

書 評

議席配分の数理 —選挙制度に潜む 200 年の数学—

一森哲男 著, 近代科学社, 2018 年

埼玉大学大学院理工学研究科
海老原 円

1 1票の格差の問題

いわゆる「1票の格差」の問題が取り沙汰されて久しい。選挙区に割り当てられる議席数は、可能な限り選挙人口に比例すべきである。選挙区を作り直す、ということも1つの方策であるが、それには限界がある。当たり前のことであるが、議席数は整数であるので、人口に比例するように議席数を正確に割り振ることは、原理的に不可能である。

では、どのように考えたらよいのか？ 本書はこの問題を数理的に論じている。

2 アメリカの議席配分の歴史から

本書はまず、アメリカの連邦内の各州に議席を配分する方式の歴史をたどりつつ、さまざまな配分方式を紹介する。

いま、連邦内の州の集合を $S = \{1, 2, \dots, s\}$ とし、州 i の人口を p_i とする。なるべく公平に議席を分配するために、ある $\lambda > 0$ を定め、おおむね λ 人の人口に対して 1 議席を与えることを考える。本書ではこの λ を除数とよぶ。このとき、州 i に与えられる議席数を a_i とすると、 a_i は $\frac{p_i}{\lambda}$ に近い整数であることが望ましい。

整数 a_i を定めるにあたっては、たとえば、次の 4 つの方式が考えられる。

- ジェファソン方式： $\frac{p_i}{\lambda}$ の小数部分を切り捨てた整数を a_i と定める方式。
- アダムズ方式： $\frac{p_i}{\lambda}$ の小数部分を切り上げた整数を a_i と定める方式。
- ウェブスター方式： $\frac{p_i}{\lambda}$ を四捨五入して得られる整数を a_i と定める方式。
- ヒル方式： $n < \frac{p_i}{\lambda} < n + 1$ であるとき、 $\frac{p_i}{\lambda}$ が $\sqrt{n(n+1)}$ より小さければ $a_i = n$ とし、 $\sqrt{n(n+1)}$ より大きければ $a_i = n + 1$ と定める方式。

ただし、これらの方式において、 $0 < \frac{p_i}{\lambda} < 1$ の場合は、 $a_i = 1$ と定める。

これら4つの方式は、「自然数 n の近くのどのような区間に属する数をほぼ n と等しいとみなすか」を定める。いわば、数のまるめ方を指定する方式であり、一般に、このような方式を本書では除数方式とよんでいる。

一方、除数方式とは異なる方式として、最大剰余方式というものが紹介される。詳細は省略するが、この方式は次のようなパラドックス（奇妙な現象）を生むことが示される。

- アラバマ・パラドックス：議席総数が増やされたとき、ある州 i に配分される議席数 a_i が逆に減少してしまう現象。
- 新州加入パラドックス：新しい州が加入し、応分の議席数をその州に与えて、全体の議席数を増やしたとき、ある州 i の議席数 a_i が減少してしまう現象。
- 人口パラドックス：州の人口が変化したとき、人口の減った州 i の議席数 a_i が増加し、人口の増えた州 j の議席数 a_j が減少してしまう現象。

3 ベストな配分方式の模索

上述のような「パラドックス」が生じてしまうような配分方式は望ましくない、と本書は主張する。そして、妥当な配分方式であれば当然満たすべき性質をいくつか仮定すると、そのような配分方式は除数方式に限られることを示す。

ちなみに、除数方式は、原理的には、最初に除数 λ を定めてから議席数を決定する。議席総数が最初に定められているときに、それに対して、適切な λ の値をどのように定めればよいか、という問題にも本書は言及している。

さて、次に本書では、特に前述のウェブスター方式とヒル方式の優劣をめぐる論争がアメリカで続いたことを述べている。それぞれの方式の支持者たちの主張を解説したのち、本書はエントロピーという概念を情報理論から借用する。

人口 p_i の州 i に a_i 議席が割り振られているとき、州 i の住人1票の価値は $\frac{a_i}{p_i}$ である。もし、各州に対して人口に完全に比例した議席配分がなされているならば、 $\frac{a_i}{p_i}$ ($1 \leq i \leq s$) はすべて等しい。議席配分が理想的な値からはずれれば、これらの値はばらつく。大まかにいえば、この値のばらつき具合を表す指標がエントロピーである。詳細は省略するが、エントロピーが大きければ大きいほど、1票の価値のばらつき具合が小さくなるように設計されている。ただし、ここでのエントロピーはただ1つのものではなく、正の実数 θ をパラメータにもつエントロピーの族が本書では定義される。

各 θ に対して、その θ に対応するエントロピーを最大にする配分方式、すなわち、そのエントロピーの意味で、1票の価値の格差を最大限に均等化する配分方式が定まる。

一方、1票の価値の逆数 $\frac{p_i}{a_i}$ のばらつき具合に関しても、正の実数 ω をパラメータにもつエントロピーの族を考えることができ、それぞれのエントロピーを最大にする配分方式が定まる。

問題は、 $\frac{a_i}{p_i}$ に着目したエントロピーを最大にする配分方式は、必ずしも、 $\frac{p_i}{a_i}$ に着目したエントロピーを最大にするとは限らないということである。このような考察から、ウェブスター方式もヒル方式も妥当な配分方式とはいえない、と本書は断ずる。

ところが、ある特定の θ の値（実際には $\theta = \frac{1}{2}$ である）に着目して、その θ に対応するエントロピーの意味で、 $\frac{a_i}{p_i}$ の格差を均等化する配分方式を考えると、その配分方式は、ある特定の ω の値（実際には $\omega = \frac{1}{2}$ である）に対応するエントロピーの意味で、 $\frac{p_i}{a_i}$ の格差を均等化する。この方式は、結果的には、ウェブスター方式とヒル方式を「足して2で割った」方式であるので、これを中庸方式とよび、この配分方式こそが、ベストの配分方式である、と本書は主張する。

最後に、わが国ではアダムズ方式を用いて衆議院の議席配分がなされていることが紹介され、この方式の問題点や、「1票の格差」を議論するときの注意点にも言及がある。

4 「数」と「数字」のはざままで

本書はいわゆる数学書とは異なるスタイルで書かれている。いわゆる数学書と本書がどのように違うのか、少し考えてみたい。

本書には、アメリカの州人口や議席数などの例がふんだんに散りばめられている。これらの例は、実例であること、すなわち、事実に基づいた数値であることに価値を求めていると思われる。

一方、いわゆる数学書において「例」を提示する目的は、多くの場合、そこで述べられた命題や定理の意味の理解を補助することにある。その場合、その例によって、議論の本質が明確になることが望ましい。したがって、数学書における「例」は、一定の目的に沿って、人為的に創作されたものであることが多い。本書にみられるアメリカの実例とは、その点が決定的に異なる。

本書のようなテーマの議論が説得力をもつためには、数学的な論理が正しいことは当然のこととして、それにも増して、数学の枠組みに持ち込むまでのモデル化や、出てきた結論の意味付けが妥当であることが必要であろう。そこで、事実に基づく数値の実例は、モデル化や意味付けの妥当性を後押しするエビデンスとして機能する。

実社会においては、数字がものをいうことがある。ここでいう「数字」は、正確には「数値」というべきであるが、それはともかくとして、実社会にコミットするための理論武装は、必然的に「数字にものをいわせる」ことを1つの武器として携える。そういうわけで、本書にある「中庸方式」なる議席の配分方式が本当にすぐれたものであることを主張するためには、事実に基づく数値の提示がどうしても必要であったと思われる。

一方、いわゆる数学書においては、「数字」よりも「数」を重視する。たとえば、「偶数と奇数の和は奇数であることを証明せよ」という問題に対して

$$2 + 3 = 5, \quad 6 + 9 = 15, \quad 100 + 391 = 491, \dots$$

などという「数字の羅列」は、まったく説得力をもたない。もっとも、実社会においては、精緻な論理による「証明」は時として嫌われ、「理屈をこねていないで、数字を見せろ」などという乱暴な反応を招くことがある。このように、「数字」への過度な信頼は思考の停止を誘発する危険をはらんでいるのであるが、そのことはこれ以上語るまい。

「数」か「数字」か…？ 論者がどちらを重視するかは、それぞれの立場にもよるであろうし、背景にある文化の性質とも関連するであろう。

1票の格差の問題という、実社会の政治的課題に数理の力で切り込もうとする本書は、「数」と「数字」のはざまに論理の羽根を広げている。