 S の４倍になるような T をのぞき $a(T)=0$ となる、という条件を満たす F 全体の空間をプラス空間と定義し、$S^+_{k-1/2,j}(\Gamma_0(4),\psi^l)$ と書く。次の定理は $n=1$ では Zagier, Skoruppa に、また一般次数では、Ibukiyama, Hayashida による。

Theorem 4.1 $S^+_{k-1/2,j}(\Gamma_0(4),\psi^l)$ は、$k+l$ が偶数ならば、$Sp(2,\mathbb{Z})$ に関する *index 1* の正則ヤコービ形式の空間に、また $k+l$ が奇数ならば、$Sp(2,\mathbb{Z})$ に関する *index 1* の歪正則ヤコービ形式の空間に 2 以外の素点での *Hecke* 作用素の作用をこめて同型である。

ここでヤコービ形式は $Sp(n,\mathbb{Z})$ と $\mathbb{Z}$ 上のハイゼンベルク群の半直積に対するものをとっているのでいわばレベル１であり、よってプラス空間はレベル１に対応していることがわかる。(ヤコービ形式の定義は省略する。）

さて、今回の話では、次の予想が新しい提案である。

Conjecture 4.2 (次数２の志村対応予想) k を３以上の整数、j を非負の偶数とする。L 関数を保つような次の同型が存在する。

$$S^+_{k-1/2,j}(\Gamma_0(4),\psi) \cong S_{j+3,2k-6}(Sp(2,\mathbb{Z}))$$

ただしここで右辺は *Spinor L* 関数、左辺は *Zhuravlev* の定義した L 関数をとる。また左辺では、素数 *2* での *Euler factor* の定義は、ヤコービ形式の *2* でのヘッケ作用素を引き戻すことにより得られる。

この予想は j が奇数ならば正しくない。(どのような予想がありうるのか、よくわかっていない。）また、character ψ がついた Neben type に対する予想であるという点も微妙なキーポイントで、これを Haupt type に変えた予想は、どのようになるか、現在、予想は存在しないし、かなりややこしい可能性がある。また、上の予想にあらわれるウェイトや群と指標では、カスプ形式以外の保型形式は存在しないので、アイゼンシュタイン級数という理解の手がかりのプロトタイプは欠如している点も話が難しくなっている。

以下、予想の根拠をいくつか述べる。

(1) 一番はっきりしているのはウェイトの対応である。ベクトル値対ベクトル値という複雑な形をしているが、これは、$Sp(2,\mathbb{R})$ とその compact twist $Sp(2)$ の間の対応に関する Ihara-Langlands 予想、$Sp(2)/\{\pm\} \cong SO(5)$ なる同型、および $SO(5)$ と $Sp(2,\mathbb{R})$ の二重被覆の間のテータ対応の両者をつなぐことにより、一応 $Sp(2,\mathbb{R})$ から $Sp(2,\mathbb{R})$ の二重被覆への仮想的な写像を考えることができる。この対応で、ウェイトは予想に記述したものに決まってしまう。ちなみに今述べた（仮想的な）写像は証明にはなり得ない。この写像はレベルが１にはなり得ないこと、$Sp(2)$ と $SO(5)$ はかなりちがうこと、などでわれわれの予想の内容とは程遠いからである。

(2) 次に次元の比較を考える。まず $S_{k,j}(\Gamma_2)$ の次元および $S_{k-1/2,j}(\Gamma_0(4),\psi)$ は $k \geq 5$ で対馬龍司氏により知られている。一方 $\dim S^+_{k-1/2,j}(\Gamma_0(4))$ の次元は正確にはわかっていない。しかしやはり対馬氏の予想がある。この予想はコホモロジーの消滅定理を仮定している点で定理にはなっていないが、かなり確からしい。これらの次元公式はいずれも相当複雑であり、見ただけでは到底両者を比較できないが、これを必死で計算すると、

$$\dim S^+_{k-1/2,j}(\Gamma_0(4)) = \dim S_{j+3,2k-6}(\Gamma_2)$$

が確かめられる。ここで左辺は予想値である。ついでに言えば、次元公式は両辺とも k と j の関数として与えられており、この関数は $k \geq 5$ でなくても意味がある。実は、両辺の公式を与える関数の値は $j \geq 1$ ならば、$k = 3$, 4 でも一致しており、これから考えると公式自身はたとえば $k = 3$ でも正しいと考えられる。これは Selberg trace formula の収束域から外れており、ここでも (ベクトル値では）一般の次元公式がそのまま成立するということは、かなり目新しい現象で興味深い。跡公式に対する新しい問題といえる。

(3) ウェイトの比較的小さいところで多数の数値実験を行って、２や３のオイラー積を比較した。これを以下に書こう。

まず次元の表を書くと $S_{k-1/2,j}(\Gamma_0(4),\psi)$ については

(k,j)	$(12,2)$	$(13,2)$	$(14,2)$	$(15,2)$	$(16,2)$
次元	32	45	58	77	96
(k,j)	$(8,4)$	$(9,4)$	$(10,4)$	$(11,4)$	$(12,4)$
次元	20	32	45	65	86

(対馬氏による。)

$S^+_{k-1/2,j}(\Gamma_0(4),\psi)$ については、

(k,j)	$(12,2)$	$(13,2)$	$(14,2)$	$(15,2)$	$(16,2)$
次元	1	1	0	2	2
(k,j)	$(8,4)$	$(9,4)$	$(10,4)$	$(11,4)$	$(12,4)$
次元	0	1	1	1	2

（ただし以上のプラス空間の次元は対馬氏による予想値）

$S_{k,j}(Sp(2,\mathbb{Z}))$ については

(k,j)	$(5,18)$	$(5,20)$	$(5,22)$	$(5,24)$	$(5,26)$
次元	1	1	0	2	2
(k,j)	$(7,10)$	$(7,12)$	$(7,14)$	$(7,16)$	$(7,18)$
次元	0	1	1	1	2

（ここでは次元は対馬氏による。）

以上の表は上下対応する部分が並んでいる。みればわかるように次元は(予想値ではあるが）一致している。これらの部分の保型形式は、整数ウェイトについては球関数つきのテータ関数で構成できる。また半整数ウェイトについては、筆者が開発した Rankin-Cohen type の微分作用素により構成できる。実際にはプラス空間の元だけを直接構成する手段はあまりないので、まず最初に j を 2 または 4 に固定した半整数ウェイトの保型形式の空間（graded module) を決定することになる。これらの決定自身それなりに興味深いがここでは省略する (cf. [9])。この空間の一部としてフーリエ係数を見てプラス空間の元の候補を求めることになる。さらに、それをヘッケ作用素の作用で分解する。たとえば、$(k,j)=(16,2)$ ならば 96 次元空間から 2 次元のプラス空間の候補をみつけ、それをヘッケ環の作用で分解する。このような手続きで得られる実際の同時固有関数は生成元の非常に複雑な線形結合で非常に式が長い。ここでは省略する。準備中の論文 [10] を見ていただきたい。ここでは、以上のように計算したオイラー因子だけをあげる。

以下で、$F_{23/2,2}$ などはウェイトが $\det^{23/2} Sym_2$ の同時固有関数となるカスプ形式などをあらわす。ウェイトを決めても 1 次元でない場合は、$F_{5,26,a}$, $F_{5,26,b}$ のようにして 2 つを区別する。

4.1 $S_{5,18}(\Gamma_2)$ and $S^+_{23/2,2}(\Gamma_0(4),\psi)$.

ともに1次元で、2でのオイラー因子と3でのオイラー因子は $T=p^{-s}$ に対して、

$$\begin{aligned}
H_2(s,F_{23/2,2})=H_2(s,F_{5,18}) &= 1+2880T-26378240T^2+2880\cdot 2^{25}T^3+2^{50}T^4\\
H_3(s,F_{23/2,2})=H_3(s,F_{5,18}) &= 1+538970T+204622302870T^2+539870\cdot 3^{25}T^3+3^{50}T^4
\end{aligned}$$

4.2 $S_{5,20}(\Gamma_2)$ and $S^+_{25/2,2}(\Gamma_0(4),\psi)$.

ともに1次元で

$$\begin{aligned}
H_2(s,F_{25/2,2})=H_2(s,F_{5,20}) &= 1+240T-29204480T^2+240\cdot 2^{27}T^3+2^{54}T^4\\
H_3(s,F_{25/2,2})=H_3(s,F_{5,20}) &= 1-1645560T-2281745279610T^2-1645560\cdot 3^{27}T^3+3^{54}T^4
\end{aligned}$$

4.3 $S_{5,24}(\Gamma_2)$ and $S^+_{29/2,2}(\Gamma_0(4),\psi)$.

ともに2次元で

$$\begin{aligned}
H_2(s,F_{29/2,2,a}) &= H_2(s,F_{5,24,a})\\
&= 1-(-8040+600\sqrt{4657})T+(742973440-1843200\sqrt{4657})T^2\\
&\quad -(-8040+600\sqrt{4657})2^{31}T^3+2^{62}T^4\\
H_2(s,F_{29/2,2,b}) &= H_2(s,F_{5,24,b})\\
&= 1-(-8040-600\sqrt{4657})T+(742973440+1843200\sqrt{4657})T^2\\
&\quad -(-8040-600\sqrt{4657})2^{31}T^3+2^{62}T^4
\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}
H_3(s,F_{29/2,2,a}) &= H_3(s,F_{5,24,a})\\
&= 1-(4187160-194400\sqrt{4657})T+196830(65242301+4016320\sqrt{4657})T^2\\
&\quad -(4187160-194400\sqrt{4657})3^{31}T^3+3^{62}T^4\\
H_3(s,F_{29/2,2,b}) &= H_3(s,F_{5,24,b})\\
&= 1-(4187160+194400\sqrt{4657})T+196830(65242301-4016320\sqrt{4657})T^2\\
&\quad -(4187160+194400\sqrt{4657})3^{31}T^3+3^{62}T^4
\end{aligned}$$

4.4 $S_{5,26}(\Gamma_2)$ and $S^+_{31/2,2}(\Gamma_0(4),\psi)$.

ともに2次元で、

$$
\begin{aligned}
H_2(s,F_{31/2,2,a}) &= H_2(s,F_{5,26,a}) \\
&= 1-(27072+192\sqrt{99661})T+(4836327424-9732096\sqrt{99661})T^2 \\
&\quad -(27072+192\sqrt{99661})\cdot 2^{33}T^3+2^{66}T^4 \\
H_2(s,F_{31/2,2,b}) &= H_2(s,F_{5,26,b}) \\
&= 1-(27072-192\sqrt{99661})T+(4836327424+9732096\sqrt{99661})T^2 \\
&\quad -(27072-192\sqrt{99661})\cdot 2^{33}T^3+2^{66}T^4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&H_3(s,F_{31/2,2,a}) = H_3(s,F_{5,26,a}) = \\
&\quad 1-(-9567144-59904\sqrt{99661})T+(-268954900275114+16134754093056\sqrt{99661})T^2 \\
&\quad -(-9567144-59904\sqrt{99661})\cdot 3^{33}T^3+3^{66}T^4 \\
&H_3(s,F_{31/2,2,b}) = H_3(s,F_{5,26,b}) = \\
&\quad 1-(-9567144+59904\sqrt{99661})T+(-268954900275114-16134754093056\sqrt{99661})T^2 \\
&\quad -(-9567144+59904\sqrt{99661})\cdot 3^{33}T^3+3^{66}T^4
\end{aligned}
$$

4.5 $S_{7,12}(\Gamma_2)$ and $S^+_{17/2,4}(\Gamma_0(4),\psi)$.

ともに1次元で

$$
\begin{aligned}
H_2(s,F_{17/2,4}) = H_2(s,f_{7,12}) &= 1+480T+5754880T^2+480\cdot 3^{26}T^3+3^{52}T^4 \\
H_3(s,F_{17/2,4}) = H_3(s,f_{7,12}) &= 1+73080T-97880212890T^2+73080\cdot 3^{23}T^3+3^{46}T^4
\end{aligned}
$$

4.6 $S_{7,14}(\Gamma_2)$ and $S^+_{19/2,4}(\Gamma_0(4),\psi)$.

ともに1次元で

$$
\begin{aligned}
H_2(s,F_{19/2,4}) &= H_2(s,f_{7,14}) \\
&= 1+3696T+18116608T^2+3696\cdot 2^{25}T^3+2^{50}T^4 \\
H_3(s,F_{19/2,4}) &= H_2(s,f_{7,14}) \\
&= 1-511272T+377292286422T^2-511272\cdot 3^{25}T^3\cdot 3^{50}T^4
\end{aligned}
$$

4.7 $S_{7,16}(\Gamma_2)$ and $S^+_{21/2,4}(\Gamma_0(4),\psi)$.

ともに1次元で

$$
\begin{aligned}
H_2(s,F_{21/2,4}) &= H_2(s,f_{7,16}) \\
&= 1-13440T+166912000T^2-13440\cdot 2^{27}T^3+2^{54}T^4 \\
H_3(s,F_{21/2,4}) &= H_3(s,f_{7,16}) \\
&= 1+1487160T-2487701893050T^2+1487160\cdot 3^{27}T^3+3^{54}T^4
\end{aligned}
$$

References

[1] H. Aoki and T. Ibukiyama, Simple graded rings of Siegel modular forms, differential operators and Borcherds products, to appear in International J. Math.

[2] T. Arakawa, Vector Valued Siegel's Modular Forms of Degree Two and the Associated Andrianov L-functions. Manuscripta Math. 44(1983), 155-185.

[3] M. Eichler and D. Zagier, The Theory of Jacobi Forms, Birkhäuser, 1985, Boston-Basel-Stuttgart.

[4] V. Gritsenko, Irrationality of the moduli spaces of polarized abelian surfaces, *Abelian Varieties* ed. W. Barth, K. Hulek, H. Lange, Published by Walter de Gruyter & Co. Berlin (1995), 63–81.

[5] S. Hayashida, Skew-holomorphic Jacobi forms of index 1 and Siegel modular forms of half integral weights, J. Number Theory 106(2004), 200-218.

[6] S. Hayashida and T. Ibukiyama, Siegel modular forms of half integral weight and a lifting conjecture, preprint.

[7] T. Ibukiyama, Construction of half integral weight Siegel modular forms of $Sp(n,\mathbb{R})$ from automorphic forms of the compact twist $Sp(2)$. J. Reine u. Angew. Math. 359 (1985), 188–220.

[8] T. Ibukiyama, On Jacobi forms and Siegel modular forms of half integral weights, *Comment. Math. Univ. St. Paul,* 41 (1992), no.2, 109-124.

[9] T. Ibukiyama, Vector valued Siegel modular forms of half integral weight, preprint.

[10] T. Ibukiyama, Conjecture on Shimura correspondence of Siegel modular forms of degree two, in preparation.

[11] T. Ibukiyama, Numerical example of a cubic zeta function coming from a Siegel modular form, in preparation.

[12] W. Kohnen, Modular forms of half-integral weight on $\Gamma_0(4)$, *Math. Ann.* 248 (1980), no.3, 249-266.

[13] N.-P. Skoruppa, Developments in the theory of Jacobi forms, Automorphic functions and their applications (Khabarovsk, 1988), 167-185, Acad. Sci. USSR, Inst. Appl. Math., Khabarovsk, 1990. See also MPI-preprint 89-40 (1989).

[14] G. Shimura, On modular forms of half integral weight, Ann. of Math. 97(1973),440-481.

[15] R. Tsushima, An explicit dimension formula for the spaces of generalized Siegel modular forms with respect to $Sp(2, \mathbb{Z})$, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 59(1983), no. 4, 139–142.

[16] R. Tsushima, Dimension Formula for the Spaces of Siegel Cusp Forms of Half Integral Weight and Degree Two, Comm. Math. Univ. St. Pauli Vol. 52 No. 1(2003), 69–115.

[17] R. Tsushima, Dimension Formula for the Spaces of Jacobi Forms of Degree Two, in preparation.

[18] V. G. Zhuravlev, Hecke rings for covering of a symplectic group, Math. Sbornik 121(163) (1983), 381–402.

[19] V. G. Zhuravlev, Euler expansions of theta transforms of Siegel modular forms of half-integral weight and their analytic properties, Math. Sbornik 123(165)(1984),174-194.