2次元コンパクト可換群の有限被覆の分類への p-進整数の応用

江田　勝哉

もともとの問題は「連結な Base space Y の任意の有限被覆の連結な Total space X が Y と同相であるとき、この性質は逆極限で保たれるか?」というものでした。例えば、円周やトーラスの任意の有限被覆の Total space はそれぞれ円周、トーラスと同相です。概念が正確に伝わるよう、いちおう基礎概念の説明をします。位相空間 X, Y について $p : X \to Y$ が被覆写像とは、p が局所同相写像であることをいいます。このとき、Y を base space、 X を total space といいます。有限被覆とは、$p^{-1}(\{y\})$ がすべての $y \in Y$ について有限であることです。一番よく知られている $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ は無限被覆となります。円周の逆極限はソレノイドと呼ばれており、ソレノイドの有限被覆の連結な Total space は、やはり、その空間と同相になることが知られています。

この問題は私が考え始めたのではなく、また、私に直接にもたらされたわけでもありません。2002 年の 6 月に松江で行われたトポロジーの集会の際、Sibe Mardesić さんが 2×2-整数行列で表される準同型写像による順極限群に関することを自分の女子学生がやっているから、相談にのってくれ、ということを私にいったのです。その年の 9 月にクロアチアの Dubrovnik (日本では「魔女の宅急便」の舞台がここと首都 Zagreb の混合というので知られています) での集会で、その女子学生と会うことになったわけです。9 月になり Dubrovnik に参りました。集会には女子学生が何人かいて、どの人かな? と思っていると、Mardesić さんが紹介してくれたのは、その女子学生のグループの一人ではなく、背の高いご婦人で、Split 大学の先生である Vlasta Matijević さんでした。いや、失礼いたしました、当方が勝手に妙な期待をしていたってことですか、しかし Mardesić さん、私の学生って現在形でおっしゃいましたよねぇー、などと思ってしまいました。この事情はあとでわかりました、毎年 Split 大学で夏休みには Mardesić さんのセミナーがあって、そのメンバーは Vlasta さんが博士課程の学生だったときと、ほぼ同じなんだそうです。まあ、それで現在形だったんですね。

ともかく、そのときから共同研究が始まったわけです。(これからの話しの内容は文末にある Vlasta さんとの共著論文にまとめてあります。) 日時を追って書くのでなく、数学的に整理したものを書きます。この話題はポントリャギンの連続群論の話題で、私が 4 年生のとき勉強したものが沢山現れ、昔の本を取りだしてはとても懐かしい思いをしながら考えることができました。

1. 連結コンパクト群の被覆

もとの問題は被覆空間の問題ですから、Base space が群の構造をもっているとき、Total space が群構造をもつか? またその被覆写像が準同型写像であるか? また被覆写像の同値性に関する同相写像は同相同型写像としてとれるか? といった問題を解決しないと、色々な問題を代数的な問題に帰着できません。この章ではこの帰着の部分を述べます。

補題 1.1. (連続群論 (下) 定理 *79*) 弧状連結空間 X から弧状連結、局所連結な位相群 G への被覆写像 p が与えられているとする。このとき、X の上に乗法を、X が位相群で p が準同型写像となるように定義できる。

この結果を連結な位相群 G の場合に拡張できるのだろうか? というのも面白い問題ですが、今のところ反例の候補も、といって証明も浮かばない状態です。この結果の弱い形がコンパクト群に対して成立します。

定理 1.2. 連結空間 X から連結コンパクト群 G への有限被覆写像 p が与えられているとする。このとき、X の上に乗法を、X がコンパクト群で p が準同型写像 となるように定義できる。さらに、G がアーベル群ならば、X もアーベル群となる。

定理 1.3. 連結コンパクト群 G, X, X' についてへの有限被覆準同型写像 $p : X \to G$ と $p' : X' \to G$ が与えられているとする。このとき、p と p' が被覆写像として同値ならば、p と p' は被覆準同型写像として同値である。つまり、同相同型写像 $i : X \to X'$ があって $p = p' \circ i$ が成立する。

この証明はよく知られた事実「連結コンパクト群が Lie 群の逆極限である」及び、その証明と Shape 理論で開発された技術の合わせ技で証明します。つまり連結コンパクト Lie 群に対して成立していることを、Shape 理論の典型的なやり方で連結コンパクト Lie 群の direct system に対して成立するようにすることにより、逆極限での成立を示すという筋です。

この章の結果を、後の章で使いやすいようにまとめておきます。連結空間からコンパクト空間への有限被覆写像があれば、その Total space もコンパクトです。ですから、

> 連結コンパクト群 G の連結空間からの有限被覆写像の同値関係についての分類は、コンパクト群からの有限被覆準同型写像の同相同型写像による同値関係についての分類に帰着する。

2. ポントリャギン双対

有名なポントリャギン双対定理の簡単な説明と、この話しで使う基本事項の説明をします。前の章は連続群論下の話題でしたが、この章は連続群論上の話題です。

$\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{T}$ を位相群と見なします。つまり、複素数の絶対値 1 の数のなす乗法群です。位相可換群 G に対して、$\widehat{G} = G^{\wedge}$ を G から $\mathbb{T}$ への連続準同型写像全体のなす位相群とします。その位相はコンパクト開位相とします。また連続準同型写像 $h : G_0 \to G_1$ について連続準同型写像 $\widehat{h} : \widehat{G_1} \to \widehat{G_0}$ が伴います。このとき「局所コンパクト可換群 G は自然な写像で $G^{\wedge\wedge}$ と同型である」というのがポントリャギン双対定理です。とくに、G がコンパクト可換群であれば $\widehat{G}$ は離散可換群で、G が離散可換群であれば $\widehat{G}$ はコンパクト可換群となり、この 2 つのカテゴリーの同値が成立します。コンパクト可換群と離散可換群の間の関係でこの話で使うところを表にします。もちろん、その意味は双対写像$^{\wedge}$で写りあっているということです。

対応表

コンパクト	n-次元	連結	全射	$\lvert \mathrm{Ker}(h) \rvert = s$
離散	ランク n	Tosionfree	単射	$\mathrm{Im}(\widehat{h})$: s-index

いま X, Y を 2 次元コンパクト連結可換群とし、$h : X \to Y$ を s-重被覆準同型写像とすれば、いま $\widehat{X}, \widehat{Y}$ はランク 2 の torsiofree な可換群で、$\widehat{h} : \widehat{X} \to \widehat{Y}$ 単射で $\mathrm{Im}(\widehat{h})$ は $\widehat{Y}$ のインデックス s の部分群となる。ポントリャギン双対定理からこの逆も成り立ちます。

さて、これで 2 次元コンパクト連結可換群の有限被覆写像の分類問題がランク 2 の torsionfree 可換群の有限インデックスの super-group の分類問題となることはわかります。もとの問題を考えると、もうひとつ押えておかないといけない事実があります。

それは、2 次元コンパクト連結可換群 G, X, X' について $p : X \to G$, $p' : X' \to G$ が有限被覆準同型写像であるとき X と X' が同相かという問題です。1 章における設定で非可換の場合を考えるとまだわかっていない問題にはいってしまいます。しかし、この場合は次の Steenrod の定理があるので簡単に切りぬけられます。

命題 2.1. (*N. Steenrod*) G がコンパクト連結可換群であるとき、チェックコホモロジー群 $\check{H}^1(G)$ は $\widehat{G}$ と同型である。

これによって、位相群の同相性の問題は双対離散群の同型性に帰着され、すべての問題がランク 2 の Torsionfree 離散可換群 の問題に帰着します。

3. 有限ランクの Torsionfree 可換群

いままでの述べてきたことによって、ランク 2 の Torsionfree 可換群について十分にわかれば、2 次元コンパクト可換群の有限被覆の分類、あるいは、同相性は決定できるということになります。ランク 2 の Torsionfree 可換群とは $\mathbb{Q}^2$ の部分群のことです。これは十分簡単であろうというのが、普通思うことなのですが、これは歴史がありましてなかなか簡単ではないのです。1950 年ころからアーベル群論の研究者の間でずっと研究されてきて色々な結果があります。この数年に大きな伸展がありました。それは記述集合論 (数学基礎論に属する分野) で起こりました。大雑把にいいますとランク 2 以上の Torsionfree 可換群には構造定理はないということです。

この結果はこの有限被覆の話と直接関係はないのですが、後の結果の意味つけとなるのと、私が記述集合論をある程度勉強したことがあるということもあって紹介したいと思います。

ランク 1 の場合、つまり $\mathbb{Q}$ の部分群ですが、このときは次の Type という概念で分類できます。この結果は R. Baer によるものです。

アーベル群 A の要素 a について k_n は a が素数 p_n で何回割れるか調べその最大数を k_n とします。何回でも割れれば、∞ とします。

$C_A(a) = (k_1, \cdots, k_n, \cdots)$ とし、これを a の character と呼びます。

character $(j_1, \cdots, j_n, \cdots), (k_1, \cdots, k_n, \cdots)$ について $\Sigma_{n=1}^{\infty} |j_n - k_n| < \infty$ であるとき 2 つの character を同値といい、この同値類を Type といいます。$\mathbb{Q}$ の部分群 A の要素の character はすべて同値となるため、A について 1 つの Type が対応しますが、Type が等しいと同型であることも容易にいえます。有限インデックスのランク 1 の supergroup も subgroup も同じ Type をもちますので同型となります。有限被覆の話との関係では、これから、Total space は base space と同相になることが結論されます。さてランクが 2 以上の場合も、この Type の組み合わせで分類しようとする試みがなされました。Torsionfree 可換群に関して I. Kaplansky が何十年か前に、

> In this curious world what conceivably happens will happen.

といっています。記述集合論の結果はこの感覚のある側面に対する数学的表現かもしれません。記述集合論のボレル同値関係に関する研究は 1990 年頃から始まっており、2003 年に G. Hjorth と A. Kechris がこの研究で Association of Symbolic Logic の Carol Karp 賞を受賞しています。この賞は 5 年に一度授賞されるもので、1993 年、1998 年に E.Hrushovski が受賞しています。E.Hrushovski は Modell-Lang Conjecture の関係で受賞しているので、この賞をご存じの方もいられるかもしれません。

一般的な設定として、可分完備距離空間 X 上の同値関係 E を考えます。とくに E が $X \times X$ のボレル部分集合となっているときを扱い

ます。また、$\{y \in X : yEx\}$ がすべて可算のとき、E を可算ボレル同値関係と呼びます。例えば、有理数体上の n-次元ベクトル空間 $\mathbb{Q}^n$ の部分空間の全体を X とします。$\mathbb{Q}^n$ の部分集合の全体はカントール空間と見なせ、X はその閉部分空間ですから可分完備距離空間となります。同値関係 E は n-正則行列 (これは可算個をしかない) によって写りあうという関係なので可算ボレル関係となります。

X 上の同値関係 E、Y 上の同値関係 F があるとき $E \leq_B F$ とはボレル関数 $f : X \to Y$ があって $x_0Ex_1 \leftrightarrow f(x_0)Ff(x_1)$ が成立することをいいます。ボレル集合を基本として考える範囲で、E の方が F より簡単な関係となっているということです。

可算ボレル関係のうち、異なるものは異なるという関係より $\leq_B$ で小さくなるものを tame あるいは smooth といいます。簡単な構造定理のある構造に関する同型関係は tame になります。tame でないものについて $E \leq_B F \& F \leq_B E$ という双方向ボレル還元可能関係が研究対象です。$\leq_B$ で一番大きいものは存在し、例えば、2 次の自由群の部分集合全体をカントール集合とみなし、自由群の要素の積の全単射で写るものを同値とする同値関係などが、最大のものとなります。これを E_∞ で表します。また、E_0 を差が有理数となる実数を同値とする関係としますと、これは tame でないものの中で最小になります。

先ほど述べた、$\mathbb{Q}$ の部分群の全体の同型に関する同値関係は、E_0 と双方向ボレル還元可能関係があります。ランク n 以下の Torsionfree 可換群の同型に関する同値関係を F_n で表せば $E_0 \leq_B F_1 \& F_1 \leq_B E_0$ です。明らかに $F_n \leq_B F_{n+1}$ が成立しています。

Torsionfree 可換群に関するめざましい最初の結果は 1998 年の Hjorth の結果で、$E_0 <_B F_3$ です。その後、Kechris が $E_0 <_B F_2$ を示しました。そのときも F_2 と E_∞ が双方向ボレル還元可能関係にあるだろうと予想されていたようです。しかし Thomas が $F_n <_B F_{n+1}$ $(n \geq 1)$ を証明したのです。詳しいことは、参考文献の Jackson-Kechris-Louveau と Thomas の論文をお読みください。私もそう詳しいわけではありません。すでに知られている分類といえるものは、E_0 以下であるわけですから F_2 も分類といえるようなものがないだろうといってよいか、と思います。

4. ランク 2 の Torsionfree 可換群の有限インデックスの supergroups と subgroups

ここでの目的は与えられたランク 2 の Torsionfree 可換群の有限インデックスの supergroups の分類をすることです。似たやり方で有限インデックスの subgroups の分類もできるので平行して述べます。但し、群 A の 2 つの supergroups B, B' が同値とは、A の要素を固定した B, B' 間の同型写像があることとします。

まずランク 2 の Torsionfree 可換群 A をランク 2 の自由可換群の順極限として表します。同型写像で繰り返し書き変えていくことによって、次のような表示が得られます。

$A = \varinjlim(A_n, f_n : n < \omega)$

但し A_n は 2 次の自由可換群のコピー、$f_n = \begin{bmatrix} p_n & 0 \\ \alpha_n & t_n \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$ で $p_n, t_n > 0$, $0 \leq \alpha_n < p_n$。

いま B が A の s-インデックスの Torsionfree supergroup とする。このとき、ある n_0 があり、

次を満たす $g_n = \begin{bmatrix} p'_n & 0 \\ \beta_n & t'_n \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$ と $h_n = \begin{bmatrix} q_n & 0 \\ c_n & r_n \end{bmatrix}$ $(n \geq n_0)$ が存在する：

(1) $p'_n, t'_n, q_n, r_n > 0$ で $0 \leq c_n < q_n$;
(2) 順極限 $\varinjlim(B_n, g_n : n < \omega)$ は B と同型で、B_n は $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ のコピー;
(3) ダイアグラム

$$\begin{array}{ccc} B_n & \xrightarrow{g_n} & B_{n+1} \\ h_n \uparrow & & \uparrow h_{n+1} \\ A_n & \xrightarrow[f_n]{} & A_{n+1} \end{array}$$

は可換で $\mathrm{Im}(g_n) + \mathrm{Im}(h_{n+1}) = B_{n+1}$ でかつ $\mathrm{Im}(g_n) \cap \mathrm{Im}(h_{n+1}) = \mathrm{Im}(h_{n+1} \cdot f_n) = \mathrm{Im}(g_n \cdot h_n)$;
(4) $B/A \simeq B_n / \mathrm{Im}(h_n)$ $(n \geq n_0)$.

この条件から直接条件を書き出すよりも、この $\mathbb{Z}$-双対をとった方が条件を書き出しやすいという事情があります。また脱線なのですが、ここで使う事実がそれほど知られていないようなのと、演習問題として手ごろだと思われるので書いておきます。

> A_1, A_2, B_1 が有限生成の自由可換群 B_2 の有限インデックスの部分群とし、$A_1 = A_2 \cap B_1, B_2 = A_2 + B_1$ が成立しているとする。このとき A の $\mathbb{Z}$-双対を A^* と記すと $A_1^* = A_2^* + B_1^*, B_2^* = A_2^* \cap B_1^*$ が成立する。

この事実は色々な人に訊いたのですが、知っている人がいないのです。もともと、Vlasta さんがコンパクトアーベル群に関する可換図式を示したもののポントリャギン双対となっています。ともかく、次を得ます。$d = GCD(p_n, q_n), p_n = p^* d, q_n = q^* d$ とすると $GCD(t_n, r_n) = GCD(p_n, q_n, c_n t_n - r_n \alpha_n) = 1$, $q_n = q_{n+1} d$, $r_n d = r_{n+1}$, $q^* = q_{n+1}$ が成り立つ。

これにより十分大きな n に対して $q_n = q$, $r_n = r$, $GCD(p_n, q) = GCD(t_n, r) = 1$ で $g_n = \begin{bmatrix} p_n & (p_n c_{n+1} + \alpha_n r - c_n t_n) q^{-1} \\ 0 & t_n \end{bmatrix}$ となります。

同様のことが、A の s-インデックスの部分群についても成立するので次の定義をします。

定義 4.1. 列 $\mathbf{c}_{qr}$ が *super-admissible* であるとは、

- $\mathbf{c}_{qr} : [n_0, \omega) \to \{0, 1, \cdots, q-1\}$ $(n_0 < \omega)$;
- $p_n \mathbf{c}_{qr}(n+1) \equiv t_n \mathbf{c}_{qr}(n) - r\alpha_n \pmod{q}$。

$\mathbf{c}_{qr}$ が *sub-admissible* とは

- $\mathbf{c}_{qr} : [n_0, \omega) \to \{0, 1, \cdots, r-1\}$ $(n_0 < \omega)$;
- $p_n \mathbf{c}_{qr}(n+1) \equiv t_n \mathbf{c}_{qr}(n) + q\alpha_n \pmod{r}$.

2 つの *super-admissible* な列 $\mathbf{c}_{qr}$ が $\mathbf{c}'_{q'r'}$ 同値とは*, if* $q = q'$, $r = r'$ *and* $\mathbf{c}_{qr}(n) = \mathbf{c}'_{q'r'}(n)$ が十分大きな n について成立すること。また *sub-admissible* な列の同値性も同様に定義する。

定理 4.2. ランク *2* の *Torsionfree* 可換群 A の s-インデックス *super-groups* の同値類は上記のような表記のもとで、$qr = s$ である q, r に対応する *super-admissible* 列 $\mathbf{c}_{qr}$ によって分類される。同様に、s-インデックス *subgroups* は *sub-admissible* 列 $\mathbf{c}_{qr}$ によって分類される。

もとの問題にもどると A と 列 $\mathbf{c}_{qr}$ で決まる群が同型か? ということになります。ここから以後、話しを、$p_n = p$, $t_n = 1$ (p は素数) の場合に限ります、つまり、$f_n = \begin{bmatrix} p & 0 \\ \alpha_n & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$ の場合です。一般に $\alpha_n \in \mathbb{Z}$ として $A_\alpha = \varinjlim(A_n, f_n : n < \omega)$ とおくと群 A_α は p-進整数 $\Sigma_{n=0}^{\infty} \alpha_n p^n$ に対して決まっていることがわかり、p-進整数 α に対して $\mathbb{Q}(p^\infty) \oplus \mathbb{Q}(p^\infty)$ の部分群 A_α が定義されていることになります。このことは、順極限 $(A_n, f_n : n < \omega)$ と p-進整数の桁上りが丁度うまくあっていることによるわけです。

補題 4.3. (*Goodearl-Rushing* [15]) A_α と A_β が同型ならば、$a\alpha - b\alpha\beta + c - d\beta = 0$, $ad - bc = \pm p^n$ $(n \in \mathbb{Z})$ となる $a, b, c, d \in \mathbb{Z}[1/p]$ が存在する。

$q > 1$ が p と互いに素とする。このとき、$0 \le s < q$ に対して super-admissible 列 $\mathbf{c}_{qq}$ で $\mathbf{c}_{qq}(0) = s$ となるものに対して、$\mathbf{g}_{qq}(n) = (p\mathbf{c}_{qq}(n+1) + \alpha_n q - \mathbf{c}_{qq}(n))q^{-1}$ であり $\Sigma_{n=0} \mathbf{g}_{qq}(n)p^n = \alpha - sq^{-1}$ となる。これを β_s とする。同様に $0 \le s < q$ に対して sub-admissible 列 $\mathbf{c}_{qq}$ で $\mathbf{c}_{qq}(0) = s$ となるものに対して、$\mathbf{e}_{qq}(n) = (-p\mathbf{c}_{qq}(n+1) + \alpha_n q + \mathbf{c}_{qq}(n))q^{-1}$ であり $\Sigma_{n=0} \mathbf{g}_{qq}(n)p^n = \alpha + sq^{-1}$ となる。これを γ_s とする。

また super-admissible 列 $\mathbf{c}_{1q^2}$ に対して $\mathbf{g}_{1q^2}(n) = p\mathbf{c}_{1q^2}(n+1) + \alpha_n q^2 - \mathbf{c}_{1q^2}(n)$ であり $\Sigma_{n=0} \mathbf{g}_{1q^2}(n)p^n = \alpha q^2$ となる。これを β_* とする。sub-admissible 列 $\mathbf{c}_{q^21}$ に対して $\mathbf{e}_{q^21}(n) = (-p\mathbf{c}_{q^21}(n+1) + \alpha_n q + \mathbf{c}_{q^21}(n))q^{-1}$ であり $\Sigma_{n=0} \mathbf{e}_{qq}(n)p^n = \alpha q^2 = \beta_*$ となる。

つまり、A_{β_s} と A_{β^*} は A_α の s-インデックス super-group と同型であり、A_{γ_s} と A_{β^*} は A_α の s-インデックス subgroup と同型になります。

定理 4.4. α が $\mathbb{Q}$ 上 *2* 次式の根とならないとき、A_{β_s} $(0 \leq s < q)$ および A_{β^*} はすべて非同型である。同様に A_{γ_s} $(0 \leq s < q)$ および A_{β^*} はすべて非同型である。

この証明は補題 4.3 から導かれます。

これで、最初の問題の反例は簡単につくれているわけですが、このことは私が気がついたことではありません。私は次の特別な α_0 に着目していました。

$\alpha_0(3^k) = 1$ $(k < \omega)$ でその他の i については $\alpha_0(i) = 0$ というものです。この α_0 に対して p-進整数の桁上りを細かく調べて定理 4.4 を証明していました。「α が $\mathbb{Q}$ 上 2 次式の根とならないとき」という性質は、お友達である早稲田大学の小松啓一さんに示唆されたものです。それでは、この特別な α は 2 次式の根とならないということはどう示すかということになります。実はこれは超越数になります。これも、お友達の名古屋大学の安本雅洋さんに教えてもらいました。超越数の判定条件で有名な Roth の不等式というのがあります。この条件に、この特別の α はぴったり嵌まる形をしています (ということを教わったわけです)。ですから、証明が簡単になったわけですが、それでは私の p-進整数の桁上りを調べた努力はどうなるのか? なんだったのか?ということになります。それでもうすこし、その寝技の方向で調べた結果が以下のものです。

一般に A_α はどの s に対しても s-インデックスの supergroup で A_α と同型のものがあります。例えば定理 4.4 の場合、A_{β_0} です。

定理 4.5. 各々の自然数 s について、 A_{α_0} の同値でない s-インデックス *supergroups* は同型でない、また A_{α_0} の s-インデックス *subgroups* は同型でない。

証明は上に述べているように p-進整数の桁上りを調べることによるので、とくに代数的な手法があるわけでなく面倒なので詳しい説明は省きますが、何故 $\alpha_0(3^k) = 1$ $(k < \omega)$ でその他の i については $\alpha_0(i) = 0$ となる α_0 を選んだのかというもありますし、私の一番時間をかけたところなので多少説明します。(そここそが他人の聞きたくないところということはよくあることなわけですが。)

super-admissible 列も sub-admissible 列も規則性をもって定義されているので、与えられた α がある長い区間で周期的ならば、それから定義される、$\mathbf{g}_{qr}$ および $\mathbf{e}_{qr}$ はほぼその区間で周期になる。補題 4.3 の同型の判定法で同型ならば、$a\alpha - b\alpha\beta + c - d\beta = 0$, $ad - bc = \pm p^n$ $(n \in \mathbb{Z})$ となる $a, b, c, d \in \mathbb{Z}[1/p]$ が存在するわけであるが、$b \neq 0$ でこの式が成り立つことを考えると次のことが予想されます。α, β が a, b, c, d に対して十分大きい桁数で、十分長い区間周期性をもてば、ほぼその区間で $a\alpha + c - d\beta$ も周期性をもつ。一方、α, β が α_0 とほぼ同じ周期性をもてば、2×3^k- 桁の付近で周期性が崩れるはずです。この 2 つのことから、$b = 0$ がいえるということです。実は、あとは簡単だろうと

思っていたのですが、$b = 0$ のとき $a\alpha + c - d\beta = 0$, $ad = \pm p^n$ から矛盾を出すほうが苦労しました。大雑把にいえば、a, d が p のべき乗なので、a, d をかけることは桁をずらすことなり、それを使って証明するだけなのですが。

A_α というのはランク 2 の Torsionfree 可換群のうち、かなり制限されたものともいえますが、3 章の結果から全体の分類がうまくいきそうもない状況で、ある程度手の動くところではあるので、研究対象をここにしぼって考えるのも面白いかな?と思っています。とくに、補題 4.3 の逆はいえるのか? ということがわかりません。このくらいわからないといけないと思うのですが。

また、細かい問題ですが、p-進整数 α が 2 次式の解の場合でも A_α が有限インデックスの supergroup で A_α と非同型のものが存在する可能性もあります。有限ランクの Torsionfree 可換群の研究は色々な方向から既にされておりわかっていることもかなりあるようなのですが、上記のように構造定理があるわけでないので研究の方向が異なるとわからないことが色々あるようです。被覆空間からの話題とのつながりで研究するのも面白いかもしれないと思っています。

References

[1] S. R. Adams and A. S. Kechris, *Linear algebraic groups and Borel equivalence relations*, J. Amer. Math. Soc. **13** (2000), 909–943.

[2] R. Baer, *Abelian groups without elements of finite order*, Duke Math. Jour. **3** (1937), 68–122.

[3] L. Harrington, A. S. Kechris and A. Louveau, *A Glinmm-Effros dichotomy for Borel equivalence relations*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 903–927.

[4] G. Hjorth, *Around nonclassifications of torsion-free abelian groups*, in Abelian groups and modules, (Dublin, 1998), Trends Math., Birkhäuser, Basel, 1999, 269–292.

[5] G. Hjorth and A. S. Kechris, *Borel equivalence relations and classification of countable models*, Ann. Pure Appl. Logic **82** (1996), 221–272.

[6] S. Jackson, A. S. Kechris and A. Louveau, *Countable Borel equivalence relations*, J. Math. Logic **2** (2002), 1–80.

[7] A. S. Kechris, *Amenable versus hyperfinite Borel equivalence relations*, J. Symbolic Logic **58** (1993), 894–907.

[8] A. S. Kechris, *Classical Desriptive Set Theory*, Graduate Text in Mathematics **156**, Springer-Verlag, 1995.

[9] A. S. Kechris, *On classification problem for rank 2 torsion-free abelian groups*, J. London Math. Soc. **62** (2000), 437–450.

[10] V. Matijević, *Classifying finite-sheeted coverings of paracompact spaces*, Revista Mate. Comp. **16** (2003), 1–17.

[11] K. Eda, J. Mandić, and V. Matijević, *Torus-like continua which are not self-covering spaces*, to appear.

[12] K. Eda and V. Matijević, *Finite sheeted covering maps over 2-dimensional compact abelian groups*, preprint.

[13] K. Eda and V. Matijević, *Finite-index supergroups and subgroups of torsionfree abelian groups of rank two*, preprint.
[14] L. Fuchs, *Infinite abelian groups, vol. 1,2*, Academic Press, 1970,1973.
[15] K.R. Goodearl and T.B. Rushing, *Direct limit groups and the keesling-mardešić shape fibration*, Pacific J. Math. **86** (1980), 471–476.
[16] J. Keesling and S. Mardešić, *A shape fibration with fibers of different shape*, Pacific J. Math. **84** (1979), 319–331.
[17] S. Thomas, *The classification problem for torsion-free abelian groups of finite rank*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2002), 233–258.

早稲田大学理工学部、東京都新宿区大久保 169-8555