砂田利一氏の平成 30 年度文部科学大臣表彰 科学技術賞受賞に寄せて

東北大学大学院理学研究科／材料科学高等研究所
小谷　元子

砂田先生，文部科学大臣表彰 科学技術賞受賞おめでとうございます.「離散幾何解析学の構築と応用の研究」に関する研究業績での受賞ということ，その創成期から離散幾何解析学の構築のお手伝いをさせていただいた者として感慨深いです.

砂田利一氏は，これ以前にも 1988 年に日本数学会彌永賞，2013 年に同出版賞，2017 年に藤原洋数理科学賞を受賞され，純粋数学から応用数学までの幅広い研究活動とそれを社会へ伝える執筆活動を通じて, 数学の深化と発展に貢献されてきた.

筆者が砂田氏と初めて会ったのは大学 4 年生のとき，当時指導教員であった落合卓四郎氏の開催した研究会の実質的なとりまとめを砂田氏がされており, 学生として初めて参加する研究会なるものにワクワクしたのと同時に, 一番後ろの席に座ってほとんどすべての講演に質問される砂田氏に感銘を受けたことをよく覚えている.

§１　幾何学における数論的方法

砂田氏の研究は幾何解析学，スペクトル幾何学，力学系，数理物理，確率論，結晶の数学的理論，離散的代数幾何学，離散幾何解析学，量子ウォークなど驚異的に広範な領域に渡るが，その背景には，幾何学に数論的な構造を持ち込むこと，さらにはその根底にご本人の著書[2]のタイトルでもある「基本群とラプラシアン」の関係を理解するという興味が流れているように思う. [2]のなかで, 砂田氏は代数体のガロア拡大の幾何学的類似としてコンパクト・リーマン多様体の正規リーマン被覆を考えることを提案している．ただし，ヒルベルトが考えたような，点を素イデアルの類似とするのではなく，素な閉測地線を素イデアルの類似と考えるのである．ラプラシアンは幾何計量の非常に多くの情報をもっているが，特に，大域的な幾何学をなんらかの周期性に注目して考えてこられたのではないだろうか.

1-1　砂田トリプル

砂田氏の初期の重要な仕事は，M.Kac による有名な「太鼓の形は聞き分けられるか？」（Amer. Math. Monthly, 73(1966),1-23）で表現される等スペクトル問題

に対する反例の構成であろう[14]．音から形を特定できるかという問題を数学的に言い直すと，「ラプラシアンの固有値が同じである二つのリーマン多様体は等長であるか」という等スペクトル問題になる．いわゆる逆問題の一つである．最初の反例は 1964 年に J.Milnor により 16 次元の平坦トーラスとして構成されたが，それ以降も活発に研究されている．砂田氏は単に反例を構成したというだけではない．高木貞治の類体論の幾何学的類似とは何かを構想し，今では「砂田トリプル」という名称で世界的に知られている反例をシステマティックかつエレガントに構成する手法を構築し, 等スペクトルペアの生まれる機構を明らかにした. 砂田氏は 1987 年に日本数学会彌永賞を「数論的方法によるリーマン多様体の研究」を受賞している．

1-2　素閉測地線定理

整数論のもっとも基本的な興味の対象は素数であり, 素数の分布に関するすべての情報を持つ Riemann のゼータ関数，またその一般化である Dedekind ゼータ関数により素イデアルの分布に関して調べることができる．一方，幾何学におけるもっとも基本的な興味の対象は測地線である．1950 年代に Serberg は上述のように素イデアルの幾何学的類似は素な閉測地線であるという考えのもと Selberg ゼータ関数および Selberg 跡公式を導入した.

上記の砂田トリプルはスペクトル・ゼータ関数がラプラシアンのスペクトルに関する不変量であることに注目した産物であり，コンパクト・リーマン多様体の被覆多様体となっている族のなかで等スペクトルであるが等長でないためのクライテリアを定めたのであるが，これをさらに，測地線の分布の研究へと広げていった.

素数の分布の漸近挙動は素数定理という形で古くは Euler, Gauss などに端を発して調べられているが，Selberg はその幾何類似として，負の定曲率を持つコンパクト・リーマン面の素な閉測地線の長さの分布を考える素閉測地線定理として定式化し，その後，Margulis, Parry-Pollicott 等により一般化された．さらにグラフ理論では基本的なサブジェクトである伊原ゼータ函数は，もともと数論的な動機で 1966 に導入されたが, 1985 年に砂田氏は Serre の示唆に従ってこれをグラフ理論の言葉で定式化し幾何学的意味付けを明確にした.

砂田氏は，素数定理の精密化にあたる Dirichlet の算術級数定理に対応する幾何学的類似物を，コンパクト負曲率多様体に対して考察した．閉測地線の自由ホモトピー類と基本群の共役類が対応することに注目し, 基本群の商群である有限生成離

散群Γの共役類，例えばホモロジー類などに，属する素な閉測地線の長さ分布に関する密度定理を定式化した．Γが有限群の場合に，足立−砂田[5]，Parry−Pollicotが，無限アーベル群に対して勝田−砂田[7]，R. Phillips and P. Sarnak などによってなされ，その後多くの一般化が行われている．また，閉測地線とは測地流の閉軌道であることに注目すると，双曲面さらには負曲率多様体の測地流，その一般化概念であるアノソフ流の周期軌道の数え上げなど, 力学系へと氏の興味は自然に広がったようである[8].

量子エルゴード性の研究などもその流れのなかにある.

詳細および文献に関しては，砂田氏還暦記念の研究集会のプロシーディング，およびその中の勝田−Sy による砂田氏の研究業績概要[1]を参照されたい.

§２　離散幾何解析学と結晶格子の研究

幾何解析学とはリーマン多様体など幾何学的な対象の上での解析学, もしくは解析的手法を使った幾何学を研究する領域である．この離散類似として，離散的な対象，たとえばグラフ等の上での幾何解析を行う研究として「離散幾何解析学」という名称が 20 世紀末ごろに砂田氏により提唱された.

2-1 ランダム・ウォークの長時間挙動

集中講義にいらした砂田氏より，結晶格子のランダム・ウォークに関する問題を聞いたのが，筆者が離散幾何解析に関わるようになったきっかけである．リーマン多様体のラプラシアンの発展方程式は熱方程式と呼ばれ，熱の拡散を記述する．物質の上での熱の拡散はその物質の形状による．特に被覆多様体の場合には，被覆変換群との関係を調べることができる．これの離散化に当たるのが，グラフ上のランダム・ウォークである．ランダム・ウォークの長時間挙動，特に，古典的な中心極限定理は，適切なスケール変換により，正方格子上のランダム・ウォークが 2 次元ユークリッド空間のブラウン運動に収束することを主張する. より一般の周期グラフについて同様の収束定理とその幾何学的意味を明らかにする共同研究が開始し，結晶格子の局所中心極限定理，推移確率の漸近展開，大偏差など様々な結果が得られた[9][11][13]．特に，結晶格子の調和写像から決まる「標準的実現」が主要な役割を果たすことに気が付いたとき[10]は大変にうれしかった．その後，アーベル被覆を冪零被覆（石渡聡）や，より一般の被覆の場合への拡張（田中亮吉)，離散ラプラシアンの代わりに磁場付きシュレーディンガー作用素への拡張（小谷)，多粒

子系への拡張（田中）など様々に発展した．

砂田氏は，またランダム・ウォークの量子版であり，Ambainis−Kempe−Rivosh（Proc. 16th ACM-SIAM SODA, 2005） によってグローバーの検索アルゴリズムの改良に使用されて有名になった量子ウォークに対しても，一般の結晶格子上の量子ウォークを定式化し，さらに楯辰哉氏との共同研究において 1 次元量子ウォークの精密な漸近挙動を見出した [16].

2-2 K4 格子

2008 年の砂田氏は「自然が見逃した結晶構造」[15]を発表した(cf.[3])．これは数学界だけではなく，材料科学者の興味を引き起こした．炭素からなる材料は安価で軽く柔軟で，さらに熱・電気伝導度が高いなど優れた物性を持つものとして材料科学では重要である．炭素材料では，フラーレン，グラフェンに関する研究がそれぞれ 1996 年ノーベル化学賞，2010 年ノーベル物理学賞の対象となり，またカーボンナノチューブも多様な応用が見込まれている．砂田氏は数学的興味から強い等方性を持つ 3 次元結晶構造を分類したところダイヤモンド格子と K4 グラフの被覆である K4 格子のみしかないことを証明し，ダイヤモンドと対になる K4 格子の数学的重要性を見出した．K4 格子は実現できれば，金属のような伝導性を持つことが第一原理計算で分かっている[6]．実現への試みは，バリエーションを含めて未だ成功していないが，最近分子レベルでの K4 構造は名古屋大学の阿賀波チームが成功している．砂田氏はこれをさらに結晶格子の数学的研究として精力的に進めている[4]．この中にも「クロネッカーの青春の夢」とよばれる数論の問題意識の類似があると聞いている．

離散幾何解析学は，離散的な対象の背後に隠れている連続な構造を抽出すること，離散と連続の関係を調べることに特に力点を置く．原子・分子を制御する時代の物質・材料開発を根底から変える可能性がある．また，グラフのゼータ関数の研究は効率的なコミュニケーション・ネットワークのモデル，量子ウォークは量子コンピュータの理論的研究と関連し，ICT 社会の基盤となる研究である．K4 格子の実現も含め，数学の美しさが世の中を変えるようなインパクトをもたらすに違いないと信じている．砂田利一氏が文部科学大臣表彰という形で顕彰されたことで，そのような道筋が加速することを願っている．

文献

論説・書籍

[1] AN OVERVIEW OF SUNADA'S WORK, A.Katsuda and P. W.Sy, in Spectral Analysis in Geometry and Number Thoery, Contem. Math.484(2009), Eds.M.Kotani, H.Naito, and T.Tate

[2] 基本群とラプラシアン，砂田利一，紀伊國屋数学叢書２９，紀伊國屋書店（1988 年初版，オンデマンド出版）

[3] ダイヤモンドはなぜ美しい？　砂田利一，シュプリンガー・ジャパン　2006 年

[4] Topological crystallography. With a view towards discrete geometric analysis. Surveys and Tutorials in the Applied Mathematical Sciences, 6. Springer, Tokyo, 2013.

論文（砂田氏単著及び共著）

[5] Adachi and T. Sunada, Twisted Perron-Frobenius theorem and L -functions. J.Funct. Anal. 71 (1987), 1-46.

[6] New metallic carbon crystal, M.Itoh M.Kotani H.Naito, T.Sunada, Y.Kawazoe and T. Adschiri., Phys.Rev.Lett 102(2009), 055703.

[7] A. Katsuda and T. Sunada, Homology and closed geodesics in a compact Riemann surface. Amer. J. Math. 110 (1988),145-155.

[8] A. Katsuda and T. Sunada, Closed orbits in homology classes. Inst. Hautes E'tudes Sci. Publ. Math. No. 71 (1990), 5-32.

[9] M. Kotani, T. Shirai and T. Sunada, Asymptotic behavior of the transition probability of a random walk on an infinite graphs, J. Funct. Analy. 159 (1998), 664-689.

[10] M. Kotani and T. Sunada, Standard realizations of crystal lattices via harmonic maps, Trans. A.M.S. 353 (2000), 1-20.

[11] M. Kotani and T. Sunada, Albanese maps and an off diagonal long time asymptotic for the heat kernel, Comm. Math. Phys. 209 (2000), 633-670.

[12] M. Kotani and T. Sunada, Zeta functions of finite graphs, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 7 (2000),7-25.

[13] M. Kotani and T. Sunada, Large deviation and the tangent cone at infinity of a crystal lattice, Math. Z. 254 (2006), 837-870.

[14] T. Sunada, Riemannian coverings and isospectral manifolds, Ann. of Math. 121 (1985), 169-186.
[15] T. Sunada, Crystals that nature might miss creating, Notices of the AMS, 55 (2008), 208-215.
[16] T.Sunada and T.Tate, Asymptotic behavior of quantum walks on the line. J. Funct. Anal. 262 (2012), 2608–2645.