授賞報告
2019年度日本数学会代数学賞

2019年度日本数学会代数学賞は，小林真一氏（九州大学大学院数理学研究院），髙木俊輔氏（東京大学大学院数理科学研究科）が授賞されました．

小林真一氏「楕円曲線の岩澤理論の研究」

岩澤理論は, 素数 p を固定して, 代数体の整数環のイデアル類群やさまざまな数論的コホモロジー群などの様子を p 進的な族として研究する理論である. また, ゼータ関数・L 関数のような解析関数の p 進世界での実現である p 進 L 関数の研究, さらには数論的対象物と解析的対象物との間の関係 (岩澤主予想という名前で普通は定式化されます) を研究する理論である. 岩澤健吉によって 1950 年代後半に, 代数体の $\mathbb{Z}_p$ 拡大の中間体におけるイデアル類群の様子が統一的に記述されたのが, 岩澤理論の始まりである. そのときに鍵となったのは, Γ を代数体の $\mathbb{Z}_p$ 拡大の Galois 群 (したがって Γ は p 進整数環 $\mathbb{Z}_p$ に同型), $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ を Γ の完備群環とするときに, 代数体の $\mathbb{Z}_p$ 拡大上の最大不分岐 Abel pro-p 拡大の Galois 群が有限生成ねじれ Λ 加群となることであり, また久保田–Leopoldt の p 進 L 関数が $\mathbb{Z}_p$ 上 1 変数形式冪級数を使って表せる “岩澤関数” となる, ということだった. このとき, 岩澤主予想は, 岩澤加群の特性イデアルが p 進 L 関数で生成されるという形で定式化される. その後, B. Mazur によって 1970 年代に, 岩澤理論は楕円曲線の数論にも適用できることが示され, 現在にまで続くその後の大発展の基礎が築かれた. Mazur が着目したのは, 有理数体上に定義された楕円曲線 E に対して, E が p で良い通常還元を持つとき, (Mazur によって予想され, 1990 年代に加藤和也によって証明されたように) 円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大上の Selmer 群 (の Pontryagin 双対) は有限生成ねじれ Λ 加群であり, E の p 進 L 関数は岩澤関数となることだった. このことによって岩澤健吉のアイディアが適用でき, 岩澤理論が Birch Swinnerton-Dyer 予想を始めとする楕円曲線の数論に大きく貢献することができるようになった. E の導手を割らない素数は, 通常還元であるか超特異還元であるかのどちらかである. 通常還元の場合と異なり, 超特異還元のときには Selmer 群はねじれ加群とはならず, また p 進 L 関数も岩澤関数にならない. そこで岩澤理論が満足のいく形で定式化できるのは, 21 世紀に入るまでは, 通常還元の場合だけだった. この状況が変わるのは, 小林真一氏の研究が現れてからである. ここでは, 小林氏の 3 つの大きな仕事に関して述べるが, いずれも超特異還元を持つ楕円曲線の岩澤理論に関する非常に重要な結果である.

小林氏は, まず円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大に対して, 楕円曲線が p で超特異還元を持つとき, 新しい局所条件を導入することにより, 2 つのプラス・マイナス Selmer 群という新しい Selmer 群を導入し, それらが有限生成ねじれ Λ 加群となることを証明した. そして, 小林氏の研究の直前に発表されていた R. Pollack のプラス・マイナス p 進 L 関数という岩澤関数を用いて, 岩澤主予想を, イデアル類群に対する古典的岩澤主予想と同じ形で定式化することに成功した. こうして, 長い間よくわからないとされてきた, 超特異還元を持つ素数に対

する岩澤理論の基礎が築かれた. 実際, この小林氏の定式化は, その後のこの理論の方向を決定づけるきわめて重要な仕事であり, 現在までに発表された超特異還元の岩澤理論に関する論文は, ほとんどすべて小林氏の論文を引用している. 最近の X. Wan の研究により, この予想はかなりの場合に証明できるようになった. また最近, 小林氏のプラス・マイナス Selmer 群の類似が虚 2 次体上やさまざまな方面で研究され, 大きく発展しているが, このような活発な研究すべての基礎に小林氏の研究があることが, 現在から見ると, はっきりわかる.

次に小林氏が得た重要な結果は, 超特異還元を持つ素数に対する p 進 Gross Zagier 公式である. 複素 L 関数に対しては, L 関数が $s=1$ で零点を持つときに, その $s=1$ での微分の値を Heegner 点の高さを用いて表す公式が, Gross と Zagier によって証明され, Gross Zagier 公式と呼ばれる. p 進 L 関数に対する Gross Zagier 公式の類似は, Heegner 点の p 進高さを用いた公式で, p が通常還元素数の場合に, Perrin-Riou によって得られた. しかしながら, 超特異還元素数 p に対する p 進 Gross Zagier 公式は, 様相が通常還元のときと大きく異なり, 多くの研究者が挑戦していたが, 成功には至らなかった. 小林氏は, ある種の 2 変数 p 進 L 関数を導入するなど, 新しいアイディアを用いて, 楕円曲線が p で超特異還元を持つときにも p 進 Gross Zagier 公式を証明することに成功した. このような重要な公式は, きわめて多くの応用を持つが, 特筆すべき最初の応用は, Birch Swinnerton-Dyer 予想への応用である. Birch Swinnerton-Dyer 予想は L 関数の $s=1$ での零点の位数が Mordell Weil 群の階数に等しいという位数についての予想に加えて, $s=1$ での Taylor 展開の先頭項が数論的な量で記述されることを予想する. 後者については, 位数が 0 のときは, 各素数成分のごとに岩澤主予想が役に立つが, 位数が 1 のときは岩澤主予想に加えて Gross Zagier 公式が必要になる. 小林氏は自身の p 進 Gross Zagier 公式を用いて, 複素 L 関数が $s=1$ で位数 1 の零点を持つときに, 先頭項に関する Birch Swinnerton-Dyer 予想を, (いくつかの条件の下に) 導手を割る素数成分を除いて証明するという大きな成果をあげた.

最後に, 小林氏は最近, 一般 Heegner サイクルを用いた反円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大上の保型形式の岩澤理論において, 大変すぐれた仕事をされている. 特に, 一般 Heegner サイクルがなすノルム関係式は, 通常還元でない場合は扱いが難しく, 今まで分母を許さざるを得なかったが, 小林氏は Perrin-Riou twist の理論という新しい理論を構成して, 分母の出ない整的な理論を構成している. この理論も応用範囲が広く, これからさまざまな発展が期待できる理論である.

以上述べてきたように, 小林真一氏は, 超特異還元を持つ素数に関する岩澤理論において, 突破口を切り開き, 新理論の基礎となる重要な結果を数多く得てきた. 小林氏の研究は, 世界的に有名で, 高く評価されており, 代数学賞を受賞するに, まことにふさわしい研究である.

髙木俊輔氏「標数 0 の特異点と F 特異点」

髙木氏は主に F 特異点について研究している．フロベニウス写像を用いて定義される正標数の特異点を総称して F 特異点という．F 正則特異点，F 純特異点，F 有理特異点，F 単射特異点などが F 特異点の重要なクラスであり，その起源は 1970 年代後半の可換環論に遡る．

F 特異点の研究に関しては, 渡辺敬一氏による F 有理特異点の発見 (R. Fedder との共同研究) とその後の一連の研究, 渡辺氏と原伸生氏による標数 0 の対数的端末特異点と F 正則特異点の対応, K. Smith と原氏による標数 0 の有理特異点と F 有理特異点の対応の証明など, 日本人が大きく貢献している．

このように F 特異点は標数 p への還元を通して, 標数 0 の特異点と関係があることが知られていたが, 髙木氏はこの方向で顕著な業績を挙げている．双有理幾何学では，多様体のみを考えるのではなく，対象を多様体 X とその上の $\mathbb{Q}$ 因子 (素因子の有理係数形式和) Δ の対 (X, Δ) へと拡げることが重要であるが, 髙木氏は Smith, 原による結果の対ヴァージョンとして, 対 (X, Δ) が川又対数的端末対 (resp. 純対数的端末対) であることと, 十分大きい素数 p について標数 p への還元 (X_p, Δ_p) が F 正則対 (resp. 純 F 正則対) であることの同値性を証明した．より強く，非川又対数的端末点集合を定義するイデアルである乗数イデアルと非 F 正則点集合を定義するイデアルである判定イデアルの対応を証明した．

同様の特異点の対応の問題は, 対数的標準特異点と F 純特異点との間にもあるが, こちらは現在も未解決である．x を X の閉点とする．渡辺敬一氏は，標数 0 の $\mathbb{Q}$-Gorenstein 正規特異点 (X, x) が対数的標準特異点であることと, 無限個の p について (X, x) の標数 p への還元 (X_p, x_p) が F 純特異点であることが同値であると予想した．髙木氏は Mustaţă–Srinivas によって導入された弱通常性予想が正しければ，渡辺の予想も正しいことを証明した．弱通常性予想とは, V を標数 0 の代数閉体上定義された n 次元非特異射影代数多様体とし, V_p を V の標数 p への還元としたとき, $H^n(V_p, \mathcal{O}_{V_p})$ へのフロベニウスの作用が全単射になるような素数 p は無限個存在するという予想である．また藤野修氏との共同研究において，Birkar–Cascini–Hacon–M^{c}Kernan による極小モデル理論の進展と Ogus による曲面の通常素数 (ordinary prime) の密度に関する議論を用いることにより，（弱通常性予想を仮定せずに）3 次元以下の孤立特異点について渡辺の予想が正しいことを証明した．

また, こうした特異点の対応の問題の大域ヴァージョンとして, 髙木氏は対数的ファノ多様体及び対数的カラビ・ヤウ多様体のフロベニウス写像を用いた特徴付けについても研究していて，成果を挙げている．アフィン錐が F 純特異点 (resp. F 正則特異点) しか持たないような射影多様体を大域的 F 分裂多様体 (resp. 大域的 F 正則多様体) という．X を標数 0 の射影多様体としたとき，Schwede–Smith は, 十分大きい p について標数 p への還元 X_p が大域的 F 正則多様体ならば, X は対数的ファノ多様体であり, 無限個の p について X_p が大域的 F 分裂多様体ならば, X は対数的カラビ・ヤウ多様体であると予想した．髙木氏はこの Schwede–Smith の予想の解決に向けて肯定的な結果を出している．

実際，權業善範氏らとの共同研究において, (i) X が森夢空間と呼ばれる極小モデル理論がうまく機能する多様体の場合. (ii) X が 2 次元の場合, の 2 つの場合に Schwede–Smith の予想が正しいことを証明した．さらに (i) の結果を用いて，標数 0 の対数的ファノ多様体を Cox 環の特異点の言葉で特徴付けることにも成功した．この Cox 環に関する結果は現在では純代数幾何学的な別証明が知られているものの, このような双有理幾何学の深い結果が正標数の手法を用いて得られたことは, F 特異点論を用いた双有理幾何学へのアプローチの有効性を示していると言えるだろう.

Deligne–Illusie の小平の消滅定理の別証明に見られるように, ホッジ理論とフロベニウス写像を用いた正標数の技巧の間には密接な関係があるが, 高木氏はこの方面でも業績を挙げている．Du Bois 特異点は Steenbrink によって導入された, ホッジ理論的な標数 0 の特異点であるが, Schwede は標数 0 の特異点 (X, x) が Du Bois 特異点であることと, 無限個の素数 p について (X, x) の標数 p への還元 (X_p, x_p) が F 単射特異点であることは同値であると予想した．この予想は現在のところ 2 次元の場合すら未解決であるが, 高木氏は Bhatt–Schwede との共同研究において, Schwede の予想は上で述べた弱通常性予想と同値であることを証明した．また, 高木氏は Srinivas との共同研究において F ベキ零特異点を定義し, 十分大きい p についてベキ零特異点であることをホッジ理論的に特徴付けた．Kollár は小平の消滅定理の拡張として, 非特異複素射影多様体上の半豊富直線束に関する単射性定理を証明したが, 高木氏は權業氏との共同研究において, (正標数の) 大域的 F 正則多様体上でも Kollár の単射性定理が成り立つことを示した.

高木氏はその他, 正標数の双有理幾何学に現れる特異点の研究, 代数幾何学的手法の可換環論への応用の方面においても顕著な業績を挙げている.

以上のように高木氏は代数多様体の特異点論と可換環論において顕著な業績を多数挙げておられ, 代数学賞に大変相応しいものである.

（代数学賞委員会委員長　吉岡康太　神戸大学大学院理学研究科）