ポリログとフロベニウス

古庄 英和（名大多元 / IAS）

furusho@math.nagoya-u.ac.jp / furusho@ias.edu

$\boxed{\text{要旨}}$ (多重)ポリログとフロベニウスの関係について考えてみました。比較し易い様に左側の頁には $\mathbb{C}$ の世界の話をかき右側の頁には p 進の世界の話をかくことにします。

$\boxed{\S 1}$ $\mathbb{C}$ の世界

§1.1. 多重ポリログ

① 定義：$k_1, \cdots, k_m \in \mathbb{N}$ に対して次で定まる巾級数を(一変数) 多重ポリログという。

$$\mathcal{L}i_{k_1\cdots k_m}(z) := \sum_{\substack{0<m_1<\cdots<m_m \\ m_i \in \mathbb{N}}} \frac{z^{n_m}}{n_1^{k_1} \cdots\cdots n_m^{k_m}} \quad (z \in \mathbb{C})$$

この関数は $|z|<1$ で収束する。

② $m=1$ のときの関数 $\mathcal{L}i_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^k}$ をポリログという。

③ 解析接続：多重ポリログはある種の微分関係式を満たしておりその微分関係式を逆算することにより多重ポリログの反復積分表示

$$\mathcal{L}i_{k_1,\cdots,k_m}(z) := \mathrm{It}\int_0^z \underbrace{\frac{dt}{t} \wedge \cdots \wedge \frac{dt}{t} \wedge \frac{dt}{1-t}}_{k_m} \wedge \frac{dt}{t} \wedge \cdots\cdots \wedge \frac{dt}{1-t} \wedge \underbrace{\frac{dt}{t} \wedge \cdots \wedge \frac{dt}{t} \wedge \frac{dt}{1-t}}_{k_1}$$

が得られる。これにより当初半径1の開円板内部でしか定義されていなかった多重ポリログがそれを越えて正則関数として（全平面でなく）普遍被覆 $\widetilde{\mathbf{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0,1,\infty\}}$ にまで解析接続される。

目次			
	§1.1.	§2.1.	多重ポリログ
	§1.2.	§2.2.	ポリログの variant
	§1.3.	§2.3.	π_1 とフロベニウス
	§1.4.	§2.4.	主結果

---

§2 P進の世界　（P：素数）

§2.1. P進多重ポリログ

①定義：$k_1, \cdots, k_m \in \mathbb{N}$ に対して次で定まる巾級数を(一変数)P進多重ポリログという。

$$Li_{k_1,\cdots,k_m}(z) = \sum_{\substack{0<n_1<\cdots<n_m \\ n_i \in \mathbb{N}}} \frac{z^{n_m}}{n_1^{k_1}\cdots n_m^{k_m}} \quad (z \in \mathbb{C}_p)$$

この関数は $|z|_p<1$ で収束する（$|\cdot|_p$ は $\mathbb{C}_p$ の標準的な乗法付値)。

②$m=1$ のときの関数 $Li_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^k}$ をP進ポリログという。

③解析接続：P進多重ポリログはある種の微分関係式を満たしておりその微分関係式を Coleman の P進反復積分理論 [C] を用いて逆算することによりP進多重ポリログの反復積分表示

$$Li_{k_1,\cdots,k_m}(z) = \mathrm{Col}\int_0^z \underbrace{\frac{dt}{t}\wedge\cdots\wedge\frac{dt}{t}\wedge\frac{dt}{1-t}}_{k_m}\wedge\frac{dt}{t}\wedge\cdots\cdots\wedge\frac{dt}{1-t}\wedge\underbrace{\frac{dt}{t}\wedge\cdots\wedge\frac{dt}{t}\wedge\frac{dt}{1-t}}_{k_1}$$

が得られる。これにより当初半径1の開円板内部でしか定義されていなかったP進多重ポリログがそれを越えて（$\mathbb{P}^1\setminus\{0,1,\infty\}$ の）Coleman 関数として $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)\setminus\{1,\infty\}$ にまで解析接続される（くわしくには [F1] をみられたし）。

④多価性：反復積分表示の中に現れる２つの微分形式 $\frac{dt}{t}$ と $\frac{dt}{1-t}$ は $t=0,1,\infty$ の３点で極を持っており、この３点のまわりを廻るとモノドロミーのずれが起こるので多重ポリログは多価関数なのである。

§1.2. ポリログのvariant

①定義：次の様なポリログのvariantがZagier [Z] 等により考察されている。

$$P_k(z) = \begin{cases} \mathrm{Re} & (k:\mathrm{odd}) \\ \mathrm{Im} & (k:\mathrm{even}) \end{cases} \sum_{a=0}^{k-1} \frac{B_a}{a!} \left(\log|z|^2\right)^a Li_{k-a}(z)$$

ここで B_a は Bernoulli数のこと $\frac{t}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}$

e.g. $P_1(z) = \mathrm{Re}\, Li_1(z) = -\log|1-z|$

$P_2(z) = \mathrm{Im}\, Li_2(z) - \log|z| \cdot \mathrm{Im}\, Li_1(z)$

☆ Zagier予想においてK群と密接に関わるポリログは $Li_k(z)$ でなくこちらの $P_k(z)$ の方である。

②単価性[Z]：$P_k(z)$ は monodromy-free である。即ち、単価関数である。Zagierの証明[Z]§7 は具体的な計算に基づいている。

③多重ポリログの単価なvariantを構成したというのが主結果§1.4③である。

§1.3. π_1 とフロベニウス

記号：$X = \mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$, $z \in X(\mathbb{C})$, $\vec{01}$: tangential base point ([De]§15.52)

④<u>多価性</u>：Colemanのp進積分論はp進ログ $\log:\mathbb{C}_p^\times\longrightarrow\mathbb{C}_p$ のブランチの取り方（即ち $p\in\mathbb{C}_p^\times$ で取る値）毎に依存している。それ故にColeman関数としてのp進多重ポリログもp進ログのブランチを決める毎に定まる。そういう意味で多価なのである（これもくわしくは[F1]）。

§2.2. p進ポリログのvariant

①<u>定義</u>：次の様なp進ポリログのvariantがColeman[C]により考察されている。

$$P_k(z)=\mathcal{L}i_k(z)-\frac{1}{p^k}\mathcal{L}i_k(z^p)$$
$$=\sum_{(n,p)=1}\frac{z^n}{n^k}$$

②<u>過収束性[C]</u>：巾級数 $P_k(z)$ は $]\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_p}[$ 上の0, 1, ∞に沿った過収束関数である。即ち、$P_k\in j^\dagger\mathcal{O}_{]\mathbb{P}^1[}(]\mathbb{P}^1[)$ （ここで $j:\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_p}\setminus\{0,1,\infty\}\hookrightarrow\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_p}$）。
Colemanの証明[C]§6は具体的な計算に基付いたものである。

③<u>p進多重ポリログの過収束なvariant</u>を構成したというのが主結果§2.4③である。

§2.3. π_1とフロベニウス

<u>記号</u>：$X=\mathbb{P}^1\setminus\{0,1,\infty\}\subset\overline{X}=\mathbb{P}^1$, $z\in X(\mathbb{Q}_p)$, $\vec{01}$: tangential base point ([De] §15.52)

ただし $z\in X(\mathbb{Q}_p)\subset\overline{X}(\mathbb{Q}_p)\simeq\overline{X}(\mathbb{Z}_p)$ の mod p した点 z_0 も $X(\mathbb{F}_p)$ に入っているとしておく。

① de Rham setting : • $\pi_1^{\mathrm{DR}}(X:\vec{01},z)$: 始点 $\vec{01}$ & 終点 z の unipotent de Rham fundamental torsor/$\mathbb{Q}$ ([De])

• $d_z \in \pi_1^{\mathrm{DR}}(X:\vec{01},z)$: the canonical trivializer ([De] §15.52)

② Betti setting : • $\pi_1^{\mathrm{Be}}(X(\mathbb{C}):\vec{01},z)$: 始点 $\vec{01}$ & 終点 z の unipotent Betti fundamental torsor/$\mathbb{Q}$

• 自然な射 $\pi_1^{\mathrm{top}}(X(\mathbb{C}):\vec{01},z) \longrightarrow \pi_1^{\mathrm{Be}}(X(\mathbb{C}):\vec{01},z)(\mathbb{Q})$ があり、$\vec{01}$ から z までの topological path b_z を1つ fix するとこの射より $\pi_1^{\mathrm{Be}}(X(\mathbb{C}):\vec{01},z)(\mathbb{Q})$ の元が決まる。このパスも b_z と記すことにする。

③ フロベニウス : 複素共役作用が定める $X(\mathbb{C})$ の involution により導かれる同型射

$$F_\infty : \pi_1^{\mathrm{Be}}(X(\mathbb{C}):\vec{01},z) \longrightarrow \pi_1^{\mathrm{Be}}(X(\mathbb{C}):\vec{01},\bar{z})$$

の逆写像を ϕ_∞ とかきフロベニウス射と呼ぶことにする。

④ 比較同型 : $\pi_1^{\mathrm{DR}}(X:\vec{01},z)(\mathbb{C}) \simeq \pi_1^{\mathrm{Be}}(X(\mathbb{C}):\vec{01},z)(\mathbb{C})$ と

$$\pi_1^{\mathrm{DR}}(X:\vec{01},\bar{z})(\mathbb{C}) \simeq \pi_1^{\mathrm{Be}}(X(\mathbb{C}):\vec{01},\bar{z})(\mathbb{C})$$

という Hodge 型の比較同型によりフロベニウス射を

$$\phi_\infty : \pi_1^{\mathrm{DR}}(X:\vec{01},\bar{z})(\mathbb{C}) \longrightarrow \pi_1^{\mathrm{DR}}(X:\vec{01},z)(\mathbb{C})$$

と思うことにする.

⑤ パス : これにより $\pi_1^{\mathrm{DR}}(X:\vec{01},z)(\mathbb{C})$ 内にパス $b_z, d_z, \phi_\infty(d_{\bar{z}})$ が定まる。

① de Rhaam setting：・ $\pi_1^{DR}(X:\vec{01}, z)$：始点 $\vec{01}$ & 終点 z の unipotent de Rham fundamental torsor/$\mathbb{Q}_p$

・ $d_z \in \pi_1^{DR}(X:\vec{01}, z)(\mathbb{Q}_p)$: the canonical trivializer ([De] §15.52)

② rigid setting：・ $\pi_1^{rig}(X_{\mathbb{F}_p}:\vec{01}, z_0)$：始点 $\vec{01}$ & 終点 z_0 の unipotent rigid fundamental torsor/$\mathbb{Q}_p$ (cf. [S] など)

・ $c_{z_0} \in \pi_1^{rig}(X_{\mathbb{F}_p}:\vec{01}, z_0)(\mathbb{Q}_p)$：下のフロベニウス射 ϕ_p で不変(即ち $\phi_p(c_{z_0}) = c_{z_0}$) な唯一のパス ([Be], [V])

③ フロベニウス：$X_{\mathbb{F}_p}$ のフロベニウス自己同型により導かれる同型射

$$F_p : \pi_1^{rig}(X_{\mathbb{F}_p}:\vec{01}, z_0) \longrightarrow \pi_1^{rig}(X_{\mathbb{F}_p}:\vec{01}, z_0)$$

の逆写像を ϕ_p とかきフロベニウス射と呼ぶことにする。

④ 比較同型：$\pi_1^{DR}(X:\vec{01}, z)(\mathbb{Q}_p) \simeq \pi_1^{rig}(X_{\mathbb{F}_p}:\vec{01}, z_0)(\mathbb{Q}_p)$ と

$$\pi_1^{DR}(X:\vec{01}, z^p)(\mathbb{Q}_p) \simeq \pi_1^{rig}(X_{\mathbb{F}_p}:\vec{01}, z_0)(\mathbb{Q}_p)$$

という Berthelot-Ogus 型の比較同型([CLS], [S]) によりフロベニウス射を

$$\phi_p : \pi_1^{DR}(X:\vec{01}, z^p)(\mathbb{Q}_p) \longrightarrow \pi_1^{DR}(X:\vec{01}, z)(\mathbb{Q}_p)$$

と思うことにする。

⑤ パス：これにより $\pi_1^{DR}(X:\vec{01}, z)(\mathbb{Q}_p)$ 内にパス c_{z_0}, d_z, $\phi_p(d_{z^p})$ が定まる。

右3

§1.4. 主結果([F2])

実はこの3つのパス b_z, d_z, $\phi_\infty(d_{\bar z}) \in \pi_1^{DR}(X:\vec{01},z)(\mathbb{C})$ は全部ことなっている。この3者について

『パス b_z と d_z とのズレにより多重ポリログが生じる。そしてパス $\phi_\infty(d_{\bar z})$ と d_z とのズレにより単価なポリログ(resp. 多重ポリログ)の variant が生じ(resp. 作れ)る。そしてこの二者間には相互関係が存する。』

というのが結果である。これを以下に説明する。

① パス b_z と d_z のズレ:

Th パス b_z で行きパス d_z で帰ることによりループ $d_z^{-1}b_z \in \pi_1^{DR}(X:\vec{01})(\mathbb{C})$ が得られるが、このループを巾級数化するとKZ方程式の基本解 $G_0(z)$ [Dr] になり各係数に多重ポリログが現れる:

$$\pi_1^{DR}(X:\vec{01})(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathbb{C}\langle\langle A,B\rangle\rangle$$

← $\mathbb{C}$係数2変数非可換形式的巾級数環へのうめこみ[F2]

$$d_z^{-1}b_z \longmapsto G_0(A,B)(z) = 1 + \cdots + (-1)\mathcal{L}i_k(z)A^{k-1}B + \cdots\cdots$$

$$\cdots + (-1)^m \mathcal{L}i_{k_1\cdots k_m}(z)A^{k_m-1}B\cdots A^{k_1-1}B + \cdots\cdots$$

※ 即ち Betti path b_z と de Rham path d_z のズレが多重ポリログ $\mathcal{L}i_{k_1\cdots k_m}(z)$ の淡中圏論的 origin なのである。

※※ この b_z の取り方に応じて $\mathcal{L}i_{k_1\cdots k_m}(z)$ の枝が決まるのである。

② パス $\phi_\infty(d_{\bar z})$ と d_z のズレ:

Th パス $\phi_\infty(d_{\bar z})$ で行きパス d_z で帰ることによりループ $d_z^{-1}\phi_\infty(d_{\bar z}) \in \pi_1^{DR}(X:\vec{01})(\mathbb{C})$ が得られるがこのループを巾級数化して log をとると§1.2.① のポリログの単価variant が現れる:

§2.4. 主結果([F2])

実はこの3つのパス C_{z_0}, d_z, $\phi_p(d_{zp})\in\pi_1^{DR}(X:\vec{01},z)(\mathbb{Q}_p)$ は全部ことなっている。この3者について

『パス C_{z_0} と d_z とのズレにより p進多重ポリログが生じる。
パス $\phi_p(d_{zp})$ と d_z とのズレにより過収束な p進ポリログ (resp. p進多重ポリログ) の variant が生じ (resp. 作れ) る。そしてこの二者間には相互関係が存する。』

というのが主結果である。これを以下に説明する。

① パス C_{z_0} と d_z のズレ:

Th パス C_{z_0} で行きパス d_z で帰ることによりループ $d_z^{-1}C_{z_0}\in\pi_1^{DR}(X:\vec{01})(\mathbb{Q}_p)$ が得られるが、このループを巾級数化すると p進KZ方程式の基本解 $G_0(z)$ [F1] になり各係数に p進多重ポリログが現れる:

$$\pi_1^{DR}(X:\vec{01})(\mathbb{Q}_p) \hookrightarrow \mathbb{Q}_p\langle\langle A,B\rangle\rangle$$

$$d_z^{-1}C_{z_0} \longmapsto G_0(A,B)(z) = 1+\cdots+(-1)\,Li_k(z)\,A^{k-1}B+\cdots$$

$$\cdots+(-1)^m Li_{k_1\cdots k_m}(z)\,A^{k_m-1}B\cdots A^{k_1-1}B+\cdots$$

※即ち rigid path C_{z_0} と de Rham path d_z のズレが p進多重ポリログ $Li_{k_1\cdots k_m}(z)$ の淡中圏論的 origin なのである。

② パス $\phi_p(d_{zp})$ と d_z のズレ:

Th パス $\phi_p(d_{zp})$ で行きパス d_z で帰ることによりループ $d_z^{-1}\phi_p(d_{zp})\in\pi_1^{DR}(X:\vec{01})(\mathbb{Q}_p)$ が得られるがこのループを巾級数化して log をとると §2.2.① の p進ポリログの過収束 variant が現れる:

$$\pi_1^{DR}(X:\vec{01})(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathbb{C}\langle\langle A,B\rangle\rangle$$
$$d_z^{-1}\phi_\infty(d_{\bar z}) \longmapsto \exp(\cdots\cdots + (-1)P_k(z)A^{k-1}B + \cdots\cdots).$$
これを $G_0^-(z)$ とおく

☆即ちパス $\phi_\infty(d_{\bar z})$ とパス d_z のズレが単価なポリログ $P_k(z)$ の淡中圏論的 origin なのである。

③多重ポリログの variant：①に合わせて多重ポリログの variant $l_{k_1\cdots k_m}(z)$ $(k_i\in\mathbb{N})$ を以下で定義する。

dfn $G_0^-(z) = 1 + \cdots\cdots + (-1)^m l_{k_1\cdots k_m}(z) A^{k_m-1}B\cdots A^{k_1-1}B + \cdots\cdots$

④単価性：

Th この多重ポリログの variant $l_{k_1\cdots k_m}(z)$ は単価である。

これの淡中圏論的 origin が $d_z^{-1}\phi_\infty(d_{\bar z})$ であることを用いて示される。

⑤相互関係：多重ポリログの母組数 $G_0(z)$ と単価多重ポリログの母組数 $G_0^-(z)$ との間には次の関係が成り立つ。

Th $G_0^-(z) = G_0(A,B)(z)\cdot G_0(-A, \Phi_{KZ}(A,B)^{-1}(-B)\cdot\Phi_{KZ}(A,B))(\bar z)^{-1}$

- ここで $\Phi_{KZ}(A,B)$ とは Drinfel'd associator $\Phi_{KZ}(A,B)$ [Dr] の'− part' [F2].
- 上は $d_z^{-1}\phi_\infty(d_{\bar z}) = d_z^{-1}b_z\cdot\phi_\infty(d_{\bar z}^{-1}\bar b_z)^{-1}$ であることより従う。
- この公式により次の単価多重ポリログの多重ポリログによる表示が得られる。

例・ $l_k(z) = Li_k(z) - \sum_{a=0}^{k-1}(-1)^{k-a}\frac{(\log z-(-1)\log\bar z)^a}{a!}Li_{k-a}(\bar z)$

- $l_{k_1k_2}(z) = Li_{k_1k_2}(z) - \sum_{r=0}^{k_1-1}(-1)^{k_1-r}Li_{k_1-r}(\bar z)\sum_{s=0}^{r}(-1)^s\binom{k_2-1+s}{s}\frac{(\log z-(-1)\log\bar z)^{r-s}}{(r-s)!}$
$$\left\{Li_{k_2+s}(z) - \sum_{w=0}^{k_2+s-1}\frac{(\log z-(-1)\log\bar z)^w}{w!}(-1)^{k_2+s-w}Li_{k_2+s-w}(\bar z)\right\}$$

左5

これはプラス+でなくてダガー†です

これを $G_0^\dagger(z)$ とおく

$$\boxed{\begin{array}{l} \pi_1^{DR}(X:\vec{01})(\mathbb{Q}_p) \hookrightarrow \mathbb{Q}_p\langle\langle A,B\rangle\rangle \\ d_z^{-1}\phi_p(d_{z^p}) \longmapsto \exp(\cdots\cdots+(-1)P_k(z)A^{k-1}B+\cdots). \ \divideontimes \end{array}}$$

$\divideontimes$ 即ち パス $\phi_p(d_{z^p})$ とパス d_z のズレが過収束な p 進ポリログ $P_k(z)$ の淡中圏論的 origin なのである。

③ p 進多重ポリログの variant：①に合わせて p 進多重ポリログの variant $\ell_{k_1\cdots k_m}(z)$ $(k_i\in\mathbb{N})$ を以下で定義する。

dfn $G_0^\dagger(z) = 1+\cdots+(-1)^m\ell_{k_1\cdots k_m}(z)A^{k_m-1}B\cdots A^{k_1-1}B+\cdots\cdots$

④ 過収束性：

Th この p 進多重ポリログの variant $\ell_{k_1\cdots k_m}(z)$ は過収束である。
即ち、$\ell_{k_1\cdots k_m}(z)\in j^\dagger\mathcal{O}_{]\mathbb{P}^1[}(]\mathbb{P}^1[)$.

これの淡中圏論的 origin が $d_z^{-1}\phi_p(d_{z^p})$ であることを用いて示される。

⑤ 相互関係：p 進多重ポリログの母級数 $G_0(z)$ と過収束 p 進多重ポリログの母級数 $G_0^\dagger(z)$ との間には次の関係が成り立つ。

Th $G_0^\dagger(z) = G_0(A,B)(z)\cdot G_0\left(\frac{A}{p}, \Phi^p_{De}(A,B)^{-1}\cdot\left(\frac{B}{p}\right)\cdot\Phi^p_{De}(A,B)\right)(z^p)^{-1}$

- ここで $\Phi^p_{De}(A,B)$ とは p-adic 'Deligne' associator という非可換巾級数であり、これは Deligne 流の p 進多重ゼータ値の母級数である（くわしくは[F2],[Y]）.
- 上は $d_z^{-1}\phi_p(d_{z^p}) = d_z^{-1}C_{z_0}\cdot\phi_p(d_{z^p}^{-1}C_{z_0})^{-1}$ であることより従う。
- この公式により次の過収束 p 進多重ポリログの p 進多重ポリログによる表示が得られる。

例・$\ell_k(z) = Li_k(z) - \sum_{c=0}^{k-1}\left(\frac{1}{p}\right)^{k-c}\frac{(\log^a z-\frac{1}{p}\log^a z^p)^c}{c!}Li_{k-c}(z^p) = P_k(z)$

・$\ell_{k_1,k_2}(z) = Li_{k_1,k_2}(z) - \sum_{r=0}^{k_1-1}\left(\frac{1}{p}\right)^{k_1-r}Li_{k_1-r}(z^p)\sum_{s=0}^{r}(-1)^s\binom{k_2-1+s}{s}\frac{(\log^a z-\frac{1}{p}\log^a z^p)^{r-s}}{(r-s)!}$
$\left\{Li_{k_2+s}(z) - \sum_{\omega=0}^{k_2+s-1}\frac{(\log^a z-\frac{1}{p}\log^a z^p)^{\omega}}{\omega!}\left(\frac{1}{p}\right)^{k_2+s-\omega}Li_{k_2+s-\omega}(z^p)\right\}$

右5

$$-\sum_{u=0}^{k_2-1}\frac{(\log z-(-1)\log\bar{z})^u}{u!}\Big\{(-1)^{k_1+k_2-u}\mathcal{L}i_{k_1,k_2-u}(\bar{z})+\left(1-(-1)^{k_1}\right)\cdot\zeta(k_1)\cdot(-1)^{k_2-u}\mathcal{L}i_{k_2-u}(\bar{z})$$
$$+(-1)^{k_1}\sum_{v=0}^{k_2-u-1}\binom{k_1+v-1}{k_1-1}\cdot\left(1-(-1)^{k_1+v}\right)\cdot\zeta(k_1+v)(-1)^{k_2-u-v}\mathcal{L}i_{k_2-u-v}(\bar{z})\Big\}$$

⑥微分方程式：KZ方程式「 $dG=\left(\frac{A}{z}+\frac{B}{z-1}\right)G(z)\,dz$ 」

は正則関数係数の巾級数 $\mathcal{O}^{hol}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}\setminus\{0,1,\infty\}}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}\setminus\{0,1,\infty\})\langle\langle A,B\rangle\rangle$ 内では非自明な解を持ち得ないが、普遍被覆上の正則関数係数の巾級数 $\mathcal{O}^{hol}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}\setminus\{0,1,\infty\}}(\widetilde{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}\setminus\{0,1,\infty\}})\langle\langle A,B\rangle\rangle$ 内に広げると非自明な解を持ち得る。

$G_0(A,B)(z)$ はその1つである。

そして次の様に補正項を付け加えると

「 $dG=\left(\frac{A}{z}+\frac{B}{z-1}\right)\cdot G(z)dz-G(z)\left(\frac{d\bar{z}}{\bar{z}}(-A)+\frac{d\bar{z}}{\bar{z}-1}\Phi^{-}_{KZ}(A,B)^{-1}(-B)\Phi^{-}_{KZ}(A,B)\right)$ 」

これは滑らかな実関数係数の巾級数 $C^{\infty}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}\setminus\{0,1,\infty\})\langle\langle A,B\rangle\rangle$ 内で非自明な解を持ち得る。$G_0^{-}(z)$ はその1つである

左6

$$-\sum_{u=0}^{k_2-1}\frac{\left(\log^a z-\left(\frac{1}{p}\right)\log^a z^p\right)^u}{u!}\left\{\left(\frac{1}{p}\right)^{k_1+k_2-u}\mathcal{L}i_{k_1,k_2-u}(z^p)+\left(1-\left(\frac{1}{p}\right)^{k_1}\right)\cdot\zeta_p(k_1)\cdot\left(\frac{1}{p}\right)^{k_2-u}\mathcal{L}i_{k_2-u}(z^p)\right.$$
$$\left.+(-1)^{k_1}\sum_{v=0}^{k_2-u-1}\binom{k_1+v-1}{k_1-1}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{p}\right)^{k_1+v}\right)\cdot\zeta_p(k_1+v)\cdot\left(\frac{1}{p}\right)^{k_2-u-v}\cdot\mathcal{L}i_{k_2-u-v}(z^p)\right\}$$

※$\mathbb{C}$の世界における多価な多重ポリログを単価にする左の式で-1を$\frac{1}{p}$にzをz^pに置き換えるとp進の世界における多価な(Coleman関数である)p進多重ポリログを過収束にする上の式になるのである。

⑥微分方程式：p進KZ方程式『$dG=\left(\frac{A}{z}+\frac{B}{z-1}\right)G(z)\,dz$』は過収束関数の巾級数$j^{\dagger}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}\langle\langle A,B\rangle\rangle$内では非自明な解を持ち得ないが、Coleman関数係数の巾級数$A_{Col}(\mathbb{P}^1\setminus\{0,1,\infty\})\langle\langle A,B\rangle\rangle$内に広げると非自明な解を持ち得る。$G_0(A,B)(z)$はその1つである。

しかし次の様に補正項を付け加えると

『$dG=\left(\frac{A}{z}+\frac{B}{z-1}\right)G(z)\,dz-G(z)\left(\frac{dz^p}{z^p}\frac{A}{p}+\frac{dz^p}{z^p-1}\Phi_{KZ}^{p}(A,B)^{-1}\frac{B}{p}\Phi_{KZ}^{p}(A,B)\right)$』

これは$j^{\dagger}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})\langle\langle A,B\rangle\rangle$内で非自明な解を持ち得る。$G_0^{\dagger}(z)$はその1つである。この$p$進微分方程式はG. Yamashita[Y]と見つけたこと、及び[C] VIに現れている式はこの微分方程式の meta-abel商(modulo Bの次数≧2)であることもコメントしておく。

謝辞 幾度も有益なコメントをして下さった山下剛(東大数理)さんとこの原稿を注意深く読んで下さった板倉兼介(東大数理)さんにとても感謝致します。米国で日本語用の原稿用紙が見つからず困っていた私にこの原稿用紙を送って下さった玉川安騎男(京大数理研)先生にも感謝します。

右6

参考文献

[Be] Besser, A. ; Coleman integration using the Tannakian formalism, Math Annalen 322 (2002), 1, pp19-48.

[C] Coleman, R. ; Dilogarithms, regulators and p-adic L-functions, Inv Math 69 (1982), no.2, pp171-208.

[CLS] Chiarellotto, B. and Le Stum, B. ; F-isocrystaux unipotents, Compositio Math 116, (1999), no 1, pp81-110.

[De] Deligne, P. ; Le groupe fondamentaux de la droite projective moins trois points, Galois group over $\mathbb{Q}$, MSRI Publ-Springer (1989), pp79-297.

[Dr] Drinfel'd, V. G. ; On quasitriangular quasi-Hopf algebra and a group closely connected with $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, Leningrad Math J.2. (1991), no.4. pp 829-860.

[F1] Furusho, H. ; p-adic multiple zeta values I —— p-adic multiple polylogarithms and the p-adic KZ equation, Inv Math, Vol 155, no.2(2004) pp 253-286.

[F2] ———— ; p-adic multiple zeta values II, in preparation

[S] Shiho, A. ; Crystalline fundamental groups II, Log convergent cohomology and rigid cohomology, J. Math. Sci. Univ. Tokyo. 9. (2002). no.1, pp1-163.

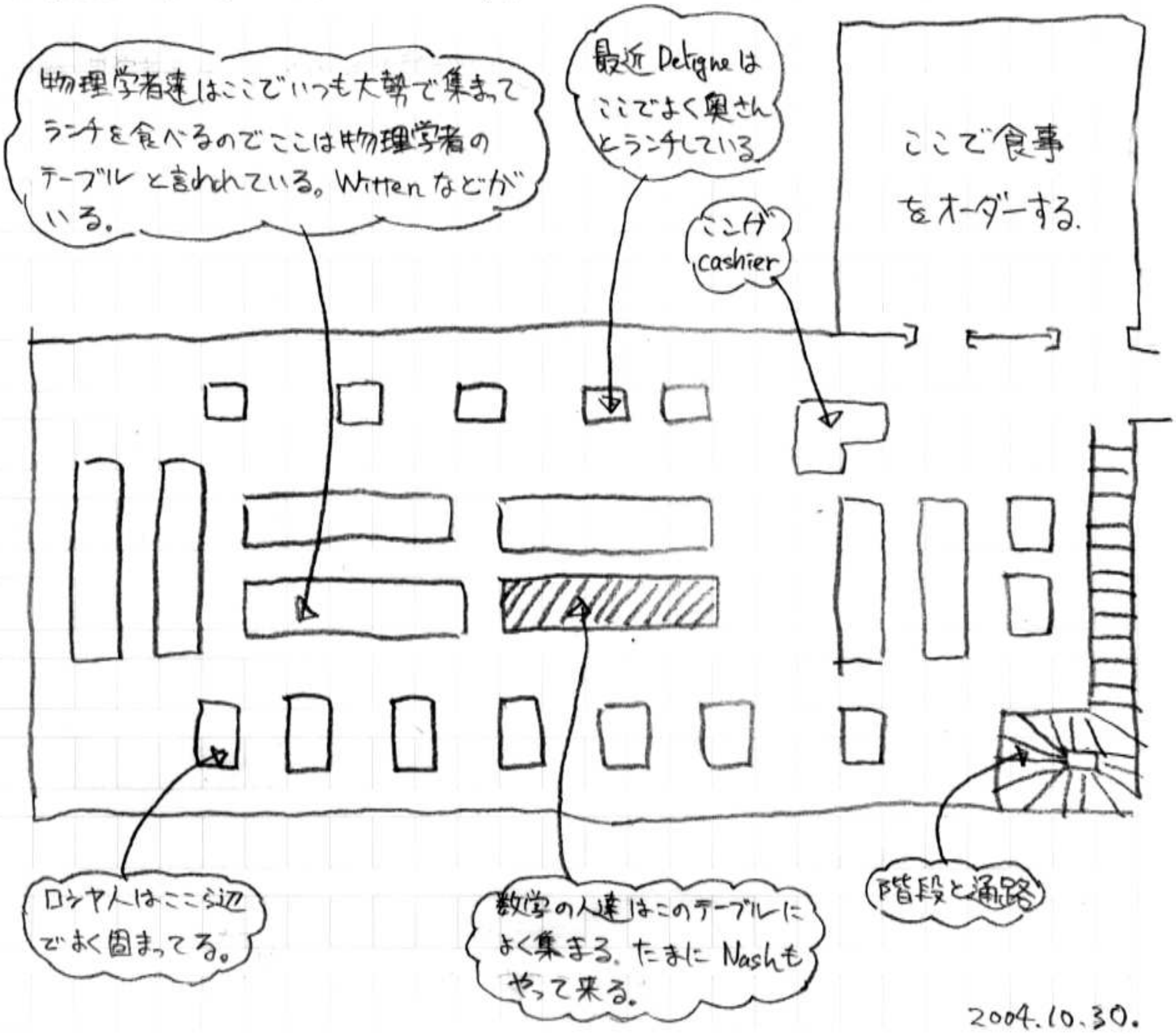
[V] Vologodsky, V. ; Hodge structure on the fundamental group and its application to p-adic integration, Mosc. Math J.3.

(2003), no 1, pp 205–247.

[Y] Yamashita, G. ; Bounds for the dimensions of p-adic multiple L-value spaces, preprint (2004).

[Z] Zagier, D. ; Polylogarithms, Dedekind zeta functions and the algebraic K-theory of fields, Arithmetic algebraic geometry (Texel 1989) Progr Math 89 (1991), Birkhäuser, pp 391–430.

余白があるので今私がいるプリンストンの高等研究所IASの食堂の様子を報告します。



2004.10.30.