

阿部健氏の第 31 回井上研究奨励賞受賞によせて

東京大学大学院数理科学研究科
儀我 美一

阿部健氏 (2014 年度日本学術振興会 PD, 名古屋大学大学院多元数理科学研究科, 現 京都大学大学院理学研究科) が, 受賞題目「非減衰空間上のストークス半群」により, 第 31 回井上研究奨励賞を受賞されました. 東京大学総長賞に続くご受賞を心よりお祝いいたします.

井上研究奨励賞は, すぐれた博士論文を提出した著者に授与される賞で, 毎年すべての分野から 40 名程度選出されます. 数学分野からは毎年 2~3 名が選出されています.

阿部健氏の研究テーマのナビエ・ストークス方程式は, 非圧縮粘性流体の運動を記述する基礎的な偏微分方程式であります. しかし, 方程式系であるため, その数学的基礎には不明な点が多いことで有名な方程式であります. 例えば 3 次元流の場合, 必ずしも小さくない初期値に対して, 時間大域的に滑らかな解が存在するかという問題は, クレイ社の七つの数学の難問の一つです. 一方, 定常解について, 境界からの流量についての制限なしで解の存在がいえるかという, ルレイの問題と呼ばれる難問は, 2 次元領域の場合 Pileckas らによって最近解決されたばかりです. 3 次元領域の場合は 2014 年度日本数学会秋季賞受賞者である小藪英雄氏らによる重要な結果はありますが, 元の問題自体は依然として未知です.

阿部健氏は, このナビエ・ストークス方程式の線形化方程式であるストークス方程式から, 研究をスタートさせています. ストークス方程式は全空間の問題では熱方程式に帰着されます. しかし流体の占める領域に境界があり, 粘着条件 (ディリクレ条件) という境界条件を課す場合は本質的に熱方程式とは異なる問題になります. 例えば熱方程式の場合に成り立つ最大値原理に対応するものは成立しません.

しかし, ストークス方程式は放物型方程式でありますので, 熱方程式と同様な平滑化効果, すなわち初期値が滑らかでなくても, その解は瞬時に滑らかになる効果が期待されます. 初期値に解の時刻 t の値を対応させる解作用素が, ある与えられた関数空間でいわゆる解析半群になるという主張は, この性質を定量的に表現したものの一つです.

一方, 関数解析学の視点では, ある抽象的作用素 A の生成する半群 e^{At} が解析半群になることを示せると, 吉田耕作先生にさかのぼる半群論のさまざまな一般論を用いることができます. すると, 方程式の解を, 積分等で表現できなくても, あたかもできているのと同じような結果を導くことが可能になることがあります. これにより球や半空間などの具体的に解が表現できる特別な領域以外の一般の領域での解析を可能にする道が拓けます. したがって, ある具体的な偏微分方程式の境界値問題から定まる作用素が, 適切な関数空間で解析半群を生成しているかどうかを研究することは, より複雑な問題解析への鍵となります.

ストークス方程式に対応するストークス作用素は, 2 乗可積分空間 L^2 では自己共役的で定値なので, 対応するストークス半群は解析半群になることは関数解析学の一般論から明らかです. この性質はナビエ・ストークス方程式の可解性を初めて関数解析的に

扱った Kato-Fujita の著名な論文の鍵となる事実でした。ストークス半群の p 乗可積分空間 L^p ($1 < p < \infty$) での解析性は、関数解析学の一般論では示せませんので、偏微分方程式的な証明が必要でした。これについては 1970 年代後半から 1980 年代にかけて Solonnikov や筆者の有界領域での研究を出発点として、現在では L^p でのヘルムホルツ分解ができればどんな C^2 領域に対しても示せることが Geissert-Heck-Hieber-Sawada (2010) によりわかっています。(最大正則性も証明されています。)

空間を L^∞ 、つまり本質的に有界関数全体とした場合のストークス半群の解析性は、30 年来の未解決問題でした。熱方程式の場合は 1970 年代前半に既に増田久弥先生によって示されています。ストークス方程式の場合が難しかった理由は、ストークス作用素を記述するのに用いられる直和分解であるヘルムホルツ分解の射影作用素が L^p では有界作用素ですが、有界関数の空間 L^∞ では非有界になるためです。

阿部健氏はこの難問に修士在学時から挑戦されました。当時の指導教員の筆者は、問題の提示と、「ふくらまし法」(blow-up method) を用いてはどうかという提案をいたしました。しかし、実行することは大変でした。コンパクト性を示すのに、圧力の適切なコントロールが必要であることを阿部健氏が見出したことが転機となり、理論を完成させることができました。こうして、少なくとも有界領域の場合、ストークス半群は L^∞ 空間で解析的であることを示すことに成功し、その結果は *Acta Mathematica* より出版されました。

その後、阿部健氏は外部領域、摂動半空間の場合にこの結果を拡張し、それが *Acta Mathematica* の結果と併せて博士論文の主要部分となりました。博士論文は東京大学内でも評価され、年間 2000 名以上の博士号取得者の中で数名しか選ばれない総長賞を授与されました。

阿部健氏は早稲田大学とダルムシュタット工科大学との日独共同大学院プログラム (2009 年度~2013 年度、代表:柴田良弘教授)にも日本側の学生として参加されました。この L^∞ 空間での解析半群性の結果が注目され、ドイツ側の代表である Hieber 教授と共同研究を行うなど、活発な研究活動を展開しておられます。フィールズ賞受賞者と若手研究者の会合である第 1 回ハイデルベルク受賞者フォーラムにドイツ数学会代表のひとりとして招聘されました。

井上研究奨励賞で評価された業績はストークス方程式に関するものですが、阿部健氏はその後、この結果をナビエ・ストークス方程式に応用し、例えば外部領域の場合、有界な初期値から時間局所的な一意解を構成することに成功されました。この問題を示すためには、ストークス半群の解析性だけでは不十分で、ストークス半群についてのさらなるアприオリ評価が必要となります。これについての適切な評価を阿部健氏は導出なさいました。この阿部健氏の結果は、*Communications in Mathematical Physics* に出版予定です。

このように阿部健氏は、さまざまな量の依存関係の本質を見抜くことにすぐれ、微分方程式を中心とした解析学分野での活躍が期待される若手研究者です。また講演はとてもわかりやすく、論文の記述は正確で丁寧です。阿部健氏は博士号取得後も活発な研究活動を行っておられます。ストークス方程式の L^∞ 理論では既に専門家ですが、ますます視野を広げられ、研究者としてさらに大きく成長されることを楽しみにしております。