

数理で探る錯覚—仕組みがわかると視覚の偉大さも見えてくる—

杉原厚吉（明治大学先端数理科学インスティテュート・特任教授）

A Mathematical Approach to Secret of Optical Illusion

--- Miracle of the Human Vision System

Kokichi Sugihara, Meiji Institute for Advanced Study of
Mathematical Sciences, Professor

1. はじめに

不可能立体の絵とよばれるだまし絵があります。オランダの版画家エッシャーなどが作品の素材として使ったことでも有名です。これを見ると、立体が描かれているという印象をもつと同時に、そんな立体は作れそうにないとも感じます。作れないと感じながらも立体感をもってしまうのですから、これは錯覚の一種です。

このだまし絵を数理的に調べると、「不可能立体の絵」という名称に反して、立体として作れるものがあることがわかります。そのような絵に対しては、作れそうにないのに立体の印象をもってしまうという意味で一回だまされ、実は作れるのにその立体の形を思い浮かべることができないという意味でもう一回だまされていることとなります。

このだまし絵以外にも、人は2次元の画像から3次元の立体を読み取る場面で、さまざまな錯覚を生じます。以下では、これらの錯覚がなぜ生じるかを、視覚の数理モデルを手掛かりに考えていきたいと思います。すなわち、絵から立体を読み取ることのできるコンピュータを作りたいという研究の中で生まれた情報処理と、人の視覚の振舞いとを比較することによって、人がなぜ立体錯視を生じるのかを考えていきます。

2. だまし絵に関する立体錯視

まず、人の視覚が立体に関してどのような錯覚を生じるかを例で見てください。

第1の例はだまし絵です。図1に示した例は、無限階段などと呼ばれており、ペンローズ父子が心理学に関する論文の中で紹介し[3]、エッシャーが作品「上昇と下降」(1960)の中で素材として用いたことでも有名です[1]。絵には、四角い中庭を囲む建物の屋上に階段が描かれていますが、登っていくといつの間にか出発点に戻ってしまい、終わりが無い構造になっています。こんなことは物理的にはあり得ないので、不可能立体とよばれます。立体としては作れないと感じるのに、見た人が立体感をもってしまうため、目の錯覚、すなわち錯視の一種と考えられます。見る人が立体感を持つてしまうのは、絵のそれぞれの部分が局所的にはつじつまの合う立体構造として描かれているためだと考えられます。

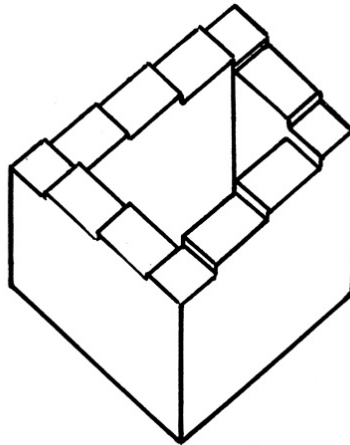


図1. 不可能立体のだまし絵「無限階段」

第2の例は、図2に示すような立体です。この図の立体は、(a)に示すように「無限階段」と同じに見えます。そのため、この視点から見ると、あり得ない立体が目の前にあるという印象をもつ錯覚が生じます。実際の立体の形は、同図の(b)に示すように、四つの壁のうち三つの屋上は普通の階段ですが、もう一つは、斜めの面からなる構造で、階段の高さ方向の差を吸収しています。この構造を、特殊な視点から見たとき、同図の(a)のように不可能立体に見えるのです。

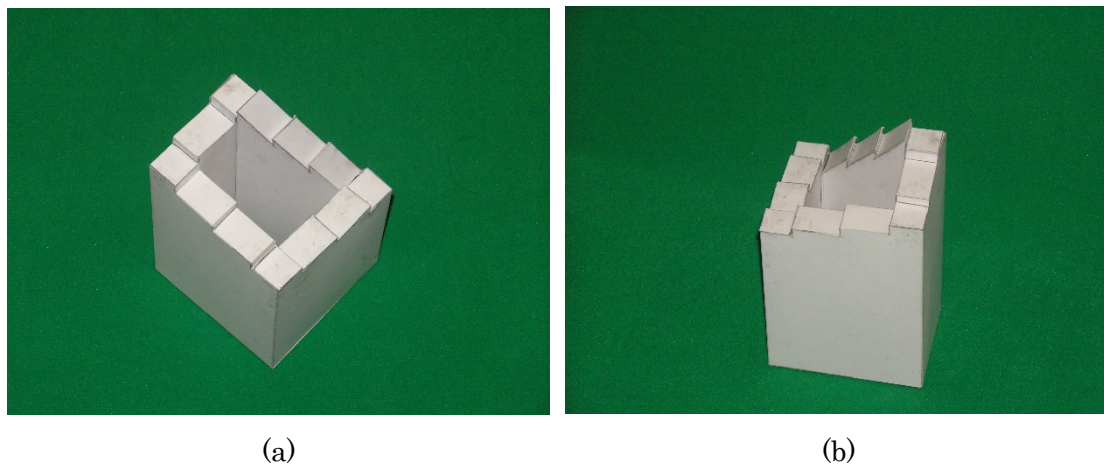


図2. 不可能立体「無限階段」

このように、不可能立体はだまし絵と同じに見える立体ですが、ある視点から見たときそのように見えるだけで、一般の視点から見ると意味不明の見慣れない立体です。

第3の例は、不可能な動きが起こっているという錯覚をもたらすもので、不可能モーションとよんでいます。図3にこの一例を示しました。(a)に示すように、立体自体は、柱のまわりに4つの止まり木が互いに直角に水平方向にのびるありふれた形に見えます。しか

し、そこに輪が同図(b)のようにかかります。この輪は柱の裏側を通っているにもかかわらず、4本の止まり木すべての手前を通っています。輪は平らですから、こんなかかり方はできないという印象を持ちます。実際には、同図(c)に示すとおり、止まり木は、互いに直角ではなくて、4本とも後ろ側へのびています。だから輪がこのようにかかることができるのです。

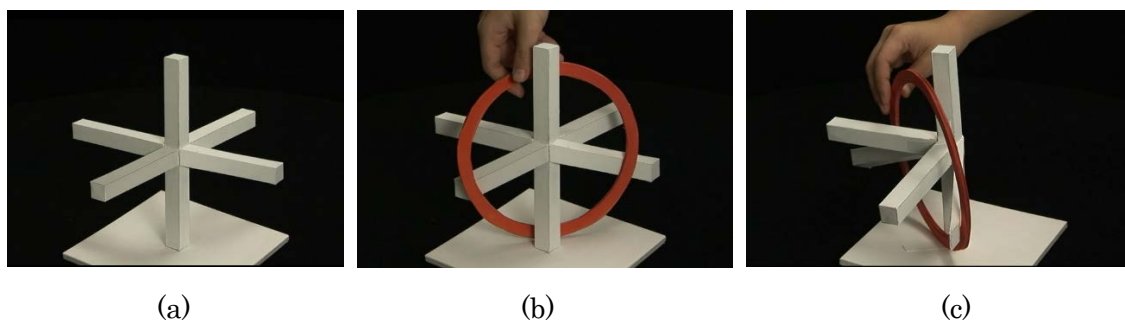


図3. 不可能モーション「止まり木と錯覚知恵の輪1」

私たちがこの立体と輪を図3(b)の視点から眺めたとき、頭の中に思い浮かべる立体の形と輪の動きは両立しませんから、何か変だとは感じますが、だからと言って、思い浮かべた立体を動きとつじつまの合うように修正するわけではありません。止まり木が互いに直角にのびているという解釈はたいへん強く安定しています。実際、立体を回転させて、本当の形を理性で理解したあとでも、もとの視点に戻すと、やはり止まり木は直角にのびているように見えてしまいます。この例からも、私たちが、画像から立体を読み取る情報処理は、理性の届かない脳の奥深いところで勝手な計算によって行われているように見えます。

これらが立体錯視の典型例です。これらには、いくつかの共通の性質が観察されます。第一に、画像を見て知覚した立体の形と状況がつじつまが合わないと感じるのに、つじつまが合うように自分の知覚を修正はしません。第二に、本当の形を理解したあとでも、もとの視点に戻ると、理性に反してまたつじつまの合わない状況が知覚されてしまいます。第三に、画像から私たちの知覚が思い浮かべる立体は、直角が多い構造となっています。次に、これらの立体錯視がなぜ起こるのかを、数理モデルを通して考えてみたいと思います。

3. 画像解釈の数理モデル

1枚の画像が与えられたとき、そこに映っている立体の構造を読み取る情報処理の流れの一つの可能性を図4に示しました。これは3段階の処理を経て立体を読み取るもので、人の視覚機能をコンピュータで実現しようとするときの代表的方法の一つです[4,5]。

第1段階では、画像からそこに映っている立体の定性的構造の候補を取り出します。

これは、立体の投影像が満たすべき性質を辞書と文法のような形式で表し、その文法に合う立体を探すという手続きに帰着されます[2].

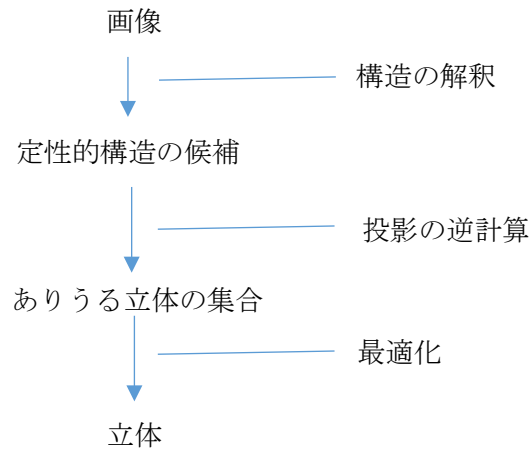


図4. 画像から立体を読み取る情報処理の一つのモデル

第2段階では、その解釈どおりの立体が存在するか否かを、定量的に調べます。ここでは、立体の頂点座標などを未知数で表し、定性的構造に基づいてその未知数が満たすべき方程式・不等式をたてます。特に立体を多面体に限定すると、この方程式・不等式は線形となります[5]。この方程式・不等式が解をもてば立体が存在し、存在しなければあり得ない絵であると判定できます。ただし、存在する場合には、一般に無限に多くの解が存在するため立体の形は一つには決まりません[2].

第3段階では、すべての解の中からもっともありそうな立体を選び出します。ここでは、対称性の高い立体を好むなどの人の視覚の特徴に基づいて、最適化問題として定式化し、その解を求めます。

このうち第1段階と第2段階の詳細については参考文献を参照していただくこととし、ここでは第3段階の最適化について考えましょう。

ゲシュタルト心理学によれば、人は、図形をできるだけ単純でまとまりのよいものとして把握する傾向があります。たとえば、対称性の高い立体を優先するなどです。一方、多くの不可能立体・不可能モーションの例を観察すると、脳は直角の多い構造を好むように見えます。すなわち、直角でできた構造の投影図と解釈できる部分は、実際に立体においても直角であると思いつく傾向です。実際、直角とみなせる構造を見せられると、他の可能性については全く思い至らないほど、この傾向が強いというのが私の実感です。

そこで、図4の数理モデルの第3段階の処理を、直角のできるだけ多い構造を選択するという最適化とみなしましょう。これによって、図1, 2, 3の立体錯視を説明できます。図1は、直角を優先する結果、水平・垂直の面のできた階段が描かれていると解釈されます。そしてその階段が終わりなく環状につながっているためにあり得ない構造であると感じます。

図2も、図1と同じように直角を優先するために屋上の構造は階段と解釈され、目の前に立体が置かれているという状況であるにもかかわらず、不可能な構造と感じるだけで、他の立体を思い浮かべることができません。

図3では、直角を優先するために4本の止まり木が互いに直交していると解釈されます。そして、輪の絡み方が、この解釈と両立しないと理性で理解したあとでも、やはり他の立体を思い浮かべるといふ解釈の修正はできません。

このように、図4の情報処理の第3段階の最適化が、直角の多い構造を優先するものであると仮定すると、多くの立体錯視がなぜ起きるのが説明できます。さらに、「直角に見えるところに直角以外の角度を使う」という技術によって、多くの不可能立体・不可能モーションの錯視立体を設計・制作することができます。

4. 新しい立体錯視をめざして

脳は直角を優先して画像を解釈するという仮説を信じると、さらに多様な立体錯視を作ることができると考えられます。最近発見した例を次に紹介しましょう。

図5がその一例です。ここには、車のガレージがあり、そのうしろに鏡が立ててあります。この図の(a)のガレージの屋根に注目すると、直接見た形と鏡に映った形とが全く異なるように見えます。すなわち、直接見るとかまぼこ屋根に見えますが、鏡に映った姿は、波形の屋根に見えます。実際の屋根の形は、かまぼこ型でも波型でもなく、同図(b)に示すような形をしています。

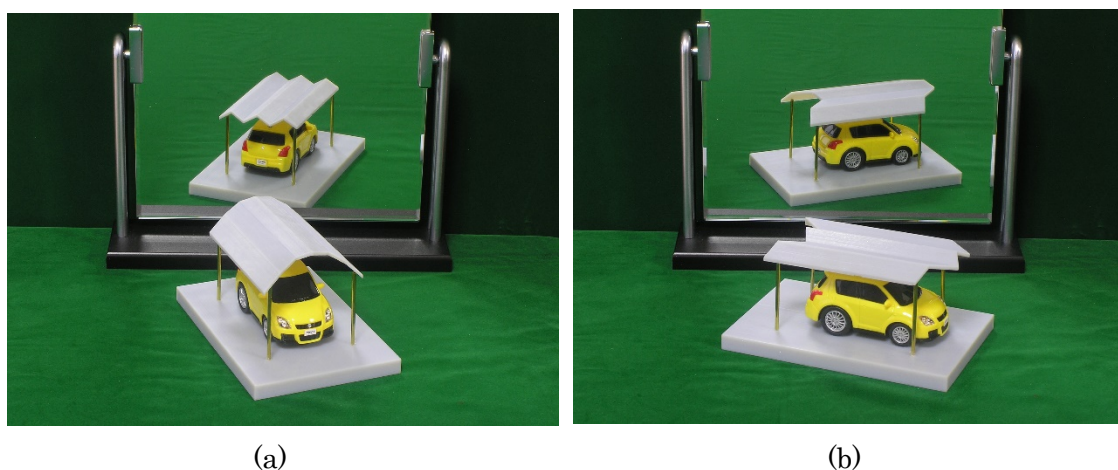


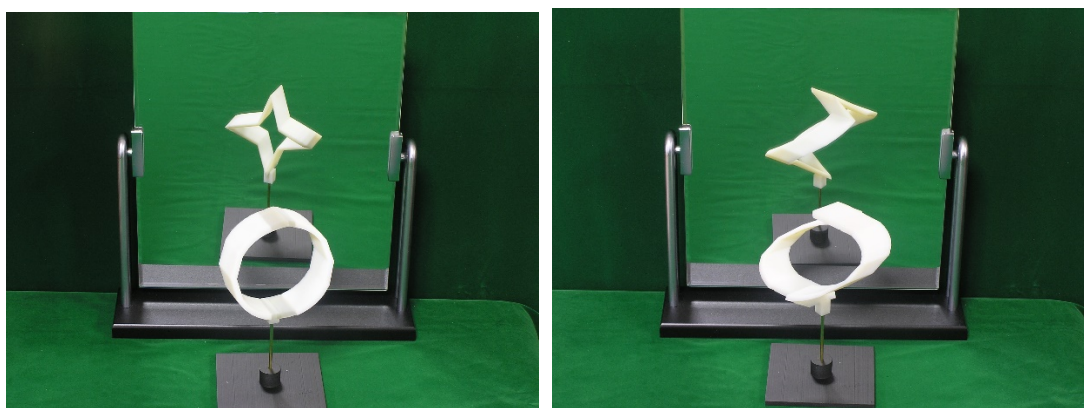
図5. 多義柱体「変身するガレージ屋根」

このガレージの屋根は、一つの線分を向きを変えないまま空間を移動させたとき掃き出す面として定義されています。このような面を見たとき、直角の大好きな人の脳は面の端が線分に直角な平面で面を切断した切り口だと解釈するだろうと想像しながら作ってみました。その結果、予想どおり、鏡に映すと立体が変身したように見えるという新しい立体錯視を作ることに成功しました。この場合も、実物と鏡の中の姿を見比べて、自分の解釈

が間違っていると理性では感じますが、つじつまの合うように立体を修正することはできません。さらに屋根の本当の形を知ったあとでも、やはり最初の視点から見ると、かまぼこ屋根と波屋根に見えてしまいます。

この錯視は柱体の断面が、二つの方向から見たとき全く違った形に見えるという現象で、これには多義柱体という名前をつけました。このような立体は、一つの方角から見たときある形に見える曲線は、奥行き方向に任意性をもっているため、その自由度を利用して、第2の方角から見たときもう一つの望みの形に見える空間曲線を作るという手続きで制作できます[6]。

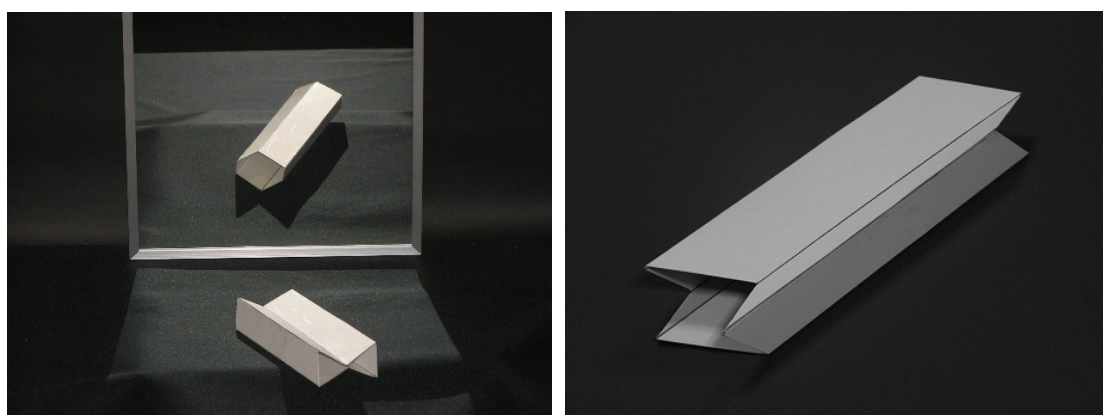
図6と図7に多義柱体の例をあと二つ示しました。どちらも(a)は、直接見た姿と鏡に映った姿が全く違う形に見える状況を示し、(b)は、その立体を回転して一般の方角から見た状況を示したものです。いずれの例でも、(a)を見たとき、私たちの脳は、切り口が柱体の軸方向に直角な平面で切断してできたものと解釈していることに同意していただけるでしょう。



(a)

(b)

図6. 多義柱体「満月と星」



(a)

(b)

図7. 多義柱体「六角形と双子三角形」

5. おわりに

画像から立体を読み取る際に起こる錯視と、それを説明する数理モデルを紹介しました。これは、画像の中には奥行き情報が欠けていること、その欠けた奥行きを補うとき、人の脳は直角を優先する傾向があることに基づいたものです。

私たちは、目でものを見て立体の形を理解します。実際の立体を直接見るときには、二つの目を使います。その結果、右目と左目の見え方のわずかな違いから立体までの距離がわかり本来の形を正しく理解できます。一方、ここで示したように、立体を撮影した画像には、カメラのレンズが一つしかないために、片方の目で見た情報しか含まれていません。そのため奥行き情報は脳で補わなければ立体を読み取ることはできません。このとき、奥行きを誤って解釈し、錯覚が起きる余地が生まれます。

この例から、私たちに目が二つあることの重要性がよくわかります。また、画像を見るときは、両目で見ても片方の目で見た情報しか得られないことを認識し、立体を読み誤る危険性が含まれていることを忘れないことも大切だと思います。

参考文献

- [1] B. エルンスト (坂根巖夫 訳) : 「エッシャーの宇宙」. 朝日新聞社, 東京, 1983.
- [2] D. A. Huffman: Impossible objects as nonsense sentences. B. Meltzer and D. Michie (eds.) Machine Intelligence 6, Edinburgh University Press, Edinburgh, 1971, pp. 295--323.
- [3] L. S. Penrose and R. Penrose: Impossible objects --- A special type of visual illusion. British Journal of Psychology, vol. 49 (1958), pp. 31--33.
- [4] K. Sugihara: Machine Interpretation of Line Drawings. The MIT Press, Cambridge, 1986.
- [5] 杉原厚吉 : 「だまし絵と線形代数」. 共立出版, 東京, 2012.
- [6] K. Sugihara: Design of ambiguous cylinders. Proceedings of the 10th Asian Forum on Graphic Science (AFGS2015), Bangkok, August 4-7, 2015 (to appear).