

伊藤清生誕百年記念市民講演会 パネル討論「伊藤清先生の数学をめぐって」

2015年9月12日（土）15:30～16:30

京都産業大学 神山ホール

上記の日程で開催されたパネル討論では、伊藤先生と直接・間接に縁の深い6名の方に「伊藤先生の数学」について語っていただきました。初めて何う話もあり、瞬く間の1時間でした。本記事はその記録を文章化したものです。当日会場に来られなかった方々へもその雰囲気伝われば幸甚です。

(伊藤清生誕百年記念事業実行委員会・「数学通信」編集部)



会場係 時間になりましたのでパネル討論「伊藤清先生の数学をめぐって」を始めます。
司会は京都大学の重川一郎先生です。どうぞよろしくお願ひします。

重川（司会） それではパネル討論を始めさせていただきます。私は京都大学の重川一郎と申します。伊藤先生とは、先ほど講演された渡辺信三先生を介しまして孫弟子の関係にあたります。そういうご縁で本日は司会として進行役を務めさせていただきます。

続いてパネラーの方をご紹介いたします。

まず、大阪大学名誉教授の池田信行先生です。

池田 よろしくお願いいたします。

重川 続きまして、神戸大学名誉教授の西尾眞喜子先生です。

西尾 西尾です。よろしくお願いいたします。

重川 続きまして、九州大学名誉教授の國田寛先生です。

國田 國田です。よろしくお願いします。

重川 次が東京大学名誉教授の楠岡成雄先生です。

楠岡 楠岡でございます。私は伊藤先生直系の弟子でないのですが、いろいろ伊藤先生からお話を伺う機会もありましたので、僭越ですが、この場に座らせていただきます。よろしくお願いいたします。

重川 続きまして、最後ですけれども、大阪大学教授の杉田洋先生です。

杉田 杉田です。私は渡辺信三先生の弟子で、重川先生の弟弟子になります。大変緊張しています。よろしくお願いします。

重川 杉田先生の前にはノートパソコンが置いてあります。これは前面のスクリーン映像の操作をしていただくもので、私が特にお願いしたものです。よろしくご協力のほどお願いいたします。

それでは、話の糸口として先ほど渡辺信三先生の講演にも出てきましたが、ざっと伊藤先生の経歴をたどってみたいと思います。

伊藤先生が生まれたのは1915年。1935年に東京帝国大学に入学されています。

これはその当時の写真で、小平邦彦先生がおられます。それから河田敬義先生、こういった人たちが伊藤先生の同級生になります。

東大を卒業されてから伊藤先生は大蔵省専売局、つづいて内閣統計局に勤務されています。伊藤先生は、当時の内閣統計局局長・川島孝彦さんから、あなたのご専門は、大きい意味で統計局の仕事につながりがあると言えますから、時間はすべて

自由な研究に使ってください、と言っていたと回想されています。

実際に研究に打ち込んでおられたのだと思いますが、内閣統計局に勤務しておられた時、1942年に「Markoff 過程ヲ定メル微分方程式」という論文を『全国紙上数学談話会』244号に発表されました。これが後年の伊藤の確率積分あるいは確率微分方程式と呼ばれるものが初めて現れた論文で、非常に高く評価されている業績です。この論文が発表されたのが1942年で、当時、伊藤先生は27歳です。27歳で時代を画するような大きな仕事をされたということで、われわれにとっても大きな驚きです。

これから少し専門に関わる仕事にも触れながら話を進めていきたいのですが、1943年、伊藤先生は名古屋帝国大学助教授になられて、1952年、京都大学理学部教授、それから1954年から1956年までプリンストン高等研究所に行かれています。そこから帰って来られて…、このスクリーン映像は1956年当時のものですが、京都セミナーの写真です。この写真の中にマッキーンが写っています。先ほどの渡辺信三先生のお話のなかにも出てきたマッキーンです。ほかに池田先生、西尾先生もおられます。この前後のお話から伺いたいと思います。

パネリストの先生方には伊藤清先生との出会い、そのときの印象、その後の自分の専門の研究あるいは伊藤先生の研究とのつながりなどをお話しいただけたらと思います。伊藤先生といちばん古くから関係しているのが西尾先生だと思いますので、まず西尾先生、よろしく願いいたします。

西尾 私伊藤先生と知り合ったのは、先生が京都大学に着任された時でした。ちょうどそのとき私は化学科の4年生で、量子化学を専攻するつもりでした。先生が着任され、数学科で確率論の講義を開講されたので、将来役に立つだろうと思って先生の講義を聴講していたわけです。

講義は私にとっては難しかったのですが、例題には案外興味が持てました。ちょうどそのときに私が化学のほうで勉強していましたことが、確率論でいう中心極限定理の1つの例に過ぎないことが分かって、確率論というのはすごいなという印象を持ち、それで確率論に惹かれたわけです。その後、確率論セミナーにも参加させていただき、伊藤先生からいろいろ教えていただくようになりました。

先ほど出ました写真は、マッキーンが滞在されていた頃の京大のセミナーの様子です。その頃はまだ人数も少なかったです。マッキーンは伊藤先生との共著のご本を書き上げるために来日されたのですが、先ほど渡辺先生の話にもちょっと出てき

たように思いますけれども、それがいま写っているこのご本¹です。

この本は確率過程の見本関数の解析がテーマになっていまして、見本関数ごとに時間のずれや局所時間が導入されて、拡散過程の研究に新しい手法を提供していました。また、ブラウン運動に関係する興味のある事象がかなり述べられており、確率論や周辺分野の研究に大きな寄与を与えた重要な 1 冊です。

マッキーンはとても精力的な方で、毎週講義をなさっていました。私たちは伊藤先生の助けもあって、マッキーンの講義にかなり刺激を受けました。私も神戸から毎週通っていきましたが、彼の知識と能力には圧倒され続けました。私自身も少しずつ、先ほど渡辺先生の講演にありました確率微分方程式が分かり始めましたが、もともと私は応用に興味がありましたので、そのうち確率制御問題のほうに関心が移ってしまいました。伊藤解析のユーザーの 1 人として、先生の輝かしいご研究を仰ぎ見ていたような次第です。

重川 事前に西尾先生に伺ったところによりますと、岩波から 1953 年に出た伊藤先生の『確率論』について特に強い印象をお持ちということなので、お話しいただけますか。

西尾 このご本は、先ほどの講演にありました測度論的確率論の立場で確率過程を解析した専門書の最初のものではなかったかと思います。もちろん、日本の話ですが、最初の本だったと思います。そして、確率論の発展の方向を示唆していて、学生や研究者に大きな影響を与えた本でした。

私は先生の講義を聴いていましたので、講義の続きのような感覚で読み始めましたが、そうすんなりと読めるわけではありません。難しいところを飛ばしたり読み返したり、そういうふうなことの連続でしたが、なんとか最終の確率微分方程式までたどり着きました。

先生のご本を何回か読み返していますと、証明はかなり丁寧に書いてあって、だんだんと読みやすくなってきた感じを受けました。しかし、ご本では新しい定義が与えられると、その存在が証明されていました。存在定理は、数学では普通のこと、なにも特別驚くことでもなかったのですが、応用に目を向けていた私は一種の戸惑いと新鮮さを感じていました。

一方、独立確率変数の和とブラウン運動の章には惹かれました。独立確率変数の和では、概収束と確率収束と法則収束というものが同等になるというレヴィの定理

¹ Itô-McKean, Diffusion processes and their sample paths, Springer, 1965.

があるのですが、その定理の証明には部分和の絶対値の評価が使われていました。絶対値というと、すぐに連想されるのがノルムなので、絶対値でできるのならノルムでもできるのではないだろうかというふうなことを考え、レヴィの定理をバナッハ空間上の独立確率変数の和に拡張することを先生とご一緒に始めさせていただきまして、共著を書かせていただきました。

和に対する証明は、先生のご本の3章ぐらいにちゃんと書いてある証明のところの絶対値を適当にノルムに置き直し、その当時にはすでに距離空間上の確率の理論が普及していましたのでそれを参考にしていくと、証明自身は案外楽にできました。そして、その応用として、先ほど渡辺先生のご講演にありましたように、ブラウン運動のフーリエ展開で、部分和が確率1で一様収束するということが分かりました。渡辺先生のご講演では、部分和というのはグループ分けしておいて、再び和をとるというふうな、ちょっと面倒くさい方法が書いてあったと思いますが、それではなく、部分和そのものが一様収束することが分かりました。この点は改良できたと思っております。

先生は1967年にオルフス（Aarhus）大学の教授になられてデンマークに行かれたので、その間、航空便で先生に教えをいただいたり、私から経過を送ったりというふうなことを繰り返してきました。今では電子メールがありますから、ちょっと考えにくいようなことだと思えますが。

先生のご本では、先生の独創的な2つの研究も、もちろん解説されてきました。1つは加法過程の表現、もう1つは確率微分方程式です。先生はレヴィの加法過程の分解に興味を持たれ、それを研究テーマにされたそうです。レヴィの加法過程の分解は非常に直観的に記述されており、証明は無理ではないかと言われていたようですが、先生は1941年に証明を与えられました。レヴィー伊藤の表現と呼ばれて、加法過程の研究の出発点となる、非常に重要な定理です。

もう1つの確率微分方程式では、与えられた2階楕円型作用素を生成作用素とする拡散過程を構成するために、確率微分方程式を創始したと、このご本の中では書いておられます。当時、先生は偏微分方程式の根っこには確率過程があると言われていましたが、もっと広い分野の根っこに確率過程があつて、その理論、応用、両面の発展は確率解析学を誕生させています。

核心を突いた伊藤先生の独創的な研究のすごさに驚くばかりです。

重川 『確率論』を読まれたそうですが、西尾先生がまだ化学を専攻されていた時に読まれたんですか。

西尾 いえいえ、この頃はもう神戸大学にいました。

重川 確率を専門にされていた頃なんですね。

西尾 はい。

重川 どうもありがとうございました。

では、次に國田先生をお願いします。

國田 私が伊藤先生の近くにいたのは、学生時代でして、1957年から61年の4年間です。学部の2年と修士の2年、その間ですので、その頃の伊藤先生との出会い、思い出についてお話しさせていただきます。

最初の出会いは学部の講義です。「数学解析」という伊藤先生の講義がありまして、内容はルベーグ積分、それから関数解析というか関数空間の基礎の理論を伊藤先生から習いました。伊藤先生は手ぶらで教室に入って来られ、何も見ずに私たち学生に数学を語りかける、そういうスタイルでした。当時、非常に珍しかったので少しびっくりしたのですが、黒板にはきちんと数学の内容を書かれるんですね。数式だけでなく、論理的に完結する文章も含めて書かれますので、私たちはそれをノートしまして、あとから復習してもなんとか理解できる。そのような講義でしたので非常に魅力も感じましたし、格好いいなと思いました。

数年して私はアメリカに留学する機会があり、イリノイ大学でドゥーブの講義を聴く機会がありましたけれども、ドゥーブの講義も伊藤先生の講義も基本的に同じスタイルでした。ああ、これはアメリカンスタイルの講義だな、さすがにアメリカは進んでいると、そんなふうに感じました。

私が大学院に入った頃、この写真は当時の京大の確率関係のフルメンバーです。先生方が3人——伊藤先生、池田さん、飛田さんが写っていますし、残りの5名は当時の大学院の学生です。渡辺さん、福島さん、私などが写っていますが、新年会のあとの写真です。伊藤先生は当時、確率論のセミナーを主宰されていて、メンバーはこの8名のほかにインドのタタ研究所から2名のビジターがあり、関西地方の大学から西尾さん、渡辺毅さんなどが集まり、活発なというか迫力のあるセミナーでしたが、そのセミナーだけでは終わらず、あと進々堂に行きまして、さらに数学談義が続くという状況でした。

先ほど渡辺さんが伊藤先生の仕事として確率積分と確率微分方程式の話をされました。現代的に、非常に明快な形で話されましたが、少し振り返って、伊藤先生の当時の仕事について若干補足させていただきたいと思います。

まず最初に、伊藤先生の確率積分の定義。ブラウン運動によって、ある関数を積分するというわけですが、どういう関数について積分すればいいかについては、いろいろ選択肢があったと思います。たとえばスコロホード積分とか。現在で言えば、それは将来時点の値にも依存するような関数について積分するという事です。しかし、伊藤先生はそうではなくて、ブラウン運動の未来の値とは独立な関数について積分する。いわゆる伊藤積分ですけれども、そういう積分が本質的というか、あるいは確率微分方程式を解くためにはそういう性質を持つ関数の積分が重要だということを実早くから認識されていた。なぜそうされたのか、ちょっと分からないのですが、いろいろ選択肢のあるなかでそういう積分を選ばれたことが、伊藤の理論が大きく発展した最大のポイントではないかと思っております。

もう少し時代が下がって 1970 年代になりますと、制御やフィルターなどの工学の問題に伊藤の理論が使われるようになります。制御の問題で言いますと、現時点までに得られた情報に基づいて制御し、将来の軌道を変えていくというわけです。そういう問題を数学的に定式化するには伊藤の理論がぴったり合っているということで、伊藤の理論が現実の問題に利用できることが認識されます。

おそらくファイナンスの問題でも同じことだと思います。株価の動きを見て何か判断するわけです。ある時点までの情報に基づいて判断するというわけですので、数学としてモデル化する時には伊藤の理論が非常に適合している。そういうことがあって伊藤の理論が広く使われるようになったと思います。

重川 ありがとうございます。たしかに、その時間発展をどういう形で反映させるかが、まさに伊藤の確率積分には自然に含まれているというか、そういうものを取り込んだ形で定義されているというような気がします。

國田先生は、先ほど出ました伊藤先生の『確率論』や、あるいは 1961 年の通称タタノート、**Lectures on Stochastic Processes** が特に印象に残っておられるということですが。

國田 伊藤先生の『確率論』は、私の大学院入学が決まった時点ですので 4 年生の後半ですが、とにかく確率論の勉強をしたいということで読み始めました。1 章から 3 章まではわりとすんなり読んでいけました。4 章は加法過程、5 章がウィーナー過

程, 6章が定常過程, 7章がマルコフ過程となっているのですが, 当時, 私は数学の本は前から順番に読んでいくものだと思っていましたので, とにかく4章に取り掛かったわけです. 加法過程の定義は簡単で分かりやすいと思いましたが, 4章の内容はとても豊富であり, 沢山の推論を重ねていくので難しかったです. しかし, 独立増分を持つという, 簡単な仮定からこんなことまで分かるのかと感心しました. 特に加法過程の様々なジャンプの個数を数えるとそれがポアソンランダム測度になり, それがジャンプを抜き去ってできるブラウン運動と独立になることなどは, とても神秘的に見えました. これをレヴィー-伊藤分解とよぶことはしばらくして知りました. そこでだいぶ時間をとり, それ以後は, 本の順番に読むのも大変ですので飛ばし飛ばし読むということで, 8章の確率微分方程式について勉強しました.

もう1つ挙げましたのはLectures on Stochastic Processes²です. 先ほどちょっとと言いましたが, 私が4年の後半ですから1958年秋より半年ばかり, 伊藤先生はインドのタタ研究所に集中講義に行かれまして, その講義録が作られました. タタの研究所で受講したラオさんが日本を訪問し, ラオさんの筆記したノートに基づいて講義録を作るというスタイルでした. 当時, 修士課程の1年生が3人いたのですが, 3人がその原稿を手写しし, それを基に輪講の形で勉強しました. 当時, コピー機は何もありませんでしたので, 本がなければ自分で論文を見るなり論文を筆記するなりして勉強するという時代でした.

そういうことで勉強したのですが, 実際にセミナーで勉強したのはマルコフ過程です. マルコフ過程は当時発展期でして, 強マルコフ性が定式化されるとともに, 拡散過程, 特に1次元拡散過程に関して, フェラーや伊藤-マッキーの仕事などが出て活況を呈していました. 伊藤先生がプリンストンから帰られ, そういう新しいマルコフ過程の発展を伝えられたので, 日本でも非常に広がりました. 私たち学生もそのマルコフ過程について学びました.

ただ, 講義録ですので, そう難しいことが書いてあるわけではありません. 特に印象に残っているのはポテンシャル論との関係です. ブラウン運動のポテンシャル論, ディリクレ問題です. ディリクレ問題を強マルコフ性を使って確率論的に解釈する, 正則点を確率論的に解釈する, そういうことを勉強しました. 当時, 伊藤先生の本としてはタタのノート, それから「現代応用数学」で『確率過程』I, IIのIが出ていまして, それを副読本にしながら, 確率過程の勉強をしました.

重川 ありがとうございます.

² Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics, 24, 1961.

次の写真は1976年に伊藤先生が組織された確率微分方程式という国際シンポジウムの時のものです。ここに楠岡さんが写っておられますので、この写真を見ながら楠岡さんに伊藤先生との関わりなどをお願いしたいと思います。

楠岡 このとき私は大学院修士課程の1年生でした。実は重川さんは私と同期で、重川さんもここに写っています。このとき大規模な国際研究集会が開かれ、当然のことですが、私が最初に参加した国際集会でした。講演は英語だし、全く分からない発表をじっと我慢して聞いておりました。

すごく偉い先生方がずらっと並んでいるのですが、当時はその人たちが偉い人だということが分かっておりませんでした。後に私とかなり大きな関わりを持つのは、前列に座っているマリアヴァンです。実はマリアヴァン先生の講演が全然分からなかったもので、あとで「あなたがそんなにすごいことを言っているとは思わなかった」と言ったら、「私はそんな話はしていない」と言われました。というのは、そのときマリアヴァン先生は、ある講演をしたのですが、全然違う内容の論文を会議録に送ってきたのです。それは後にマリアヴァン解析と呼ばれる最初の論文になるのですが、そのようなことで、後から考えると、ものすごく関わりの深い会議だったのです。しかし私にとっては、当時は何も分からない会議だったということです。

伊藤先生と最初にお会いしたのはこのときではなくて、その前の年になります。私が大学4年生の時にセミナーで伊藤先生のオルフスのレクチャーノートで *Stochastic Processes*³ というものを勉強していました。この写真のはちに復刻されたもので、当時はぼろぼろのレクチャーノートしか図書館にはなく、しかも、ゼロックスでコピーするとなると1ページ50円ぐらい掛かるので、結局青焼きによりコピーし、それを勉強していた思い出があります。

そのとき、ですからいつ頃だったか忘れたのですが、伊藤先生が東京大学に集中講義にいられました。大学院向けだったのですが、私が読んでいた本の著者ということもあり、4年生として伊藤先生の講義に参加しました。そのとき伊藤先生はあまり細かい証明などは一切しないで、 $dB(t)$ を2乗すると dt だとか何か、不思議な式を出しているいろんなことをおっしゃって、なかなか不思議な講義だったのを覚えています。

確率の学生は東大ではすごく少なくて、私を含めて聴いていた人は何人もいなかったもので、伊藤先生はいろいろ声をかけてくださいました。どういうことをやっているのかとか、どういう人が東大にいるのかとか、いろいろ聞かれた思い出があり

³ Springer, 1969.

ます。ですから、そのときは気さくに話をしてくださる先生だなと思いました。

数理ファイナンスというのは、私はだいぶたってから研究を始めた分野ですが、伊藤先生の業績は数理ファイナンスで大きく評価されています。どうしてそういうことになるのか。それから、渡辺先生がウルフ賞で、伊藤先生の業績はニュートンに匹敵するというようなコメントをされ、ここにおられる方は、いったいどういうことなのかという感じがすると思います。ちょっとだけファイナンスの話をさせてください。

ファイナンスでは株価や証券価格をターゲットにするわけです。当然のことながら、株価にせよ、経済の指標にせよ、人間の営みによって構成されています。ですから、株価が次にどう決まるかを真剣に考えようとする、現在市場に参加している人々がどういう活動をしていて、どういう行動をしているかを見ないといけない。しかし、世の中にはいろいろな方がおられるわけで、たとえば株価が上がりそうだと思うけれども、家を建てるのでその頭金にするために株を全部処分してしまうとか、そういう人もいます。経済のいろいろな指標を見ていても、その背後にあるものによって、瞬時瞬時、将来は変わって行ってしまふ。そういうふうなことを取り込むにはどうすればいいかと考えた時、外生的というのか、そういうものが次々に加わってくる。すなわち、どんなに理論を大きくしても説明できない部分がある。たとえば新製品が突然発表されるとか、いろいろなことが起こり得るわけです。

そういうものを取り込むのに、予測される部分プラス、ノイズのようなもの。ノイズという言い方は悪いのですが、予測できないという意味でノイズ。実はそれは分かっているかもしれないけれども、理論のなかでは説明できないものという意味で、そういうものを加えていかななくてはいけない。

細かいことは省略しますが、ファイナンスの場合に証券価格については、ある条件を満たさなければいけない。それは何かというと、経済学においては均衡という概念があるのですが、もし、どこかの株が明日5%上がると私が知れば、一生懸命に買って翌日売るという行動に出ます。それをみんなが知っていれば、それは不可能です。みんなが買うと言っても売る人がいないわけですから、それでは話にならないわけです。ですから、均衡においてはどのような条件が必要かということが経済学ではかなり議論されて、その結果、マルチンゲール性みたいな概念が必要だというようなことが言われます。

一方において、その証券価格を記述したい。正確に記述するというよりも、とにかく記述できないと何もできないという状況下で記述する。ですから、自然科学や工学と違って、たぶん専門家からは反論があるかもしれませんが、証券価格の方程

式はもう適当に決める。適当に決めるけれども、ある条件を満たさないといけない。そのときに、そういうことを記述する方法としていちばん簡単なものですら非常に複雑で、その中で確率微分方程式が大変重要な手がかりを与えてくれる。

ですから変な話ですが、経済学やファイナンスにおいては、証券価格を記述するためには確率微分方程式がなければいけない。ちょうど天体の運動を記述するのにニュートンが常微分方程式という概念を導入し、そこで初めて天体の運動が動的に記述できるようになったのと同じように、証券価格などを動的に記述することは、確率微分方程式という数学の道具があったからこそできたわけです。

実際に経済学で確率微分方程式が使われるようになったのは1970年ぐらい以降です。しかも、ちょうどそのときに國田先生と渡辺先生が出された理論がさらに発展していて、マルチンゲール理論もどんどん発展していた。そういうものと相まってファイナンスの理論が発展していくというよりは、むしろ、数学の発展があると、それがファイナンスに取り込まれていくというような形です。

その原点となる記述、すなわちニュートンの微分方程式に対応するのが伊藤先生の確率微分方程式。それなしには記述できないというのが重要なことなのです。そういう意味において、ちょっと大げさではないかと思われるかもしれないけれども、われわれの世界の人間にとっては、そういう数学的道具があって初めてそういうことが可能だったということなのです。

そのときに、確率とかいうものが非常に曖昧なのですが、本当にそれは偶然なのか、不確実なのかといったことは別として、均衡を達成するためにはそういう形しかない。そういうことでそういうものが使われている。さらに、操作性のあるものでないといけないので、そういう意味においても確率微分方程式は絶対的なものなのです。

このあいだのシンポジウムでヴァラダンという方が言った話があります。ヴァラダンがニューヨーク大学で講義をしていたときエレベーターで居合わせたビジネススクールの学生が、伊藤の公式が書かれたヴァラダンの持っているノートを見て、伊藤の公式は確率論でも使うのか、ファイナンスで使うのは知っていたが、そんなこともあるのかと言われたというぐらい、確率微分方程式は数学とは離れて、ファイナンスにおいて絶対的な道具として存在しています。

長くなりましたが、社会科学における使い方は工学とは発想も違います。結果としては同じ数学ですし、数学は共通していますが、そのようなことがあるということで申し上げました。

重川 ありがとうございます。

では、次に杉田先生にお願いいたします。

杉田 私が伊藤清先生に初めてお会いしたのは 1982 年の谷口シンポジウム、京都大学数理解析研究所での国際研究集会だったはずですが、はずと申し上げたのは、実ははっきり覚えていないのです。どうしても外国の人にばかり目が行っていて、私は D1、博士課程の 1 年生ぐらいだったと思いますが、そのときに講演されたストウリックさんやガヴォーさんのことは不思議と覚えていても、伊藤清先生のことは記憶にないんです。

その後、何度か学会などで伊藤先生を見かけることになったのですが、いつも伊藤先生の周りには幾重にも取り巻きの先生方がいらっしゃって、私のような下っ端は遠く外野から見ている感じでした。だからお話しするどころではなく、横綱の周りに稽古の若い者がいっぱい集まっているところという感じで、私たちは遠くから見ているだけでしたので、まさか自分が伊藤清先生と直に話をするようになるとは夢にも思いませんでした。

最初にお話しできたのは学習院大学を退職されたあと、関西確率論セミナーでお話しになった 1985 年のことだったのではないかと思います。そのときのご講演の様子は数学会のビデオアーカイブで公開されましたので、まだご覧になっていない方はぜひご覧になってください。大変面白いものです。確率論が分からなくても十分楽しめる内容だと思います。

その頃、私は博士課程の 3 年だったと思いますが、関西確率論セミナーの世話役をしていました。そのご講演のあと、京大会館だったと思いますが、歓迎会を開きました。それを私がアレンジしたのを覚えています。

重川 杉田さんは伊藤清先生の論文、Multiple Wiener Integral⁴が印象に残っているとおっしゃっていますが、どういう印象なのでしょう。

杉田 Multiple Wiener Integral は日本語では多重ウィーナー積分というものですが、この論文は修士の学生の時に私が最初に読んだ先生の論文です。伊藤先生が 35 歳ぐらいに書かれた論文だと思いますが、伊藤先生の論文のなかで、たぶん最も初等的というか、基本的なことしか書いてないような論文ではないかと思います。とにかく当時の私が分かったのですから、間違いなく内容は易しいと思います。しかし、

⁴ J. Math. Soc. Japan 3, 1951.

易しいからといって決して価値が低いわけではありません。事実、この論文は非常に価値の高いものです。

たとえば物理の場の量子論で出てくるフォック空間は、1つのヒルベルト空間を基に直積やら直和やらいっぱい作って複雑怪奇に作りあげる空間ですが、多重ウィーナー積分の考えに基づけば、ウィーナー空間上の L^2 空間と非常に自然な同型が作れるのです。場の量子論で出てくる消滅作用素は、マリアヴァン解析の重川微分といわれるもので、生成作用素に対応するものはその双対の櫃田ースコロホード積分というような美しい関係が成り立つ。そういう舞台装置が実は 1951 年に出来ていたという感じです。

先ほどちょっと言った櫃田ースコロホード積分というのは、國田先生の話とも関連するのですが、一般のガウス過程に基づく確率積分で、よく知られているマルチンゲールに基づく確率積分と一味違ったものですが、マリアヴァン解析などではいろいろ活用されているようです。もっとも、私がこの論文を初めて読んだ時は、その価値は全然分かりませんでした。修士の学生ですから、その背景も何も知りませんでした。

ただ、伊藤先生は、この論文はウィーナーの *The Homogeneous Chaos* という論文を読んで、そこから着想を得たと書いておられ、私は無謀にもウィーナーの論文を読んでみたのですが、さっぱり分かりませんでした。1つは、何が問題になっているかすらよく分からなかった。時代的なこともあるのかもしれませんが、どこからどこまでが数学かという感じで分からなくて、伊藤先生はこんな論文からどうしてこんな簡明な、美しいアイデアを見い出されたのかと、大変感心した覚えがあります。

それで、タイトルの多重積分、ウィーナーの定義したものを少しだけ変えて使いやすいものにしたみたいなのを伊藤先生は述べておられるのですが、私は、全く別物といってよいのではないかと思っています。エルミート多項式の無限次元版であって、ウィーナーのものとはやっぱり違うと思うのですが。

いずれにしろ、西尾先生のお話でもレヴィの分解定理が証明は無理だと思われたのを伊藤先生が成し遂げられたとかいう話がありまして、ウィーナーとかレヴィとか、すごく癖のある数学者の論文の本質を見抜いて数学を作り上げられた伊藤先生は、やっぱり偉大だと思います。

重川 ありがとうございます。

では、最後になりますけれども、今まで何枚もの写真に写っておられた池田先生、

補足の意味でお願いいたします。

池田 何枚もの写真に私が出てくるのは恐縮です。実は私は他の討論者の方々よりちょっと年上で、伊藤先生と知り合ったのも割と早い方です。1956年にマッキーンが来るというので、伊藤先生は私の年代前後で確率論に興味を持つ人ができるだけ関西に集まれるよう大変努力をされました。当時は今のように数学者の交流のための資金は潤沢ではありませんでした。その頃、大阪大学理学部に湯川奨学金という制度があり、その奨学金で私は大阪に来ました。また、先生が名古屋におられた時の学生で、確率論に興味のあった白尾恒吉さんが名古屋の大学院の学生の人と京都に来られました。当時、外国に行くのはわりと自由だったのですが、国内を動くのは大変な時代でした。関西の大学に西尾眞喜子さん、渡辺毅さん、それから京大の近藤亮司さん、野本久夫さん等、マッキーンが来た頃に、当時としては比較的多くの確率論に興味のある人が関西におりました。

マッキーンは私より1つ若く、その頃26歳だったと思います。MITの教授になった直後に、日本に来ました。来る前は、伊藤先生がプリンストンに滞在しておられた時に伊藤先生と一緒に研究しておりました。

当時の日本の状況は、確率論の理論的な研究については京都大学、名古屋大学、九州大学以外では稀でした。まして先生の学生時代は日本の確率論はラプラスの時代のもので、ラプラスの母関数を使う方法が活躍する時代でした。日本中がラプラスの方法みたいなことをやっている時代に、先生はこういう仕事をされた。そういう数学を志す人は、日本では先生と、先生のお知り合いで私の九州での先生である丸山儀四郎先生と2人ぐらいしかおられなかった。少し応用の方まで広げて見れば河田龍夫先生や國沢清典先生がおられました。先生はそういう時代にすべて自分で開拓された。

先生がどうしてそういう数学に興味を持たれたか、先生に聞いた話と書かれたものをつなぎ合わせますと、(旧制)八高時代に入学から卒業まで1人の先生に習った数学が関係ありそうです。そのとき習った数学が将来を決めることに役立って、その頃、運動に非常に強い興味を持たれた。偶然については、東京大学に入学後のことのように。当時の東京大学数学科の雰囲気は、高木先生の伝統を引き継ぐ分野に興味を持たれた人が多かったようで、先生は自分でいろいろ考えて勉強しておられたみたいです。その頃、偶然というものに興味を持たれ、偶然と運動とを合わせたようなものをやりたいということで、それが確率微分方程式の仕事につながったのではないかと、私は思います。なお、その頃から河田敬義先生とは交流が深か

ったようです。

先生が一度私に次のようなことを話されたことがあります。伊藤先生がおっしゃるには、自分の時代には日本には数学しかなかったけれども、池田君の時には確率論というものがあったそうだなとおっしゃる。自分は数学以外はやったことがないという話をされた。あまりこのようなことはおっしゃらないと思いますが、私はしばしばお茶を飲んだり雑談をしたりする機会がありましたので、そういうお話をされた。だから、ちょっと変な言い方ですが、伊藤先生は生涯、確率という用語を使う数学をおやりになったのであって、確率論をやったとは思っておられなかったと思います。

マルコフは 19 世紀から 20 世紀に生きた人で、文学作品の母音と子音がどういう順番に出てくるかということを考えて、現在の状態が分かると、過去の履歴は将来の法則に関係しないというような特性を導きました。現在、マルコフ性と呼ばれ、数学だけでなく物理などにも沢山の分野で使われていると思いますが、それは 20 世紀初めの頃の話です。マルコフの場合は、時間は離散的ですが、コルモゴロフは時間が連続の場合に、推移確率の考えを使って一般的な定式化を与えました。そういう一般論の枠組みを決めたのが、先ほど渡辺さんが紹介された論文です。さらにそれらは特殊な条件がある場合、2 階の拡散方程式で決まることを導いています。

一方、ブラウン運動は 2000 年ぐらい前から知られています。それから逐次、ブラウンの時代を経てアインシュタインやペランのことにまで行くのですが、ウィーナーの時代になってようやく数学になるわけです。ブラウンの時までは、ある意味ではまだ数学ではなくて、現代風の数学になるのがウィーナーの時代です。渡辺さんは先ほどウィーナー過程という言葉をお使いだったと思いますが、そういう呼び方をしたり、ブラウン運動と呼んだりします。伊藤先生の仕事は全部、ウィーナーの仕事を基礎にしていて、問題はコルモゴロフに密接につながっています。

先生の傘寿のお祝いで開いた会合があり、そのときの講演の終わりに楠岡さんが、一番誰に影響を受けられたかと聞かれたら、先生は、コルモゴロフだと答えられました。おそらく先ほど渡辺さんの紹介にあった 1931 年の論文⁵で、マルコフ性を持つ運動の一般論を定義した論文だと思います。その中の特殊な条件の下で 2 階の拡散方程式が出てくるわけですが、その拡散方程式に対応するランダムな力学系を作るというのが先生の最初の目標だったと思います。そのために確率積分という概念を導入されました。

次に先生は 1 次元拡散過程を完全に決めるというマッキーとの共同の仕事を

⁵ Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Math. Ann. 104.

されました。そこではレヴィによるブラウン運動の局所時間の概念が重要な役割を果たします。それはコルモゴロフの一般の枠組みのなかの非常に特殊な場合ですが、1次元に限ると、もっときちっと分かるということが完全な形で解明された。

渡辺さんの話に出てきた確率平行移動の理論は、微分幾何に興味のあったイギリスのイールス、エルワージーによって注目され、それからマリアヴァンなどもその後それを活用したわけですが、微分幾何の中にもそういう力学系があるということを先生はやられたわけです。

伊藤先生の仕事は、解析学や幾何学のなかにランダムな力学系を作るということでやって来られたと思います。そのためには、先ほど渡辺さんの話にあったように、ウィナーの空間が、すなわちブラウン運動の性質が非常に重要な役割を果たすわけです。ブラウン運動をどう理解するかということですが、ブラウン運動が数学になったのはウィナーの時代ですけれども、前にも述べたように2000年前から知られていました。皆さんご存じのように、部屋を暗くしておいて、ある1点からだけ光が入るようにすると、その先にずっと明るいところが出て来ますが、その部分にはげしく動いている粒子が見えるはずで、要するにほこりの運動です。1マイクロン(μm)ぐらいの大きさの粒子が、空気の非常に多くの分子が衝突することによって動く運動ですから、ものすごく極端な運動になるわけです。そのブラウン運動の性質に対応したのが確率積分とそれに関連した伊藤の公式と呼ばれるものだと思います。

楠岡さんが、ヴァラダンが話したことをおっしゃっていましたが、私には別の経験があります。今はクーラント研究所にいるベナルースがパリにいました時に家を訪ねたら、彼と先生と一緒に写った写真が飾られていました。学生が訪ねて来た時にそれを見て、「お前の隣に居るのは誰だ」と聞くので「伊藤だ」といったら、「伊藤はお前と話をするような人か。もっと神様みたいに思っていた」と言われたそうです。伊藤先生を、今の世代の人と気軽に話しているような人間だと思っていない人も沢山いるようだと、2人で大笑いしたことがあります。

少し方向が違うのは先ほどの西尾さんの話に出て来たことです。私たちはブラウン運動のフーリエ展開と言っていますが、特に渡辺さんはハール関数の場合を話されました。この話は発表当時、非常に評判の悪かったワイエルシュトラスのどこでも微分できない関数の話に関連しています。当時、高名な多くの数学者が興味を持たず、持たないどころか、悪口を言っていた時代がありました。ペランはアインシュタインのブラウン運動の研究を軌跡の運動としてとらえ、精密な実験を繰り返し、その著書で、数学者が言っているあの奇妙な関数はどうも実在するみたいだと言

ています。普通、滑らかな関数のフーリエ級数で重要な役割を果たすのは、周期の長い運動の和をとったものですが、ブラウン運動の展開では全く逆で、周期が非常に短いものを集めることが重要です。

先ほどから伊藤先生の本が出てきますが、そこに二重和をとってやるというペーリー-ウィナーのフーリエ展開の結果が詳しく書いてあります。しかし、他の本の著者はだれも重視しなかったみたいで、私の知る限り、外国の本でその部分を紹介したものはないみたいです。伊藤先生の本だけではないかと思います。おそらくその頃からフーリエ展開に興味をお持ちだったのではないかと、私は想像しております。

伊藤先生の研究は、1つは確率積分を基礎にした2階の拡散方程式、ヒレー-吉田理論に関連した1次元の場合を完全に解明した結果とか、微分幾何のほうの成果。一方はちょっと違ってフーリエ展開の結果があります。

なお、微分幾何につながる話は、私が聞いたのでは、最初はだれでも思いつくように、関数の場合に角谷先生がやっておられた調和関数のことは微分形式の時はどうなるのだろう、と思ったところから始まったということでした。しかし、当初はだれも興味を持ってくれない。興味を持ってくれたのはマリアヴァンとディンキングくらいだとおっしゃっていました。

重川 ありがとうございます。なかなか話が尽きないのですが、パネラーの方で補足等、おありでしたら。

では、ここで会場の方から質問をお受けしたいと思います。先ほど渡辺信三先生が講演されましたので、その質問もまとめてお受けしたいと思います。

よろしいでしょうか。

それでは、だいぶ時間を過ぎてしまいましたが、これでパネル討論を終わりたいと思います。ありがとうございました。〔拍手〕

会場係 以上をもちまして市民講演会を閉会いたします。

どうもありがとうございました。〔拍手〕