

書 評

「どこにでも居る 幾何 アサガオから宇宙まで」

井ノ口 順一 著, 日本評論社, 2010 年

日本大学医学部
宇田川 誠一

著者の井ノ口氏は、東京都立大学（現在の首都大学東京）の大学院生時代にはミンコフスキー空間内の空間的・時間的平均曲率一定の曲面の研究をしていた。調和写像論を通して無限可積分系理論にも造詣が深く、特に非コンパクト多様体への調和写像の研究に関連して非コンパクト・リー群の岩澤分解の問題をいち早く考察しており、いわゆる曲面の Weierstrass 公式の一般化である DPW (Dorfmeister-Pedit-Wu) 法において顕著な研究成果を上げている可積分幾何学者である。一方で、教育面においても井ノ口氏は大学院生時代から大学等で行っている数学の公開講座の講師を務めたりもしていた。当時、数学の公開講座というと人があまり集まらないものであったが、氏の講座は回を重ねるたびに参加者数が倍増して行き、やがて立ち見が出るほどであったと聞く。氏は相当な勉強家であり社会事情全般に渡って幅広い知識を有しているため、一緒にいるととにかく楽しく笑いが絶えない。この著書も氏による当時の講座の内容を加筆してまとめたものであるとのことであるが、軽妙な語り口がそのまま文章になっていて楽しく読める良本となっている。以下、その内容を具体的に見ていこうと思う。講座の内容を反映して、1 回ずつ完結する講座形式で、第 1 部が全部で 11 講からなり、第 2 部は 2 つの補講からなる。

第 1 講：アサガオのツルが描く螺旋は円柱面上の螺旋曲線でそれは円柱面の測地線であることを示唆する。つぎに「しゃぼん玉はなぜ丸い？」という疑問を提示して、ホップの定理を述べて平均曲率一定曲面 (CMC 曲面) の導入を行っている。また、懸垂線を回転させてできる懸垂面を説明して変分問題の説明への導入としている。シャボン玉で作った大きな懸垂面の絵が載っているが、しゃぼん玉の中に入っている小さな女の子は氏のお嬢さんであろう。一般の人には懸垂線と放物線の区別が難しいが、その違いとなぜ区別が難しいかの説明を詳しく行っている。その後、変分原理の節で代表的な幾何学的変分問題 (アインシュタイン計量, ヤング・ミルズ場, 調和写像論) を紹介し、等周問題と定幅曲線の話を入れて、最後は曲線の曲率の話で終わる。

第 2 講：コピー用紙などの規格紙は横と縦の比率が $1:\sqrt{2}$ になっているが、その理由を

明快に解説する。ユークリッドの互除法を、折り紙を用いて説明を行い、 $\sqrt{2}$ が無理数である理由を説明する。また、折り紙の折り方を利用して行う分数の足し算の説明は教育学部にいたことがある氏ならではの視点である。

第3講：この講は、定規とコンパスで行う作図の話である。黄金比、白銀比やミツバチの巣のなぞについての話が出てくる。ミツバチの巣は正六角形で組み立てられているが、それはなぜか。ミツバチより原始的なハナバチは丸い巣を作るそうだ。ミツバチも丸い巣を作りたいのかもしれないが、労力の節約から六角形になるのであろうか。タイル貼りの問題と等周不等式を使って理由を説明する。著者が断っているように、これは純粋に数学的な説明である。水に浮かぶ泡どうしは表面張力などの力学的な安定性を求めて接合点が必ず三つの壁が120度という角度で触れあう（プラトー境界という）。これについては、「Shapes, Philip Ball 著, 林大 翻訳, 早川書房」の第2章を参照されたい。また、ミツバチの巣はマルディのピラミッドと呼ばれる形をしているが、それよりも蜜蝋を節約できる形があることを紹介する。その後、オイラーの多面体定理とケプラー予想の話と続く。

第4講：図形を研究するうえで、現代では当たり前になっているデカルト座標の導入についての話を行う。楕円、放物線や双曲線の描き方を説明している。とくに、放物線の描き方を通してパラボリアンテナの原理を説明する。楕円についての応用としては太陽系の惑星の楕円軌道などのケプラーの法則を紹介する。双曲線についての応用は、アインシュタインの数学の説明の講（第10講）で行う。また、楕円面、放物面、双曲面をガリレオと顕微鏡の製作の話で登場させる。「おしゃべり」のコーナーでは、カメラ用のレンズの話もしている。余談であるが、氏は数学者にならなかつたらカメラマンになっていたと常々言っていたとおり、カメラにも造詣が深い。

第5講：この講のタイトルは他の講と比して異質である。「心理学と構造主義」というタイトルである。しかし、内容は幾何学であり、同値関係の話から始まり平面の合同変換群の話へと進む。その後、他にもアフィン変換群、等積変換群を紹介し、それぞれに対応する幾何学があることを説明する。その後、トポロジーの節でセーターを脱ぐ宴会芸の絵が描いてある。さて、心理学はどこに？という疑問がわいてくると思うが、それは「おしゃべり」コーナーで出てくる。ピアジェの心理学である。ピアジェは、こどもの持つ空間概念は位相幾何学的段階、射影幾何学的段階、ユークリッド幾何学的段階を経て成長して行くと考えたそうである。つまり、幾何学の発展とは逆に、「変換群を小さくして行く方向」に成長して行くと考えたのである。構造主義の説明については本書をご覧

いただきたい。

第 6 講：平行線の公理の問題である。ボヤイ親子とガウスのやりとり，ロバチェフスキーの登場，と双曲幾何の発見の歴史が述べられている。そして，リーマンの登場でリーマン幾何学の発見の話へと続く。6.10 節にはポアンカレ平面と円盤模型のそれぞれを用いた双曲幾何の説明がある。

第 7 講：ニュートンとライプニッツの微分の発見の話である。ライプニッツという名のドイツのビスケット，ニュートンという名のベルギーの林檎ビールがあるらしい。ライプニッツをかじりながらニュートンで乾杯して，ライプニッツとニュートンを仲直りさせましょうと著者は提案する。

第 8 講：正確な世界地図を平面上に実現するのはなぜ不可能であるかを，ガウスの曲面論（ガウス曲率）を使って説明する。続いて，リーマン多様体の説明を行い，リーマン計量，曲率テンソルまでも書いてある。

第 9 講：時間とは何か？という問いかけから，1 秒の決め方の話，世界標準時，閏秒の話の後，江戸時代の時間の話が出てくる。落語の演目「時そば」を題材にして，江戸時代の時間の呼称について解説している。暦学については，第 2 部の補講 1 に詳しい。

第 10 講：アインシュタインの数学の説明である。ニュートン力学とマックスウェルの電磁気学の矛盾を解決すべく発見されたローレンツ変換の話から始まり，ミンコフスキー幾何と続いた後，特殊相対性理論の話がある。時間の遅れについての解説がある。一般相対性理論における重力場の方程式を紹介し，ブラックホールの説明を行っている。シュバルツシルド解が有名であるが，他に Kerr 解，富松・佐藤解というものがある。無重力解にベックルンド変換を施すと Kerr 解が得られ，もう 1 度行くと富松・佐藤解が得られる。自明な解から自明ではない解を作り出すベックルンド変換は，可積分幾何学者には馴染みの方法である。

第 11 講：変分法の概略の説明である。イールス (J. Eells) と Sampson (J.H. Sampson) による非正曲率多様体への調和写像の存在定理の説明がある。いわゆる熱流の方法 (Heat flow method) である。写像のエネルギーが減る方向に写像を変形していくとエネルギーの臨界点に達するというものである。ハミルトン (R.S. Hamilton) はイールス・Sampson の定理を境界付多様体へと拡張した (Lect. Notes in Math. Vol. 471 (1975), Springer-Verlag) が，その後，そのアイデアをベクトル値関数から $(0,2)$ 型テンソル場の方程式に応用し，リッチ流 (Ricci flow) の方程式を考案した。そして，「単連結で閉じ

て有限な 3 次元リーマン多様体があるところ、正のリッチ曲率を持つ 3 次元の標準的球面と同じ (微分同相) である」という大定理に到達する。これについては、チョウ (B. Chow) 等による詳しい解説本が出ていて、特に、方程式が退化しているためにナッシュ・モザー (Nash-Moser) の定理を使うところが難解であるが、退化している部分が Ricci soliton でちょうど補えて放物型に変換できるというデタック (D. DeTurck) によるトリックが大変興味深い。さて本書のほうは、ペレルマン (G. Perelman) の 3 次元ポアンカレ予想の解決へと話は続く。ペレルマンの研究において、日本人微分幾何学者である塩谷隆・山口孝男両氏の研究成果が使われているという事実を忘れてはいけない。最後の節では、再びしゃぼん玉の話が出てくる。ホップの問題に関連して、ウエンテ (H. Wente) により反例のトーラスが構成された歴史的事実、アブレッシュ (U. Abresch) とヴァルター (R. Walter) の研究、ピンカール (U. Pinkall) とスターリン (I. Sterling) がすべて構成する方法を与えたことが述べられる。最後に、「3 次元ユークリッド空間内の曲面 M において、 M の各点を通る螺旋測地線が 1 本あれば M は円柱面である」という予想を述べている。これについて現在知られている最善の定理は、各点で 2 本あれば肯定的というものであり、この定理の作者は M. Tamura とあるが、実は著者の奥様のことである。

以上、各講を見てきたが、全般的な内容からすると、読者対象は高校生、大学生、一般社会人といったところであろう。一方で、授業を行う意味から、高校の先生や大学の先生にも解説の方法や考え方、教え方のヒントになる部分が随所に見られ、参考になるであろう。この本を読み終えた読者には、引き続き「自然の中の幾何学—みつばちの巣から宇宙論まで」(V.L. Hansen 著, 井川俊彦翻訳) を読まれることをお勧めする。さて、私が手にしたものは初版第 1 刷りなので、いくつか誤植がある。大きな点だけ記しておく。54 ページにある「 $n \tan(2\pi/n)$ は n が大きくなるとそれにつられて大きくなる。 n が限りなく大きくなれば限りなく π に近づく」は「 $n \tan(\pi/n)$ は n が大きくなるとそれにつられて小さくなる。 n が限りなく大きくなれば限りなく π に近づく」が正しい。167 ページにガウス曲率の計量を用いて表した式があるが、これは正しくない。